

浅谈现代数学与中学数学的区别和联系

卢信羽

贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2025年4月25日; 录用日期: 2025年5月23日; 发布日期: 2025年5月30日

摘要

本文从现代数学视角出发, 深入剖析了现代数学与中学数学的区别及联系。详细阐述了现代数学对中学数学在解决难题、提供思路、加深概念理解及提升教学水平等方面的指导作用, 以及中学数学在现代数学命题背景和部分问题简化求解中的作用。同时, 提出了情境引入、问题驱动、合作探究等教学策略, 并结合利用向量证明平面几何定理、用概率统计解决实际身高估计问题等教学案例, 强调了将两者有机融合对深化教育改革、提升教学质量和培养学生数学素养的重要意义。

关键词

现代数学与中学数学, 区别和联系, 教学案例

Differences and Connections between Modern Mathematics and Secondary School Mathematics

Xinyu Lu

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Apr. 25th, 2025; accepted: May 23rd, 2025; published: May 30th, 2025

Abstract

This paper analyzes the differences and connections between modern mathematics and secondary school mathematics from a contemporary perspective. It elaborates on the guiding role of modern mathematics in solving complex problems, providing innovative approaches, deepening conceptual understanding, and improving teaching quality in secondary education. Additionally, it discusses

how secondary mathematics contributes to simplifying problem-solving processes and contextualizing modern mathematical propositions. Teaching strategies such as contextual introduction, problem-driven approaches, and collaborative inquiry are proposed. Through case studies—e.g., vector-based proofs of plane geometry theorems and applying probability and statistics to estimate real-world height distributions—the significance of integrating modern and secondary mathematics is emphasized for advancing educational reform, enhancing teaching effectiveness, and cultivating students' mathematical literacy.

Keywords

Modern Mathematics and Secondary School Mathematics, Differences and Connections, Teaching Cases

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

从现代数学的视角出发,运用其知识体系、思维模式与方法论对初等数学问题进行多元审视、剖析与解决,对当前教育改革具有深远的现实意义。作为中学数学教育工作者,不仅需要扎实掌握现代数学的理论基础,更应具备将高等数学与现代数学的思想方法融入中学教学实践的能力。若仅以初等数学的单一维度开展教学,许多数学问题的本质将难以被深入洞察,既不利于教师教学质量的提升,也会阻碍学生对数学本质的理解。正如克莱因所指出的,唯有依托超越初等数学的理论体系,方能真正把握初等数学的内在逻辑。要实现这一教学境界,首先需要明确现代数学与中学数学的本质区别及内在联系,通过构建两者的有机融合路径,为教育改革的深化与实施提供有力支撑。

2. 现代数学与中学数学区别

2.1. 研究对象的差异

初等数学聚焦于对规则几何图形与均匀有限过程中的常量的研究,所以将其称为常量数学;而现代数学则将研究范畴拓展至任意集合及其相互关系,构建了更为抽象和广泛的研究体系。例如,中学数学中的几何图形(如三角形、圆)是具体且直观的,而现代数学中的拓扑空间、流形等概念则是对几何对象的抽象化表达。

2.2. 思维体系与研究方法的差异

中学数学教育着重培育具有广泛普适性的核心数学思维方法,如符号化思维、化归转化思想、数学相结合思想等;而现代数学则以集合论作为理论根基,借助公理化方法与数学结构视角展开系统性探究。例如,中学代数中的方程求解依赖具体算法,而现代代数通过群论和环论研究方程解的结构性质。

2.3. 数学语言的差异

中学数学主要使用符号语言与图形语言,而现代数学全面引入集合论与数理逻辑的符号系统(如逻辑连接词、量词),构建了更为精密的形式化语言[1]。例如,曲线的方程在中学用代数式表示,而在现代数学中则通过集合论严格定义为满足特定条件的点集。

