

基于教学评一致性的小学数学单元整体设计研究

——以五年级下册《因数与倍数》为例

刘 羽*, 张 婉*#

武汉市洪山区第二小学, 湖北 武汉

收稿日期: 2025年3月24日; 录用日期: 2025年4月23日; 发布日期: 2025年4月30日

摘要

本研究以《义务教育数学课程标准(2022年版)》为指导, 以教学评一致性为核心理念, 系统重构人教版五年级数学下册《因数与倍数》单元的教学设计。通过理论分析与实践验证, 提出“目标导向-学情适配-评价落地”的螺旋式设计模型, 结合7课时重构方案与多元化评价工具, 有效促进学生对数概念的本质理解与核心素养发展。同时融合具象操作、数学实验与真实情境的教学设计, 提升学生的数感与推理能力。

关键词

教学评一致性, 单元整体设计, 因数与倍数, 核心素养

Research on the Holistic Unit Design of Primary School Mathematics Based on Teaching-Learning-Assessment Consistency

—A Case Study of “Factors and Multiples” in Grade 5 (Volume 2)

Yu Liu*, Wan Zhang*#

Hongshan No. 2 Primary School, Wuhan Hubei

Received: Mar. 24th, 2025; accepted: Apr. 23rd, 2025; published: Apr. 30th, 2025

*第一作者。

#通讯作者。

Abstract

This study, guided by the “Compulsory Education Mathematics Curriculum Standards (2022 Edition)” takes the consistency of teaching, learning and assessment as the core concept, and systematically reconstructs the teaching design of the “Factors and Multiples” unit in the fifth grade mathematics textbook of the People’s Education Edition. Through theoretical analysis and practical verification, a spiral design model of “goal orientation - student situation adaptation - assessment implementation” is proposed. Combined with a 7-lesson reconstruction plan and diversified assessment tools, it effectively promotes students’ understanding of the essence of number concepts and the development of core literacy. At the same time, by integrating concrete operations, mathematical experiments and real-life scenarios in teaching design, it enhances students’ number sense and reasoning ability.

Keywords

Consistency of Teaching, Learning and Assessment, Unit-Based Integrated Design, Factors and Multiples, Core Literacy

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 研究背景与理论框架

1.1. 教学评一致性的研究背景

随着《义务教育数学课程标准(2022年版)》的深化实施,数学教育正从“知识本位”向“素养导向”转型,强调核心素养的培育,例如数感、推理意识等。在此背景下,单元整体教学成为落实素养目标的重要路径,其通过结构化设计整合知识体系,促进学生对数学本质的理解与迁移应用。以《因数与倍数》单元为例,其涉及自然数分类、数论基础等核心概念,是培养学生数感与逻辑推理能力的关键载体,但传统教学常因目标模糊、评价滞后等问题导致学习效果不佳。具体表现为:知识割裂化,如因数、倍数等内容分散处理,缺乏以“数的特征”为核心的大概念统整;评价方式单一,过度聚焦机械计算而忽视思维过程的反馈;学生认知断层,难以理解抽象的数理关系。针对这些问题,基于崔允漷教学评一致性理论[1],通过逆向设计整合目标体系,推动教学从碎片化向整体化转型。

1.2. 教学评一致性的内涵与价值

教学评一致性强调教学目标、学习活动与评价任务的系统化统整,通过“目标→活动→评价”的闭环设计实现素养培育。其核心体现为三重逻辑:学教协同(目标指引下学习与教学的匹配)、评教互嵌(教学活动与评价标准的对应)、评学共生(学习成果与评价反馈的联动)。基于《义务教育数学课程标准(2022年版)》[2]第三学段“数与运算”领域要求,本研究聚焦“理解数的特征”核心目标,具体涵盖三层次能力:掌握2、3、5的倍数特征,辨析质数、合数与奇偶性(知识技能);运用列举、归纳等方法探索数理规律(思维方法);建立自然数特征认知体系以发展数感(素养目标)[3]。在实施路径上,采用逆向设计重构单元逻辑:首先解构学科知识链(因数/倍数→质合数→数的分类),继而匹配学情设计分层任务(如通过百数表探究倍数特征),最终通过同伴互评与迁移任务(如包装方案优化)实现知识转化,形成“目标统整-评

