

问题驱动教学法在《复变函数》课程教学中的应用研究

孙桂荣

苏州科技大学数学科学学院, 江苏 苏州

收稿日期: 2025年4月15日; 录用日期: 2025年5月16日; 发布日期: 2025年5月22日

摘要

本文基于一流课程应具备的两性一度的特点和要求, 在《复变函数》课程教学中, 实施了问题驱动教学法, 通过构建恰当的启发性问题, 引导学生理解复变函数中相关概念的生成过程、方法和定理的发现过程, 提高学生的学习兴趣和理解深度, 促进其数学思维能力的培养。为《复变函数》课程的教学改革提供新的思路和实践参考。

关键词

问题驱动, 复变函数, 教学研究

Research on the Application of Problem-Driven Teaching Method in the Course of "Complex Functions"

Guirong Sun

School of Mathematical Sciences, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu

Received: Apr. 15th, 2025; accepted: May 16th, 2025; published: May 22nd, 2025

Abstract

Considering the characteristics and requirements that first-class courses should possess in terms of gender balance and academic rigor, the author implemented a problem-driven teaching approach in the course "Complex Functions." By constructing appropriate heuristic questions, the author guided students to understand the generation process of related concepts and the discovery process

of methods and theorems in complex functions. This approach enhanced students' learning interest and depth of understanding, promoting the cultivation of their mathematical thinking abilities. This provides new ideas and practical references for the teaching reform of the Complex Functions course.

Keywords

Problem-Driven, Complex Functions, Teaching Research

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《复变函数》是数学专业的重要基础课程，也是数学分析的后继课程。本课程用分析、几何、代数等方法研究解析函数的有关问题，已经形成了十分丰富、系统、完美、和谐的理论体系，其理论和方法已经渗入到纯粹数学和应用数学的各个分支，同时在流体力学、空气动力学、电磁学、电工及通讯等方面都有着极其重要的应用。然而，常见的教材中都比较注重古典复变函数理论体系的建立，以系统性强、理论严谨、内容全面为特点，教材理论性强，注重定理的严格证明和推导，少见应用案例和科学前沿问题。张奠宙在赖登塔尔数学教育理论基础上提出，“数学教师的任务，就是把它们重新颠倒过来，使它们以学生容易接受的教育形态呈现出来，即将冰冷的美丽变成火热的思考” [1]。

如何在课堂教学中既让学生掌握基础理论和基本方法，又能培养学生的创新意识且激发学生科研潜力是高等教育工作者和高校课程建设的教师需要深入思考的问题 [2]。问题驱动教学方法 (Problem-Based Learning, PBL) 作为一种以学生为中心的教学策略，强调学生通过探索和解决现实世界问题来积极学习 [3]。问题驱动教学方法有助于培养学生的批判性思维、问题解决能力和团队合作能力 [4]。基于问题驱动理论，运用好的问题能够让学生明白概念的生成过程、方法的发现过程、定理的获得过程 [5]。本文旨在探讨问题驱动教学法在复变函数教学中的应用，为《复变函数》课程的教学改革提供新的思路和实践参考。

2. 问题驱动教学法的研究现状和理论基础

问题驱动教学法早在 1969 年由美国神经病学教授 Barrows 提出，在医学领域得到了很好的应用。当前，问题驱动教学法作为一种创新性教育模式在世界范围内得到越来越多的重视和发展，其适用和普及延伸到了教育学、经济学、管理学和不同的自然科学学科领域 [6]。我国教育领域引入问题驱动教学法及与之相适应的问题驱动教学法的研究是从 20 世纪末逐渐展开。笔者以“问题驱动教学法”为主题对中国期刊网全文数据库进行检索，通过分析发现，2004 年以来对 PBL 教学法的研究越来越受到人们关注 (如图 1)，但这些研究主要集中在医学教育领域，我们以“数学”为主题在结果中进行检索，发现数学学科教学研究成果很少，自 2008 年开始，只有 60 篇 (如图 2)。由此可见，问题驱动教学法在数学学科教学中的应用研究具有重要的理论价值和实践意义。