3. 现代数学与中学数学的联系

3.1. 知识演进关联

现代数学的建构深深植根于初等数学的基础之上，例如初等代数中的代数式、方程、数系及函数等核心概念，在现代数学语境中被进一步抽象为集合与映射空间、群等更高阶的数学结构[2]。从知识演进的维度审视，现代数学的众多分支，其理论雏形往往萌发于初等数学的基础概念与经典问题之中，并在这些思想源泉的持续滋养下逐步发展壮大。许多现代数学领域的核心研究方向，正是从初等数学所探讨的基本原理和待解问题中获得灵感，进而通过深入的理论探索与方法创新，最终形成具有独立体系的学科分支。这种从基础到前沿的思想传承，不仅体现了数学发展的内在逻辑性，也揭示了初等数学作为现代数学基石的重要作用。

3.2. 思维范式演进关联

现代数学与中学数学的内在联系不仅体现在知识体系的递进性上，更反映在数学思维范式的演变中。从数学史的角度看，初等数学的经典问题往往是现代数学理论的萌芽。例如，欧几里得几何的公理化体系为现代数学的公理方法提供了原型；笛卡尔坐标系将几何问题代数化，直接催生了现代代数几何的诞生。这种联系机制可归纳为以下三方面：1) 知识结构的抽象化与一般化。初等数学中的具体概念(如数、方程、几何图形)通过抽象化升华为现代数学的普适性结构。例如，中学代数中的多项式运算在现代数学中被纳入环论框架，其性质(如可分解性)可通过环的理想理论进行系统性分析。这种抽象化不仅扩展了初等数学的适用范围，更揭示了其内在的数学本质。2) 问题驱动的理论创新。许多现代数学分支的诞生源于对初等数学问题的深化研究。例如，费马大定理的证明推动了代数数论的发展；三次方程求根公式的探索催生了伽罗瓦群论。这种“问题→理论→应用”的循环机制，体现了数学发展的内在动力。3) 思维方法的融合与迭代。初等数学强调直观思维与算法训练，如几何证明、方程求解，而现代数学则注重形式化推理与结构分析，如范畴论的同构思想。二者并非对立，而是思维层次的迭代：初等数学为形式化思维提供直观基础，现代数学则为直观问题赋予严谨逻辑。例如，中学几何中的“相似三角形”概念，通过线性代数中的线性变换理论，可进一步抽象为向量空间的同构映射。

4. 现代数学对中学数学的指导作用

4.1. 解决中学数学中未能完全解决或不能解决的问题

初等数学可视为现代数学的特殊情形，而现代数学则是初等数学的自然延伸与深化。在初等数学领域中，许多复杂难解的问题若能借助适当的现代数学知识加以解决，往往能迎刃而解。这是因为现代数学的众多分支源于初等数学问题的拓展与升华，其理论体系与方法论对初等数学问题的解决具有重要的指导价值，能够为初等数学提供更具普适性的解题思路与分析框架。例如求解一元 n 次方程的根，在中学对于一元一次、二次方程及简单有规律的一元三次方程有相应解法，但对于传统因式分解法失效的高次方程(如一元三次方程)，现代数学工具展现出独特优势。借助数值分析软件(如 MATLAB)的图象生成功能，可直观判定实根分布区间；进一步结合极限理论 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ 与代数基本定理(n 次方程存在 n 个复根)，为根的定位提供双重理论验证[1]。

4.2. 为初等数学提供解题思路和指导

从高等数学观点来看某些中学数学问题，能为其提供解题思路。例如将多项式 $f(x) = 7x^3 - 4x^2 + 2x + 3$ 改写成关于 $x-1$ 的多项式，由泰勒公式展开可得

$f(x) = f(1) + f^{(1)}(1)(x-1) + \frac{f^{(1)}(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{f^{(1)}(1)(x-1)^3}{3!} = 8 + 15(x-1) + 17(x-1)^2 + 7(x-1)^3$, 可知原式必定可以改写成 $f(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$ 的形式, 由此可得初等解法, 先设 $f(x)$ 的展开式, 再通过比较系数求解。我们是先由泰勒公式的展开得到该题目展开后的形式, 再利用其展开式对该题目先设, 再求解, 逐步得到最终结果。用它来预测答案, 确定初等解法的思路, 为初等数学解法提供理论依据和方法[3]。