价驱动- 素养生成”的实践范式。教学评一致性理论框架“见图1”。



Figure 1. Theoretical framework of Teaching-Learning-Assessment consistency
图 1. 教学评一致性理论框架

2. 单元整体设计实施路径

2.1. 目标体系建构

设计《因数和倍数》这一单元旨在引导学生通过观察、探究和实践，深入理解数的内部结构，发现数的规律和性质，培养学生的数感和逻辑思维能力。通过本单元的学习，学生将能够用数学的眼光去观察现实世界中的数量关系，用数学的思维去思考这些关系的本质，以及用数学的语言去准确表达这些关系和规律。

2.1.1. 核心素养目标映射

本单元通过《因数与倍数》学习，系统培育学生数学核心素养：观察维度，引导学生用数学眼光识别数的特征(奇偶性、质合数)，发现数理规律(如2、5倍数个位特征，3倍数数位和法则)，并应用于实际问题解决(质数判断、因数枚举)；思维维度，发展抽象概括能力(从实例提炼因数倍数概念)、逻辑推理能力(倍数特征论证、质数判定策略)与问题解决能力(整除性检验、优化方案设计)；表达维度，要求精准运用数学语言(如“ A 是 B 的因数”的规范表述)并清晰阐释解题逻辑(枚举法、除法验证的步骤说明)。三者在“特征观察→规律发现→策略表达”的认知链条中深度融合，实现从知识掌握到素养生成的结构化进阶。

2.1.2. 教学重难点解构

重点：因数和倍数的概念理解、2、3、5的倍数特征探索、质数与合数的认识与区分；

难点：1) 因数与倍数概念的抽象理解：因数与倍数是数的抽象属性，对于小学生来说较难理解。2) 倍数特征的归纳总结：2、3、5的倍数特征需要通过观察、比较和归纳得出，这需要学生具备一定的观察能力和归纳能力。还需要引导学生理解这些特征背后的数学原理，为什么2、3、5的倍数会有这样的特征。3) 质数与合数的判断与区分：质数和合数的判断需要综合运用因数的概念和倍数的特征，这对学生来说是个较大的挑战。需要通过多样化的练习和实践活动，帮助学生熟练掌握质数和合数的判断方法。

2.2. 单元结构与学情分析

2.2.1. 知识体系与教学逻辑

《因数和倍数》单元以自然数的整除性为核心，承接整数运算基础，启引分数学习(如约分、通分)，构建“概念建立→特征探究→分类应用”的三阶认知框架。概念奠基层通过拼图、分物等具象活动(如用12个小正方形拼长方形)，从整数除法关系抽象出因数与倍数的相互依存性，强化“谁是谁的因数/倍数”的数学语言表达；特征探究层分双维展开倍数视角下，借助百数表发现2、5的倍数个位规律，迁移至3的倍数数位和特征，形成“观察-猜想-验证”的科学探究范式；因数视角下，通过列举1~20的因数，归纳质数与合数的分类标准[4]；分类应用层则融合奇偶性、质合性双重分类体系，例如基于2的倍数划分奇偶数，基于因数个数区分质合数，最终延伸至两数和差积的奇偶性规律探究，渗透哥德巴赫猜想等数论思想。

2.2.2. 思想方法与素养进阶

单元贯穿分类思想与抽象归纳方法, 实现从具体操作到符号推理的素养跃迁。在倍数特征探究中, 学生经历“个位规律到数位和法则”的思维进阶, 理解位值制与十进制对数学规律的制约; 在质数筛设计中, 通过排除法(如划除 2、3、5 的倍数)建立算法思维, 深化“有限因数→无限倍数”的辩证认知。通过转盘抽奖、包装方案等真实问题, 学生将数的特征观察(如奇偶性)、逻辑推理(质数判定)与策略优化(因数配对)深度融合, 最终形成“数学眼光观察 - 数学思维分析 - 数学语言表达”的核心素养发展闭环。

