Advances in Education 教育进展, 2025, 15(4), 1404-1409
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2025.154704

Hans汉斯

实变函数问题导向教学设计探索与实践
——以《勒贝格测度》为例

徐　驰

安徽理工大学数学与大数据学院，安徽 淮南

收稿日期：2025年3月24日；录用日期：2025年4月23日；发布日期：2025年4月30日

摘　要

数学专业课实变函数由于其概念抽象，学习难度大，所以传统教学法存在教学效果差，学生学不懂的问题。近些年随着教育研究不断深入，问题导向教学法逐渐成为教学改革重要途径之一。本文将基于问题导向教学法的教学理念，以实变函数中勒贝格测度作为教学例子，通过合理设计教学过程，探索实变函数课程的问题导向教学的可能路径，推动实变函数课程的教学改革。

关键词

实变函数，教学，问题导向教学，《勒贝格测度》

Exploration and Practice of Problem-Oriented Teaching Design for Real Variable Function
—Taking “Lebesgue Measure” as an Example

Chi Xu

School of Mathematics and Big Data, Anhui University of Science and Technology, Huainan Anhui

Received: Mar. 24th, 2025; accepted: Apr. 23rd, 2025; published: Apr. 30th, 2025

Abstract

The abstract nature and challenging aspects of real variable functions often lead to inadequate teaching outcomes and difficulties in student comprehension when using traditional teaching methodologies in mathematics courses. Recently, as educational research persists in its advancements, the

文章引用: 徐驰. 实变函数问题导向教学设计探索与实践[J]. 教育进展, 2025, 15(4): 1404-1409.
DOI: 10.12677/ae.2025.154704

problem-oriented teaching method has emerged as a significant strategy in teaching reform. This article discusses the application of the problem-oriented teaching philosophy, using Lebesgue measure in real variable functions as a case study. It aims to explore viable pathways for implementing problem-oriented teaching in real variable function courses through carefully designing teaching processes and to advance the reform of teaching these courses.

Keywords

Real Variable Function, Teaching, Problem-Oriented Teaching, "Lebesgue Measure"

1. 引言

实变函数课程作为数学专业重要的专业课，在大学数学专业的教学中扮演着重要作用。传统的实变函数教学基于“概念－定理－证明”的模式教学，具体由授课老师引入概念，随后介绍主要定理，最后给出定理的证明。在该模式下，教学的重点变成定理的证明，从而缺少对概念引入的动机以及定理背景的介绍，导致学生学习的过程觉得概念抽象，不易理解。鉴于此，本文将基于问题导向的教学模式，以实变函数这门课程中《勒贝格测度》这部分内容为教学案例，立足于数学理论发展过程中切实存在的问题，以问题驱动教学，探索与设计基于问题导向的实变函数课堂，旨在提高数学专业学生对实变函数这门专业课的理解程度，促进实变函数课程教育教学方法的改革与创新。

2. 问题导向教学法

2.1. 问题导向教学法的理论基础

(1) 杜威的实用主义教育思想[1]

作为著名的美国教育学家，杜威的实用主义教育思想认为学校教学不可完全脱离社会生活，并主张将学校改造成简化的社会，从而可以将学校与社会生活联系起来。其次杜威强调“做中学”的思想以及反省思维，在“做”中掌握知识并反省自身的学习过程。问题导向学习法通过创设问题情境让学生通过解决问题去探索与反省，这符合实用主义教育思想。

(2) 建构主义理论[1]

建构主义理论的代表人物为皮亚杰与冯拉德・塞斯菲尔德等。对于“知识”，建构主义者认为知识是对现实的解释，从而不同人对知识的理解不同。所以知识不应被灌输给学习者，而应该由学习者自主构建。对于“学习”，建构主义者认为学习者不应是被动接受，更应主动构建知识，故学习应基于学习者的经验背景，对信息理解、加工以及整理的过程。最后建构主义者认为，学习者应该带着自身的经验去学习，同时教学过程不可以无视这些经验。问题导向教学法同样强调学生学习的自主性，强调应在问题情境中自主构建知识，这和建构主义理论不谋而合。

(3) 人本主义理论[1]

人本主义理论的代表人物有罗杰斯与马斯洛。其理论强调学生作为“完整的人”学习。所以在教学过程中，教师所扮演的角色是引导者而非命令者，这和问题导向教学中，教师以问题引导、启发学生的理念相同。

(4) 情境认知理论[1]