以皮亚杰、维果斯基等为代表人物的建构主义将学习视为主动的、情境化的、社会性的意义建构过程，其核心观点是：以学生为中心，强调学生对知识的主动探索、主动发现和对所学知识意义的主动建构 (而不是像传统教学那样，只是把知识从教师头脑中传送到学生的笔记本上)。建构主义理论革命性地颠覆了“知识传递”的传统教育观，为现代学生中心的教学法 (如问题驱动教学法、翻转课堂) 奠定了理论基础。

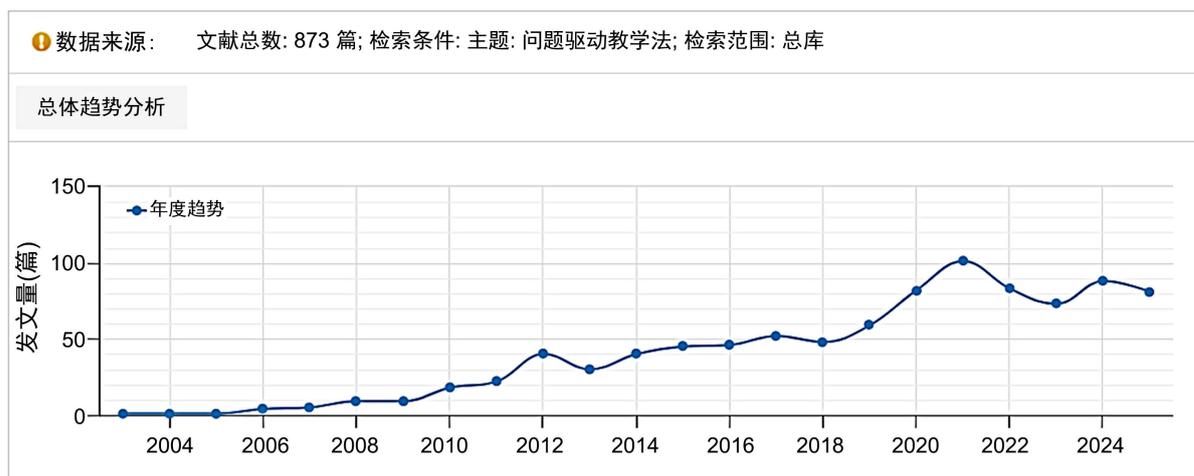


Figure 1. Research findings on problem-driven teaching methodology from 2004 to 2025

图 1. 2004~2025 年问题驱动教学法研究成果情况



Figure 2. Research outcomes of problem-based teaching methods in mathematics education from 2008 to 2025

图 2. 2008~2025 年问题驱动教学法在数学教学中的应用研究成果情况

问题驱动教学法的本质是通过真实问题激发学生主动学习, 将知识获取、能力培养和社会性发展融为一体。其核心内涵是通过真实、复杂的问题情境, 激发学生主动探索、合作学习和知识建构, 最终培养其批判性思维、问题解决能力和终身学习能力, 这与数学专业复变函数课程的教学目标高度吻合。复变函数兼具理论深度(如解析函数的性质)与应用广度(如电磁学中的复势), 适合通过问题整合理论与应用; 传统教学中, 学生易陷入形式化计算(如求导、积分)而忽视几何直观(如映射的保角性), 通过可视化问题(如“复幂函数如何扭曲区域”)能够强理解; 复变函数的抽象性(如黎曼面)适合通过问题驱动培养数学建模与批判性思维, 培养高阶能力。所以问题驱动教学法在复变函数课程教学中具有很好的适用性。

3. 问题驱动教学法在《复变函数》课程中的应用

问题驱动教学法强调通过提出和解决问题来促进学生的主动学习和深入理解。其主要特点是以问题为导向, 以学生为中心, 学生是学习的主体, 教师作为引导者, 在学生遇到困难时提供指导, 帮助学生理清思路, 确保学习方向正确, 帮助学生通过解决问题掌握知识, 培养自主学习能力。问题驱动教学法