4.3. 加深对初等数学中概念、理论实质及其背景的理解

从现代数学的观点去审视、剖析初等数学中的具体概念和问题能够揭示初等数学的概念和问题的本质特征。比如, 中学平面几何和立体几何中一些基本几何图形, 如线段、圆、球等, 都是作为一个整体图形来看的。从它们传统的定义中, 很难明确指出它们的各个部分究竟是什么, 以致一些中学生分不清线段 AB 和它的长度 $|AB|$, 圆与圆周, 球和球面等。如果用集合论的方法和语言来表述这些图形, 把它们看作是满足某些条件的点的集合就会弄清楚这些图形究竟包括哪些点。例如, 以 O 点为圆心、以 r 为半径的圆, 是集合 $\odot(O, r) = \{P \mid |OP| \leq r\}$, 然而这个圆的圆周是集合 $\{P \mid |OP| = r\}$ 。这样, 就把圆和圆周这两个概念严格区分开来了。从集合论视角审视曲线与方程的对应关系, 本质上是运用现代数学的观点对两个集合间的等价关系进行解析, 利于学生掌握数学基本思想, 对学生学习曲线与方程有很大的帮助[4]。

4.4. 现代数学思想融入中学数学, 提高教学水平

以数列通项公式教学为例, 数列 $\{a_n\}: a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, 其实质是定义正整数集(或自然数集)上的实值函数 $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ (或 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$)。对于给定数列的前几项求通项公式, 从现代数学角度看, 对于任意给定的 k 个实数值 $a_1, a_2, \dots, a_k$, 都存在通项公式 $f(n)$, 且通项公式不唯一。这就要求教师以高观点来理解和看待中学数学问题, 将现代数学思想渗透到中学数学的数列教学中, 从而提高教学的质量和教学水平。

5. 中学数学在现代数学中的作用

5.1. 以现代数学为命题背景

近年来, 随着新课程的实施和高考命题制度的改革, 全国很多地方高考命题中都渗透了高观点思想——“高观点”题型, 以高等数学和现代数学中重要的概念、定理或公式为命题背景[5]。例: (2020 新高考 I 卷 21) 已知 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$ 。1) 当 $a = e$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形面积; 2) 若 $f(x) \geq 1$, 求 a 的取值范围。在这道试题中, 第(2)问的背景是对两个特殊的函数 e^x 与 $\ln x$ 的泰勒展开的变形, e^x 与 $\ln x$ 这两个函数的泰勒展开式如下:

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$, e^x 与 $\ln x$ 这两个函数根据泰勒展开式可得 $e^x \geq 1+x$ ($x=0$ 处取等), $\ln x \leq x-1$ ($x=1$ 处取等)。其中在 $e^x \geq 1+x$ 中将 x 替换成 $x-1$ 可得 $e^{x-1} \geq x$, 在不等式 $\ln x \leq x-1$ 两边同时加上 1 可得 $\ln x + 1 < x$ 。综上可得 $\ln x + 1 \leq x \leq e^{x-1}$, 将含有 x 的式子放在不等式的一侧可得 $e^{x-1} - \ln x \geq 1$, 最后在 e^{x-1} 前添加参数 a 以及在式子的整体添加 $\ln a$ 这一项, 从而设计出一个求解参数 a 的取值范围的问题。第(2)问的背景是对两个特殊的函数 e^x 与 $\ln x$ 的泰勒展开的变形, 通过对函数泰勒展开式的变换设计出求解参数 a 取值范围的问题。

5.2. 现代数学初等化

有些高等数学中的知识用现代数学的方法求解过程比较复杂, 但是若用初等数学的解法反而简单。例: 计算定积分 $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx$ ($a < b$)。这个定积分可以用欧拉变换的方法来解决, 但计算过程相当