情境认知理论是认知心理学领域的重要分支，其理论逐渐向教育研究领域渗透。教育学中的情境认知理论认为：学习的实质是个体在参与实践过程中与他人、周围环境相互作用的结果。故该理论强调学习者应该是学习过程的参与者而不是观察者，因此需将知识与技能置于真实的情境中。其理论启发问题导向教学将学生置于复杂问题情境中，使学生能够在解决问题中学习。

2.2. 实变函数课程中的问题导向教学原则

实变函数课程是数学专业重要的专业课，其课程特点是概念抽象，内容庞杂。传统授课模式普遍存在如下问题：学生难以理解抽象的概念，同时教师作为讲授者，在教学过程中往往忽视学生的自主性，从而导致学生学习积极性不高。问题导向教学则将学生置于教学过程的核心地位，通过教师对实变函数中抽象概念的适当引导，提出问题让学生“在问题中做”与“在问题中学”。这种教学方法把课程学习过程看作是不断探索的过程，学生在探索实变函数抽象概念的过程中不断发现问题、分析问题并解决问题。所以，为了合理解决传统实变函数课程教学的问题，问题导向课程教学设计应遵循如下原则[2]-[4]：

(1) 在教学过程中，需认识到学生是“完整的人”，充分尊重学生的想法。尊重学生想法的内涵在于鼓励学生表达自己的观点以及学习中所遇到的困惑。这是在实变函数教学过程中基本准则，以契合人本主义理念。

(2) 化抽象概念为具体例子，引导学生在“做中学”。在课程教学过程中，通过对具体例子的引入，将抽象的数学概念和实际生活相联系，从而便于学生理解抽象概念。同时在教学过程中，利用实际问题引导学生在探索问题的过程中，学习与加深实变函数的知识点。

(3) 鼓励学生充分调动自身学习的积极性，通过问题的引导自主构建知识。根据建构主义理论，学习者是主动建构知识而不是被动接受。所以问题导向教学需以问题为核心，引导学生构建实变函数理论，从而调动学生学习的自主性。

(4) 问题设计合理，从而使得学生置于合适的问题情境中，以达成在问题中学习的目的。在该原则中，问题情境设计需适合学生，既不能过于困难使得学生丧失继续学习的积极性，同时也不宜过于浅显导致问题达不到引导学生的目的。所以在问题导向教学过程中，教学者需精心设计问题，将学生置于适合自身的问题情境中。

3. 问题导向教学设计

勒贝格测度理论实变函数的重点内容，同时这部分内容存在概念抽象的特点，所以也是课程学习的难点。本文将以勒贝格测度作为教学案例，通过合理设计问题，以学生掌握与理解勒贝格测度理论作为课程的学习目标，并培养学生的批判思维能力与解决问题的能力。从课程设计原则出发，本文整体教学过程分为三大部分，第一部分是勒贝格测度理论建立以及发展过程的历史回顾，这部分作为课堂教学的引入部分；第二部分是问题导向教学方法的实现，这部分主要采用分组讨论的方式，由教师提出问题，引导学生解决问题。最后，通过例子加深学生对概念的理解。

3.1. 勒贝格测度理论背景

随着极限理论在 19 世纪中叶被建立，微分学以及积分学都得到了长足的发展。在积分理论中，黎曼于 1854 年引入了以其名字命名的黎曼积分，正式确定了积分理论中“分割、近似、求和、取极限”的步骤。但是随着魏尔斯特拉斯以及康托尔工作的出现，一系列性质“奇怪”的函数出现了。例如，狄利克雷就曾构造出如下函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数},\\ 0, & x\text{是无理数}.\end{cases}$$

对上述函数而言，如果分割的点全是有理数点，那么最后求和取极限后自然为 1，但是如果分割的点全是无理数点，那么最后求和的结果却又全为零。那么依照黎曼积分的理论，自然可以认为以上函数不可求积分。所以在 19 世纪末已经萌生出对积分理论进行改进的想法。改进积分理论的第一步是将长度，面积等概念推广到更广泛的集合上，从而形成测度理论。对测度理论有突出贡献的最早归功于若尔当。若尔当建立了若尔当测度论，同时研究在有界若尔当可测集上的函数，并将函数定义域分割成有限个若尔当可测集的方式定义积分。这些贡献都可以在勒贝格测度以及积分理论中寻找到踪迹。第二个里程碑式的人物就是波雷尔。波雷尔给出了波雷尔可测集集的定义，并表明这些集合构成一个 σ 代数类。上述结论的关键假设在于认为测度具有可数可加性。