的主要步骤包括：① 问题设计；② 探究式学习；③ 多维度评价；④ 反思与总结。下面以复变函数课程教学为例对4个步骤展开说明。

(1) 问题设计

问题设计通常包括：基础性问题，帮助学生理解基本概念和定理；综合性问题，结合多个知识点，培养学生综合运用能力；应用性问题，结合实际应用，如物理、工程等，增强学生对理论的理解。比如，柯西积分公式的教学时，可以引导学生思考积分 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$ 的值是多少？与 z_0 的位置有没有关系？通过

考虑 z_0 在 C 外、 C 上和 C 内3种情形，培养学生养成分类讨论的习惯，并针对 z_0 在 C 内这种一般情况进行研究，利用闭路变形原理化一般为特殊，引导学生推导出积分公式。在“利用留数定理计算实积分”

内容部分，问题背景是在工程和物理中，某些实积分难以直接计算，但可以通过复变函数中的留数定理将其转化为复平面上的积分问题，从而简化计算。可以设计以下问题：计算实积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ 。这个积

分用实积分法也能求解，但比较麻烦，是否可以用留数定理来计算，关键是能否将这个广义积分转化为闭曲线上的复积分。引导学生考虑柯西主值，并通过添加辅助线的方法构造闭曲线上的积分，找出

$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ 在上半平面的极点，并计算留数，利用留数定理计算复积分，从而得到实积分的值。为提高学生的学习兴趣，最后还可以通过数值方法或软件验证计算结果，比较异同，深化理解。

(2) 探究式学习

探究式学习是指学生通过查阅资料、讨论和实验等方式自主探究问题的解决方案，培养独立思考和解决问题的能力。如研究调和函数的性质时，可以设计探究性课题“如何将解析函数的优良性质‘移植’到调和函数上？”(关联柯西-黎曼方程、调和函数定义、泊松公式等核心内容)。教师引导问题：回顾解析函数的性质(如无穷可微、柯西积分公式、平均值性质、最大模原理)，解析函数的虚部是实部的共轭调和函数，一个调和函数在不计常数的情况下唯一确定一个解析函数，这些性质是否适用于调和函数？然后引导学生通过“具体计算→可视化验证→理论对比→反例反思”的流程，让学生在探究中自然理解两类函数的异同，避免抽象理论的直接灌输。案例设计意图：① 知识衔接：通过具体计算和可视化，直观理解解析函数与调和函数的联系。② 能力培养：从特殊到一般的数学推广能力；通过反例构建批判性思维。

③ 学科交叉：调和函数在物理(如热传导方程)中的应用启发。

(3) 多维度评价

教学评价不仅要关注结果，还要注重过程，包括问题分析、解决思路和合作表现等。比如上述探究性学习案例中，可设如下评估标准：数学推导正确性(40%)；实验设计的合理性(30%)；结论的深度与反思(30%)。

(4) 反思与总结

问题解决后，可以组织学生进行反思和总结，巩固知识并提升解决问题的能力。

4. 基于问题驱动的教学案例

下面以复积分的概念和最大模原理的教学为例，分别阐述以实际问题 and 学科前沿问题为导向的问题驱动教学法在《复变函数》课程教学中的具体应用。在实施问题驱动教学法时，我们需要设计具体的教学流程。首先，教师提出一个与教学内容相关的实际问题或前沿问题，激发学生的好奇心和探索欲望。然后，引导学生分析问题，提出假设和解决方案。在这个过程中，教师适时引入必要的理论知识和计算方法，帮助学生完善解决方案。最后，组织学生讨论和总结，深化对教学内容的理解。