繁杂。是否有简便的方法可分析定积分的含义与平面图形间的关系呢?考虑到被积函数 $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ 是 $(x-a)$ 与 $(b-x)$ 的比例中项,使我们联想设 MN 是半圆的直径, $QP \perp MN$, 则 $QP = \sqrt{MP \cdot PN}$, 图中只需设 $MP = x-a$, $PN = b-x$, 因此得到以下解法(见图 1): 设 A 、 B 为横轴上的两点, 其坐标分别为 $(a,0)$ 及 $(b,0)$, R 为线段 AB 的动点, 其坐标为 $(x,0)$ ($a < x < b$), 则 $IAI = x-a$, $IRI = b-x$, 以 AB 为直径作半圆, 过点作 $RT \perp X$ 轴交半圆于 T , 则 $IRT = \sqrt{(a-x)(b-x)}$, 可见当 R 从点 A 移动到点 B 时, 动点 T 的轨迹就是一个半圆曲线, 根据定积分的几何意义, 可知所求的积分值就是半圆的面积, 即

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx = \frac{\pi}{2} \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 = \frac{\pi(b-a)^2}{8},$$

用欧拉变换的方法来解决计算过程相当繁杂, 而考虑到被积函数与平面图形的关系, 通过设点坐标, 利用定积分的几何意义, 可知所求积分值就是半圆的面积, 简化了计算过程[6]。

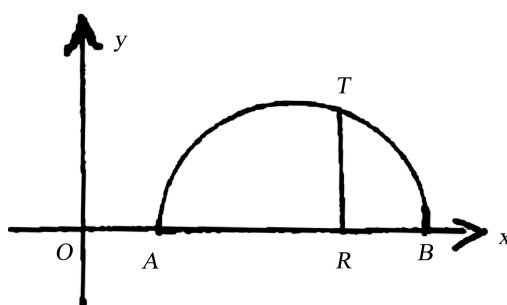


Figure 1. Visual explanation of definite integral

图 1. 图解定积分

6. 教学策略与案例

6.1. 教学策略

6.1.1. 情境引入策略

在课堂教学中, 教师可以创设与现代数学概念相关的生活情境或数学历史情境, 引发学生的学习兴趣 and 好奇心。例如, 在讲解函数概念时, 可以引入人口增长模型、经济增长曲线等实际问题, 让学生感受到函数在描述变量关系中的重要性。同时, 介绍函数概念的发展历史, 从早期对具体数量关系的研究到现代集合论视角下的函数定义, 让学生了解数学概念的演变过程, 体会现代数学概念的优越性。

6.1.2. 问题驱动策略

设计一系列具有启发性和层次性的问题, 引导学生主动思考和探索。以数列通项公式的教学为例, 教师可以先给出一些简单数列的前几项, 让学生尝试找出规律并写出通项公式。然后提出问题: “是否任意给定几个数都能确定一个数列的通项公式?” “如果能, 通项公式是否唯一?” 这些问题激发学生的求知欲, 促使他们深入思考数列的本质。在学生思考过程中, 教师适时引入现代数学中的多项式插值法等知识, 帮助学生理解数列通项公式的多样性和一般性。

6.1.3. 合作探究策略

组织学生进行小组合作探究活动, 鼓励学生在交流和讨论中共同探索现代数学思想在中学数学问题中的应用。例如, 在学习立体几何时, 让学生分组探究如何用向量方法解决空间角和距离问题。每个小组通过讨论、尝试和实践, 总结向量方法与传统几何方法的优缺点, 培养学生的合作能力和创新思维。教师在小组活动中起到引导和答疑的作用, 帮助学生更好地掌握现代数学方法。