测度理论发展的一大高峰在于勒贝格测度的建立。在勒贝格的时代，面临的一大问题在于如何对一般的集合定义测度。勒贝格想到的办法便是内填外包法。对于任意有界点集 E，勒贝格首先用一系列开集包含 E，并计算所有这些开集测度的下确界，此下确界就作为集合的外测度。同时利用包含于 E 内的闭集向内填充，同时计算这些闭集测度的上确界，那么将此上确界作为集合的内测度。如果外测度和内测度相等，则认为集合是可测的，其结果作为集合的测度(勒贝格测度)。上述方案实际上很好地解决了如何对任意集合定义测度的问题。那么对于无界集合，则需要其和任意有界方体的交集是可测集即可。但是按照上述方案定义测度将导致测度性质讨论的十分繁琐。

在勒贝格之后，人们也没有停止对测度理论的研究。希腊裔数学家卡拉泰奥多里开创了测度扩张的方法。卡拉泰奥多里的理论舍弃了勒贝格方案中内填外包的方法，保留了外测度的概念，并将外测度扩张成集合的测度。这种方案和勒贝格方案相比，测度的定义无需分集合是有界以及无界的情况来处理，以上方案也是实变函数课程中处理勒贝格测度的主流方法。从若尔当开始到卡拉泰奥多里这半个多世纪的时间里，测度理论得到了飞速的发展，到现代依旧没有停止对测度的研究与推广工作，但这已经超出了实变函数课程的范围。以上勒贝格测度理论背景的介绍是数学课堂趣味性引入的基本素材。

3.2. 问题导向教学的实现

问题导向教学的实现在于合理问题的提出以及教师的适当引导。在教学过程中，教学过程均围绕如下问题逐步展开，同时教师引导以及学生的分组讨论需并重。具体过程如下：

- “勒贝格定义测度的想法繁琐在何处？”是在介绍完勒贝格测度理论背景后首要提出的问题。此问题设计的目的在于，引导学生发现利用外测度和内测度相等的方案定义测度的不足。从让学生设想如何利用外包内填法测量一块广阔无垠、一眼看不到头的田野这样的实际例子出发，引导学生发现：勒贝格定义测度的方案的繁琐之处在于需要对有界集以及无界集分开讨论。
- “满足需要的测度需要具有怎样的性质？”是之后教师再提出的问题。通过让学生观察线段的长度，正方形的面积以及长方体的体积，让学生自己分组讨论这些“长度”与“面积”的概念都具有哪些共性，从具体的现象中抽象出共性出来。在分组讨论并允许学生充分表达自己的观点后，将观点汇总，由教师总结出勒贝格测度公理。
- 随后提出“可以将外测度作为测度？”的问题，引导学生再考察勒贝格的思想，探索只借助外测度是否能够满足勒贝格测度公理，研究外测度所具有的性质，并指出为什么外测度不能作为测度的原因。
- 最后，基于之前已经得到的外测度不能满足测度要求的事实，提出“如何让外测度扩张成测度？”的问题。这部分教师从勒贝格测度公理的可数可加性公理出发，让学生分组探讨如果一个测度需要满足可数可加性，需要具备怎样的条件。进而乘势引入卡拉泰奥多里条件，最终给出勒贝格可测的定义如下：

设 E 为 R^n 的点集，如果对任意点集 T 都有

$$m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c),$$

则集合 E 为勒贝格可测，$m^*(E)$ 为集合的勒贝格测度。

总体而言，勒贝格测度这一章的教学内容主要围绕上述五个问题出发，在提出问题的同时，通过分组讨论的方式，引导学生更深入理解勒贝格测度的定义。

3.3. 实例讲解

例：试证明集合 E 可测的充分必要条件是对于任意 $A\subset E$ 以及 $B\subset E^c$，总有

$$m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B).$$

证明：必要性：将任意集合 T 取成 $T=A\cup B$，则 $T\cap E=A,\ T\cap E^c=B$，由可测定义可知

$$m^*(A\cup B)=m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)=m^*(A)+m^*(B).$$

充分性：对任意集合 T，可令 $A=T\cap E, B=T\cap E^c$，则 $A\subset E,\ B\subset E^c$，且 $A\cup B=T$，于是

$$m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c),$$

即集合可测。

通过上述例题的讲解，让学生能够明白在可测定义中的集合 T 的选取是任意的，所以可以为了达成证明目的，任意取定集合的形式。同时上述例题的结论也是勒贝格测度的重要结论以及工具，利用上述结论在后续可证明勒贝格测度可数可加性。