案例一：以实际问题为背景的教学设计案例——以复积分的概念为例

1. 学情分析

学生通过《数学分析》的学习，已经掌握了实函数的定积分、重积分、曲线积分和曲面积分的内涵和性质。

2. 教学目标

(1) 了解复积分定义，熟练掌握复积分的基本性质；

(2) 掌握复积分的一般计算方法。

(3) 学会运用类比的数学思想，从已有的知识点出发，发现新问题，构造新的知识体系，激励学生能积极探索新的知识领域。

3. 教学过程

(1) 学习通布置复习、预习任务

课前在学习通发布预习课件，帮助学生了解“通量”和“环量”的物理意义，并会从数学的角度描述通量与环量，即用第二类曲线积分表示通量和环量。同时给学生布置两个学习任务：1°复习第二类曲线积分的计算方法；2°利用参数方程法化简曲线积分： $\int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy$

(2) 问题提出：

在同一个速度场 $\mathbf{A}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ 中，

$$\text{通量 } \Phi = \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds = \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy,$$

$$\text{环量 } \Gamma = \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{l} ds = \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy,$$

其中 \mathbf{n} 和 \mathbf{l} 分别表示曲线 C 的法向量和方向向量。我们知道，一个场量就对应一个复变函数，能否用复变函数的积分来统一描述通量和环量呢？

(3) 理论基础——复积分的概念和存在条件

问题 2：你能类比实积分概念的内涵，给出复变函数在有向曲线上积分的定义吗？

引导学生回顾定积分、二重积分、曲线积分、曲面积分的定义方法，找出他们的共同点，然后推广到复数域，给出复积分的定义。

问题 3：当被积函数满足什么条件时复积分一定存在？这样定义的复积分与我们问题背景中需要的复积分是一致的吗？

根据复积分的定义，将复积分转化为熟悉的第二类曲线积分，利用第二类曲线积分存在的条件即可得到复积分存在定理，即

定理 若函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 沿曲线 C 连续时，则函数 $f(z)$ 沿曲线 C 可积，即积分 $\int_C f(z) dz$ 存在，且有

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy.$$

注：从上面复积分的定义及存在条件的发现过程我们不难看出实变函数积分和复积分的区别和联系，所以我们要善于运用类比的数学思想，学会从已有的知识点出发，构造新的知识体系，积极探索新的知识领域，为实现中华民族伟大复兴中国梦这一目标而努力奋斗。

通过学习通上学生预先化简的积分公式，得到复积分计算的一般方法——参数方程法：

设有光滑曲线 $C: z = z(t) = x(t) + iy(t) (t: a \rightarrow \beta)$ ，参数 α 及 β 对应于起点 A 及终点 B 。如果函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 沿曲线 C 连续，则

$$\int_C f(z) dz = \int_a^\beta f[z(t)] z'(t) dt.$$

例 1 计算积分 $\int_C \operatorname{Re} z dz$ ，其中 C 为抛物线 $y = x^2$ 上从原点 O 到点 $1+i$ 的弧段

例 2 一个重要积分

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n=0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

其中 C 为以 z_0 为中心， r 为半径的正向圆周， n 为整数。(一般地， C 还可以是包围 a 的任一简单闭曲线。)

【设计意图】熟悉公式，会计算一般或特殊类型的复积分。

(4) 问题解决

记 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ，则其与场量 $\mathbf{A}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ 对应，由复积分的存在条件可知： $\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy = \Phi + i\Gamma$ 。即一个复积分是一个向量场的通量和环量的组合，一个无旋无源的场量对应的复积分为零。

案例二：以前沿问题为导向的教学设计案例——以最大模原理为例

1. 学情分析

学生完成了学科基础课程《数学分析》的学习，熟悉并掌握了实函数微积分的内涵和性质。另外，通过本课程前期的学习，学生对解析函数的微积分理论有一定的了解，并能够应用微积分理论和级数展开式研究解析函数的性质。

2. 教学目标

- (1) 充分理解并掌握解析函数最大模原理的内涵，并会用最大模原理研究解析函数的性质。
- (2) 理解并掌握整函数模的增长性特点，知道不同类型整函数的增长级的差异性。
- (3) 经历问题的探究过程，学会用数学的思维方式发现和研究未知问题，懂得如何拓展和创新，提升数学素养。