6.2. 教学案例

6.2.1. 利用向量方法解决平面几何问题

教学内容为在平面几何中证明三角形三条高线交于一点(垂心定理)。教学过程首先回顾传统的平面几何证明方法,让学生了解其证明思路和难点。然后引入向量方法,建立平面直角坐标系,将三角形的顶点用坐标表示,进而表示出向量。设三角形 ABC 的三个顶点坐标分别为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, 则向量 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$, $\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1, y_3-y_1)$ 。设 H 为垂心, 向量 $\overrightarrow{AH}=(x-x_1, y-y_1)$ 。根据向量垂直的性质, 若 $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, 则 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, 通过计算得到关于 x 和 y 的方程。同理, 由 $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ 也可得到一个方程。联立这两个方程求解, 若能得到唯一解, 则证明三条高线交于一点。在学生理解向量方法的证明过程后, 组织学生进行讨论, 比较传统方法和向量方法的优缺点。教学反思表明通过这个案例, 学生不仅掌握了用向量方法证明平面几何问题的技巧, 还深刻体会到向量作为一种工具, 将几何问题转化为代数运算, 使得证明过程更加简洁明了。在教学过程中, 部分学生对向量的运算和坐标表示不够熟练, 需要在后续教学中加强练习。同时, 学生对两种证明方法的比较和思考, 培养了他们的批判性思维 and 创新能力。

6.2.2. 用概率统计思想解决实际问题

教学内容是在统计与概率的教学中, 让学生调查学校学生的身高情况, 并估计全校学生的平均身高。教学过程首先引导学生设计抽样方案, 确定样本容量和抽样方法。学生可以采用简单随机抽样、分层抽样等方法从全校学生中抽取一定数量的样本。然后, 收集样本数据, 记录每个学生的身高。接下来, 运用概率统计知识, 计算样本的平均数、方差等统计量。以样本平均数作为全校学生平均身高的估计值, 并通过计算样本方差来衡量估计的准确性。在这个过程中, 引入大数定律和中心极限定理的概念, 让学生了解随着样本容量的增大, 样本统计量会趋近于总体参数。最后, 让学生思考如何提高估计的准确性, 如增加样本容量、改进抽样方法等。教学反思指出通过这个实际问题的解决, 学生将概率统计知识应用于实践, 提高了数据分析和处理能力。在教学过程中, 学生对抽样方法的选择和统计量的计算理解较好, 但对大数定律和中心极限定理的理解存在一定困难, 需要结合实际案例进行更深入的讲解。此外, 学生在讨论如何提高估计准确性时, 提出了很多有创意的想法, 培养了他们的实践能力和创新精神。

7. 结论

现代数学与中学数学紧密相连, 两者在研究对象、思维体系、数学语言等方面存在差异, 但在知识演进和思维范式上又具有内在联系。现代数学对中学数学教学具有多方面的指导价值, 能够助力解决中学数学中的复杂问题, 为解题提供新思路, 加深学生对数学概念的理解, 提升教学水平。而中学数学也在现代数学的命题和问题简化处理中发挥着独特作用。在教学实践中, 通过有效的教学策略, 如情境引入、问题驱动、合作探究等, 将现代数学与中学数学有机结合, 能够显著提高学生的数学学习效果, 培养学生的创新思维、批判性思维 and 实践能力。因此, 中学数学教育工作者应重视现代数学与中学数学的融合, 不断提升自身专业素养, 以更好地推动数学教育改革, 为学生的未来发展奠定坚实基础。

参考文献

- [1] 资雪梅. 从现代数学的观点来看中学数学的数列教学[J]. 数学学习与研究, 2019(13): 115.
- [2] 周玛莉, 张劲松. 高观点的数学思想对中学数学教学的启示[J]. 中学数学月刊, 2014(3): 7-10.
- [3] 熊春茂. 浅谈用现代数学观点对初等数学学习和研究的指导作用[J]. 抚州师专学报, 2002(2): 94-97.
- [4] 李军. 现代数学观点下的曲线和方程——从集合的角度认识曲线和方程的对应关系[J]. 运城学院学报, 2003(5): 94-95.
- [5] 李云杰. “高观点”下的中学数学的实践与认识[D]: [硕士学位论文]. 福州: 福建师范大学, 2005.
- [6] 廖秋根. 数学教学中应注重初等数学与现代数学的沟通运用[J]. 新余高专学报, 2000(2): 7-10.