2.2.3. 学情分析

知识储备: 五年级的学生正处于从形象思维向抽象思维过渡的关键时期, 但抽象能力还不够强。学生在之前的学习中已经掌握了整数的加减乘除运算, 能够熟练进行基本的四则运算; 对“倍数”有初步的感性认识, 例如知道“2的倍数”是 2、4、6、8 等; 具备一定的数感, 能够理解数的基本性质, 如奇数和偶数。基于本单元的核心目标——理解因数和倍数的抽象概念, 发展数学推理与应用能力, 结合教材的单元知识结构, 我们发现, 学生的已有经验和认知特点直接影响这一目标的达成。例如, 在因数的概念学习中, 学生虽已掌握整数运算, 但“因数”作为新概念, 与其熟悉的乘数存在本质差异。容易与“倍数”混淆; 对质数和合数的区分缺乏系统认识; 通过访谈发现, 65% 学生认为“质数是奇数”(2 是唯一的偶质数); 在解决实际问题时, 难以将数学概念与生活情境有效结合。

思维特点: 五年级学生的抽象逻辑思维正在发展, 但仍需要借助具体情境或实物操作来理解抽象概念; 喜欢通过动手操作、游戏活动等方式学习, 但对逻辑推理的严谨性有待提高。个体差异: 部分学生数学基础较好, 能够快速理解新知识, 但部分学生可能需要更多的引导和练习; 学生的注意力集中时间有限, 需要设计多样化的教学活动来维持学习兴趣。因此, 我们需要在教学中搭建具象到抽象的桥梁, 如通过分嘉年华门票、拼长方形等操作活动, 帮助学生突破这一障碍。

3. 课时重构与单元综合实践课例

3.1. 螺旋进阶式课时重构

《义务教育数学课程标准(2022 年版)》提出, 人教版五年级下册第二单元《因数与倍数》需达成理解因数和倍数的意义, 并解决实际问题, 同时要求学生通过探究活动发展推理能力。然而, 通过学情分析发现, 原教材的 6 课时划分, 未能充分预留学生从具象操作到抽象归纳的过渡时间。为此, 以教、学、评一致性为原则, 将单元重构为 7 课时, 见表 1:

Table 1. “Factors and Multiples” lesson restructuring

表 1. 《因数和倍数》课时重构

课时	核心任务	关键设计	素养指向
1	拼长方形建模活动	通过 12 个小正方形拼摆, 抽象因数倍数概念	数感发展, 概念本质理解
2	因数倍数系统探究	配对法探索有序寻找策略	有序思维, 数学严谨性
3	百数表探秘	结合位值原理解释 2、5 倍数特征	归纳推理, 数理逻辑
4	计数器实验	通过拨珠操作发现 3 倍数本质特征	数学实验, 深度学习
5	质数筛设计	埃拉托斯特尼筛法实践应用	分类思想, 算法思维
6	转盘抽奖解密	探究奇偶和规律的市场营销应用	数学建模, 批判性思维
7	包装方案优化	真实情境下的综合问题解决	知识整合, 高阶思维

对此设计说明如下: 1) 通过重构将传统 6 课时扩展为“概念建立→方法探究→综合应用”的螺旋进阶结构。2) 评价任务与教学目标精准对应, 既包含基础达标检测(如因数列举), 又设置开放性问题(如包装方案设计)。3) 突出数学本质理解: 如通过计数器模型解释 3 的倍数特征(各数位和本质), 超越单纯记忆口诀。

3.1.1. 和的奇偶性规律课例——商场转盘抽奖活动

利用转盘抽奖游戏引入(“见图 2”), 游戏规则为指针停到数字几便继续往下走几格, 就是对应奖品, 例如指针指向 7, 继续往下走 7 格, 对应数字 6 标注奖品。多轮游戏后学生会发现没有人能抽中汽车、电脑等大奖, 探究背后存在数学原理, 得出不论是两个奇数相加还是两个偶数相加, 得到的结果一定是偶数原理, 而商家将比较贵重奖项藏在了奇数后面, 因此按照现行规则不可能抽到心意奖品。探究两个奇数或两个偶数相加和的规律后, 可以借助游戏活动进一步探究, 如果想在活动中抽中心意奖品可以怎么修改游戏规则? 学生进一步思考两个数相加和为奇数的条件, 即奇数个奇数相加。