3. 教学过程

(1) 问题提出

我们知道，在整个 z 平面上解析的函数称为整函数，刘维尔定理告诉我们：有界整函数必为常数。如果一个整函数是无界的，它的增长性具有什么样的特征呢？

(2) 研究对象

人们为了描述函数的增长性，引进了函数增长级的概念，对于整函数的增长级，定义如下：

定义 假设 $f(z)$ 为整函数，定义 $f(z)$ 的级为

$$\sigma(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{\log \log M(r, f)}}{\log r}.$$

其中 $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ 。

问题 1：由刘维尔定理可知，如果一个整函数为常数，它的增长级一定是零；如果一个整函数为多项式，它的级为多少？更一般的整函数呢？

为此，我们需要首先了解关于 r 的实函数 $M(r, f)$ 的性质。

(3) 理论基础——解析函数的最大模定理

定理(最大模原理) 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则 $|f(z)|$ 在 D 内不能达到最大值，除非 $f(z)$ 在 D 内恒为常数。

分析：分三步走

第一步，采用反证法证明 $|f(z)|$ 在 D 内的某个小圆 K 上恒为常数；

第二步, 由第二章习题一 6(3)可得: $f(z)$ 在 D 圆 K 内为常数;

第三步, 由唯一性定理, $f(z)$ 在 D 内为常数。

推论 设 ① $f(z)$ 在区域 D 内解析, 在 $\bar{D} = D + C$ 上连续;

② $|f(z)| \leq M (z \in \bar{D})$ 。

则除 $f(z)$ 为常数情形外, $|f(z)| < M (z \in D)$ 。即如果 $f(z)$ 不为常数, $|f(z)|$ 的最大值只能在 D 的边界上达到。

注: 最大模原理是解析函数论中极有用的定理之一。最大模原理说明了解析函数在区域边界上的最大模可以限制区域内的最大模, 这也是解析函数特有的性质。由最大模原理, 我们可以得到解析函数的很多性质。

例 1 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内解析, 令 $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| (0 \leq r < R)$, 若存在 $r_1, r_2 (0 \leq r_1 < r_2 < R)$ 使得 $M(r_1) = M(r_2)$, 则 $f(z)$ 为常数。

注: 由例 1 知, 如果 $f(z)$ 是非常数的整函数, 则 $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ 是 $(0, +\infty)$ 上严格单调递增的函数。

例 2 假设 $f(z)$ 在闭圆 $|z| \leq R$ 上解析, 如果存在 $a > 0$, 使得当 $|z| = R$ 时, $|f(z)| > a$ 且 $|f(0)| < a$, 则在圆 $|z| < R$ 内 $f(z)$ 至少有一个零点。

问题 2: 解析函数可以由调和函数来确定, 那么数理方程中的调和函数是否有与解析函数类似的性质? 具体来说, 解析函数理论的柯西积分表达式、刘维尔定理和最大模原理等性质能否推广到调和函数?

例 3 假设 $u(x, y)$ 是区域 D 内的调和函数, 则 $u(x, y)$ 在 D 内达不到最大值除非 $u(x, y)$ 在 D 内恒为常数。

分析: 由调和函数与解析函数的关系知, 由 $u(x, y)$ 可以得到区域 D 内的解析函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 然后构造函数 $F(z) = e^{f(z)}$ 并对 $F(z)$ 运用最大模原理。

注: 这是调和函数的极值定理。其余问题请大家课后探究。

(4) 最大模原理在无界区域上的推广

对于无界区域, 最大模原理不一定成立。例如函数 $f(z) = \exp(e^z)$ 在 $D = \left\{ z \mid |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} \right\}$ 内解析, 在 D 的闭包 \bar{D} 上连续, 而且在 D 的边界 ∂D 上, $|f(z)| = 1$, 考虑 z 取正实数值的情形, 就可以看出 $f(z)$ 在 D 内无界。

要把最大模原理推广到无界区域情形, 需要对 $f(z)$ 在无穷远点邻域内的增长性加上一些条件。下面的弗拉格曼 - 林德勒夫定理就是其中的一种最为重要且著名的推广, 它是 L. E. 弗拉格曼和 E. L. 林德勒夫于 1908 年将最大模原理推广到无界域以及有界域的边界上函数连续性遭到破坏的情形得出的。