4. 教学评价与分析

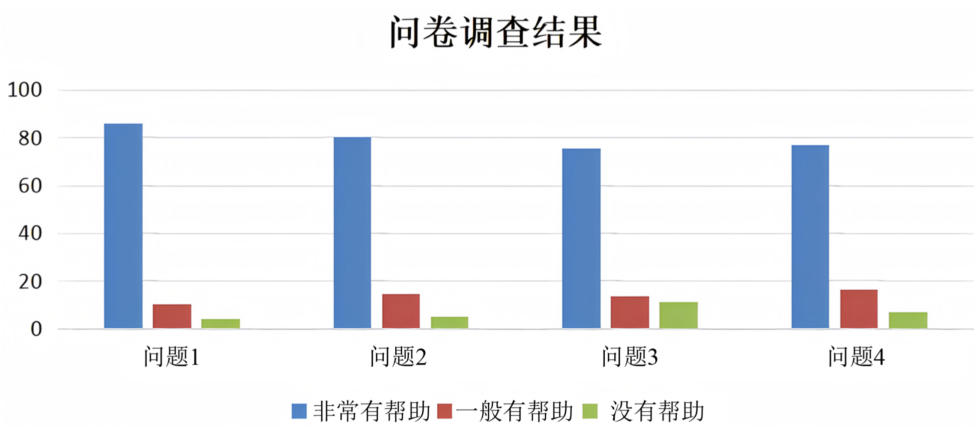

Figure 1. Statistical results of questionnaire survey
图 1. 问卷调查统计结果

在近些年实变函数教学实践的基础上，作者通过课堂观察、随堂口试以及课后问卷调查的方式，对问题导向教学效果评估。调研对象为作者所带班级一共 91 名学生。在教学过程中，通过学生的自由分组将所有学生分为 8 组，并通过课堂观察发现，虽然每个小组中会有学生不积极参与问题的讨论与回答，人数大致在 1 到 2 名学生不等，但总体而言 8 个小组均能正常完成讨论以及课堂教学任务。随后在课堂结束前的 20 分钟内，随机从 8 个小组中随机抽取一名学生回答勒贝格测度的定义。结果有 2 名学生只能不完整地给出勒贝格测度的定义，而其余学生均能给出完整的勒贝格测度的定义，完整回答的学生人数

占抽样总体的 75%。可以看出掌握勒贝格测度概念的学生还是占大多数。课后，针对所有上课学生分发如下问卷收集数据：

(1) 您认为本次课的教学方法是否能帮助您对实变函数课程学习的积极性？

(2) 问题导向教学法是否对您掌握课堂概念有所帮助？

(3) 您认为问题导向教学法能否帮助您发展思维？

(4) 与传统教学方法相比，问题导向教学法是否有助于提升“教”与“学”的效果？

最终收集数据见图 1。从图 1 中问题 1 以及问题 2 收集得到数据可以发现，学生对于问题导向教学法能够促进课程学习的积极性以及帮助概念理解上有着一致的共识，但对于问题 3 以及问题 4，认为没有帮助的学生相较于前者占比更高，但认为有帮助的人数总体上还是更多。所以可以发现，应用问题导向教学法能有效提升学生对实变函数课程学习的积极性以及概念掌握程度。

5. 结语

本文以勒贝格测度的教学为例，研究将问题导向教学法融入到实变函数的课程教学中。总体而言教学过程分为如下三部分：在教学的开始介绍测度理论的背景，随后通过问题以及学生的分组讨论，讨论出测度的大致框架并由教师给出最终的测度的定义，最后通过例题巩固学生对勒贝格测度的理解。在整体教学方法中，主要侧重点在学生的分组讨论，教师的课堂讲授作为辅助，一步步引导学生学习知识内容。上述教学方法和传统方法相比，教学过程更具互动性，启发学生在学习的过程中思考而不是被动地接受知识。此种教学方法不仅锻炼了学生的批判性思维能力，同时提升了学生的数学素养，培养了学生的综合素质能力。

参考文献

[1] 刘斐. 论问题导向教学[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中师范大学, 2014.

[2] 孟华, 罗荣, 杨晓伟. 以问题为导向的复变函数教学与实践[J]. 大学数学, 2020, 36(3): 40-44.

[3] 王群. 高等数学教学中问题导向教学法的应用研究[J]. 现代职业教育, 2024(18): 153-156.

[4] 赵明仁, 李保臻. 论问题导向的教学设计[J]. 教育理论与实践, 2013, 33(23): 50-52.