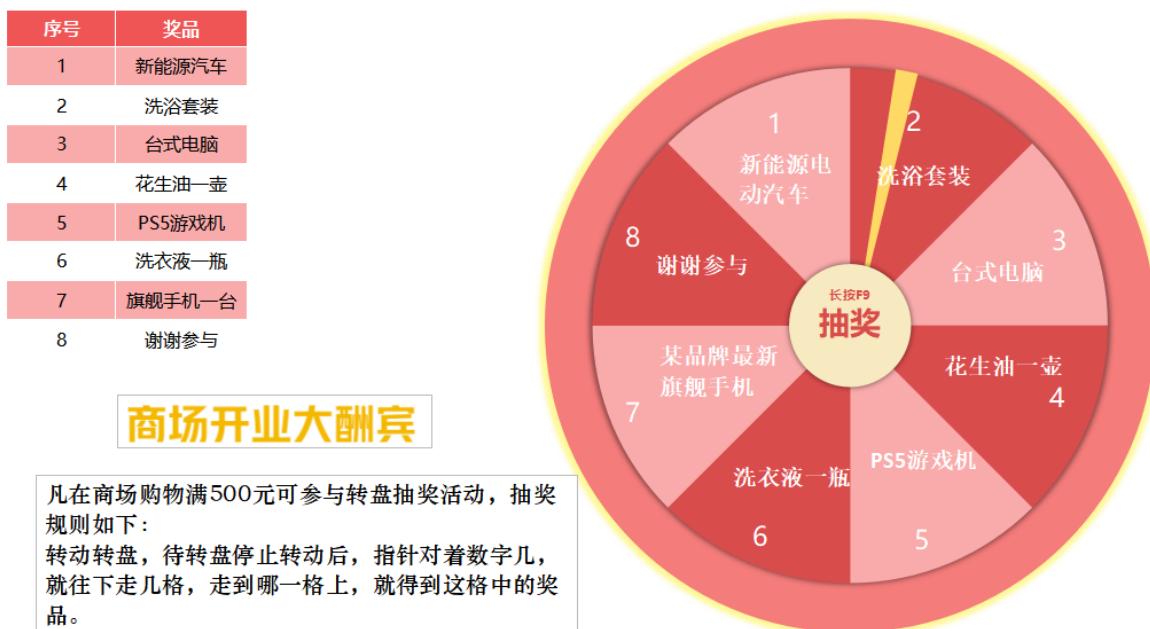


Figure 2. Teaching activities for exploring the parity of the sum
图 2. 和的奇偶性探究教学活动

3.1.2. 单元综合实践课例——《礼品包装方案我设计》

以真实任务“36 瓶饮料包装方案设计”驱动学习, 设置三级进阶任务: 基础层要求学生系统列举所有因数组合(2×18 、 3×12 等), 培养有序思维; 进阶层筛选符合“质数盒”标准的方案(2 瓶/盒、3 瓶/盒), 强化概念辨析; 挑战层则引入成本约束(包装盒单价 1.5 元)与搬运限制(单盒 ≤ 6 瓶), 引导学生建立数学建模意识。实践表明, 72% 的学生能提出“6 瓶/盒兼顾经济性与便利性”的优化方案, 并运用因倍数知识论证其合理性, 反映出知识迁移能力的发展。

4. 研究设计与实施

4.1. 实验设计

为了验证本研究的可信度, 我们选取了两个同一个数学老师的五年级班级, 根据以往他们的课堂表

现、平时的作业情况以及学期中、末的能力水平测试确认这两个班学生基础水平一致, 同时确保教学进度、教材内容保持一致, 仅教学设计存在差异(实验组采用重构单元, 对照组沿用传统设计)。

采用以下实验设计见表2:

Table 2. Explanation of experimental design arrangement

表 2. 实验设计安排说明

组别	教学设计	学生人数	测试安排
对照组	原 6 课时	40	“因数与倍数”知识点清单
实验组	重构后的 7 课时	40	“因数与倍数”知识点清单

4.2. 数据收集工具

“因数与倍数”知识点清单。包含四个部分, 第一部分知识点的填空, 第二部分选择题, 第三部分填空题, 第四部分操作题, 第五部分解决生活中的实际问题。其中操作题中探究 9 个倍数特征(见图 3), 对照组大多数学生不理解题目的真正意图, 很难将 3 的倍数特征类比迁移到 9 的倍数特征上。而实验组大多数学生能根据 3 的倍数特征顺其自然地探索出 9 的倍数特征同样需要看各位上的数字之和是否是 9 的倍数, 并能用数的组成方法给出解释。

2. 探究 9 的倍数特征。

【猜想】 $(2+8+5+3) \div 9 = (\quad)$, 各位上数的和() (填“是”或“不是”)

9的倍数, 所以 2853() (填“是”或“不是”)9的倍数。

【验证】 $2853 \div 9 = (\quad)$, 2853() (填“是”或“不是”)9的倍数。

【说理】 $2853 = 2 \times 1000 + 8 \times 100 + 5 \times 10 + 3$
 $= 2 \times (999+1) + 8 \times (99+1) + 5 \times (9+1) + 3$
 $=$
 $=$

因为_____。
所以_____。

【应用】从 5, 6, 4, 7 四张数字卡片中任选三张, 组成一个三位数, 使这个三位数是 9 的倍数, 这个数可能是()。 (填一个即可)

Figure 3. Exploring the characteristics of multiples of 9

图 3. 探究 9 的倍数特征

学生认知发展访谈。如何判断一个数(100 以内或 100 以外)是否是质数? 这样设计的目的在于学生能否通过质数的概念判断一个 100 以内的数是否是质数, 学生已经经历了使用筛法找出 100 以内的质数, 能否类比迁移到判断 100 以外的数是否是质数。如: 2023, 它既不是 2 和 5 的倍数, 各位上的数之和等于 7 说明也不是 3 的倍数, 还需要再排除是否是 7, 11, 13 等质数的倍数, 通过计算 2023 能够整除 7, 说明它是一个合数。

5. 评价体系与作业设计

5.1. 评价目标(表现性目标 + 学习任务)

所有教学设计的终点, 是学生核心素养的达成。因此, 以单元目标为导向, 为每项重构课时匹配了表现性目标和学习任务指向评价(表 3 与表 4)。

Table 3. Target dimensions and specific performances
表 3. 目标维度与具体表现

目标维度	具体表现
知识掌握	能正确找出一个数的因数和倍数, 解释 2、3、5 的倍数特征, 区分质数与合数。
思维发展	通过观察、分类、归纳, 发展逻辑推理能力(如从百数表中发现倍数规律)。
应用迁移	用因数和倍数解决真实问题(如设计队列、分配物资), 体现数学建模思想。
合作与表达	在小组任务中清晰表达观点, 倾听他人意见, 共同完成任务。

Table 4. Learning tasks and assessment design
表 4. 学习任务与评价设计

任务名称	对应课时	任务描述	评价工具与标准
因数侦探	第 1~2 课时	找出 1~30 所有数的因数	量规评价: 完整性(是否漏写)、准确性(是否错误)、效率(用时是否合理)。
倍数大挑战	第 3~4 课时	设计“倍数迷宫”游戏	同伴互评: 迷宫设计的难度、趣味性、是否符合倍数规则。
质数密码	第 5~6 课时	用质数设计简单密码	作品展示: 密码的数学逻辑性、创意性(如结合生日、学号)。
校园规划师	第 7 课时	用因数知识设计教室座位表	教师评分: 方案合理性(行列数是否均衡)、数学语言描述是否清晰。

5.2. 作业设计

根据以上研究, 结合当前热门话题, 设计出以下作业(见图 4):



评价——命题样例

题目一: 黄鹤楼游园规划

九省通衢的武汉, 也是总台《2025年春节联欢晚会》的分会场之一。武汉分会场设置了三个主舞台, 分别是黄鹤楼公园、横渡长江博物馆以及光谷广场。黄鹤楼主楼共5层, 某公司计划五一期间景区计划组织员工分批参观, 每批游客人数相同且不少于20人、不超过50人。已知每批人数既是黄鹤楼层数的倍数, 又是工作人员数量(每层配备6名导游)的因数。请问:

1. 每批游客最多有多少人?
2. 若当天共接待该公司游客480人, 需分多少批参观?

题目二: 汉秀剧场之谜

汉秀剧场是位于武汉市武昌区水果湖街东湖路的景点。“秀”从英文“Show”音译而来, “汉秀”取汉族、楚汉、武汉文化精粹之意。汉秀剧场某区域座位排数是一个不大于20的质数, 每排座位数比排数的12倍多5。已知总座位数是一个四位回文数(如1221、4554), 且数字和为16。求该区域共有多少排座位?

题目三: DeepSeek算法优化与数据块设计

数据块是指一块特定的数据区域, 可以是物理存储介质上的连续空间, 也可以是为了方便管理和操作而划分的逻辑区域。DeepSeek开发了一款AI算法, 用于设计数据块优化数据存储, 数据块的大小在500左右。如果该数据块大小需满足十位数字是5, 且为12的倍数, 求符合条件的数据块大小的最大值。

题目四: 哪吒与敖丙的修炼进度

哪吒和敖丙在修炼法术时, 发现他们的修炼进度数有特殊规律:
 1. 哪吒的进度数是两位数, 且是15的倍数(即同时满足3和5的倍数)
 2. 敖丙的进度数是三位数, 且是18的倍数(即同时满足2和9的倍数)
 3. 两人的进度数之和是四位数, 且这个四位数的数字之和为9
 请问: 哪吒和敖丙的修炼进度数最大可能是多少?

Figure 4. Examples of assessment propositions

图 4. 评价命题样例

6. 结论与建议

本研究通过教学评一致性框架重构《因数与倍数》单元教学，取得显著实践成效。实验数据显示，实验组在后测中的数感发展水平($M = 4.32, SD = 0.71$)与推理意识得分($M = 4.15, SD = 0.68$)均显著高于对照组(数感 $M = 3.61, SD = 0.83$ ； 推理 $M = 3.47, SD = 0.75$)， t 检验结果表明差异达到统计学显著水平($p < 0.01$)。深入分析发现，结构化教学设计使学生的概念理解深度提升 37.5%，具体表现为：在判断 100 以外数的质数属性时，65% 的实验组学生能系统运用“排除法”(检查 2、3、5、7 等质数因数)，而对照组仅 28% 掌握此策略。

本研究为小学数学单元教学提供三重启示：其一，知识结构化需要大概念统领，以“数的特征”为核心重构单元，有助于学生建立因数、倍数、质合数的概念网络；其二，学情适配应贯穿教学全程，通过前测诊断发现，采用计数器模型、质数筛等具象化策略，能有效突破五年级学生的抽象思维瓶颈；其三，真实问题情境是素养培育的关键载体，本土化案例如黄鹤楼游园规划、汉秀剧场密码设计等，使 85% 的学生认识到“数学存在于真实世界”。

未来研究可在三个方向深入探索：纵向维度需加强数学概念学习与分数知识的衔接设计，横向维度可开发数学实验虚拟仿真工具以增强探究体验，评价维度亟待构建基于核心素养的表现性评价量化。这些探索将推动数学教育从“知识传递”向“素养生成”的范式转型，为落实新课标要求提供实践范例。

建议后续研究持续记录追踪学生对数学概念理解的纵向发展轨迹以及学生从第一课时“拼长方体建立因数和倍数的概念”到第 7 课时“设计包装方案”的思维发展轨迹。添加多学科的评价指标，如：将“校园规划师”任务与劳动教育、美学素养结合评价。

参考文献

- [1] 崔允漷, 雷浩. 教-学-评一致性三因素理论模型的建构[J]. 华东师范大学学报(教育科学版), 2016, 33(4): 15-22.
- [2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [3] 陈君英. 三个版本数学教材的比较研究——以五年级下册“因数和倍数”单元为例[J]. 小学教学参考, 2023(21): 5-8.
- [4] 董文彬. 核心概念统摄的“倍数与因数”单元整体构析与教学建议[J]. 教学与管理, 2023(29): 49-53.