定理(弗拉格曼 - 林德勒夫定理) 设 G 是单连通区域, $f(z)$ 是 G 上的解析函数, 假设有一个解析函数 $\varphi: G \rightarrow C$, 满足处处非零且在 G 上有界。如果 M 是常数, 且 $\partial_\infty G = A \cup B$ 满足:

① $\forall a \in A, \limsup_{z \rightarrow a} |f(z)| \leq M$;

② $\forall b \in B, \eta > 0, \limsup_{z \rightarrow b} |f(z)| |\varphi(z)|^\eta \leq M$;

那么 $|f(z)| \leq M, \forall z \in G$ 。

该定理的证明前人早已给出, 在此不再重复。

(5) 研究结论

假设 $f(z)$ 为整函数, 定义 $f(z)$ 的级为

$$\sigma(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{\log \log M(r, f)}}{\log r}.$$

其中 $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ 。则

- ① 当 $f(z)$ 为常数时, $\sigma(f) = 0$;
- ② 当 $f(z)$ 为 n 阶多项式是, $\sigma(f) = n$;
- ③ 当 $f(z)$ 为超越整函数时, $\sigma(f) = \infty$ 。

进一步研究思路:

当 $f(z)$ 为超越整函数时, 我们还是无法通过它的级来判断它增长性的快慢, 这时可以考虑对 $M(r, f)$ 再取一次对数, 考虑 $f(z)$ 的超级; 另外, 亚纯函数的增长性也是一个研究方向, 还可以考虑函数在一个方向或一个角形区域内的增长性, 这属于值分布的范畴, 我国数学家杨乐先生在这方面做了很多开创性的工作。

我们还可以考虑方程组解的增长性, 方程的解因为受到方程限制, 它们的增长性受到了方程系数的制约, 致使对线性方程解的讨论成为了一个独立的研究方向。

5. 问题驱动教学法的实施与效果分析

这些教学案例的设计都遵循了由浅入深、循序渐进的原则, 既考虑到学生的认知水平, 又体现了教学内容的核心思想。通过这些问题的解决, 学生能够逐步建立起对相关理论的深刻理解, 并掌握其应用方法。

案例一将实际问题融入课程教学, 通过真实问题情境的创设, 学生的学习兴趣明显提高, 课堂参与度大大增强。在解决实际问题的过程中, 学生对复积分概念的理解更加深入, 应用能力也得到了提升。同时, 这种教学方法也促进了学生数学思维能力的培养, 为他们后续的学习和研究打下了良好基础。

案例二将教师科研和教学内容相结合, 通过对学科前沿研究与思考, 得到需要奠定的基础理论和研究问题, 然后从夯实基础的层面出发, 围绕解析函数最有用的定理之一——最大模原理展开讨论, 帮助学生了解最大模原理的内涵、应用及推广思路, 然后回到问题的出发点, 回答整函数增长性的特点和增长级的取值分析。通过案例教学, 学生们不仅掌握了最大模原理的基本理论及推广, 还培养了他们的数学思维和问题解决能力。

当然, 我们也意识到在教学过程中仍存在一些不足和需要改进的地方, 例如如何更好地将理论与实践相结合, 如何针对不同学生的学习特点进行差异化教学等。未来的研究可以进一步探索问题驱动教学法与其他现代教学方法的结合, 如翻转课堂、混合式学习等, 以进一步提高教学效果。同时, 还可以开发更多与实际问题相关的教学案例, 丰富教学资源, 为《复变函数》课程的教学改革提供更多支持。

6. 结论

基于问题驱动的《复变函数》课程教学研究, 特别是不同类型问题启发学生思考的教学实践, 证明了该方法的有效性和优越性。问题驱动教学法能够激发学生的学习兴趣, 提高其对抽象概念的理解能力, 培养数学思维和问题解决能力。这种教学方法不仅适用于这两部分内容的教学, 也可以推广到《复变函数》课程的其他内容, 乃至整个数学专业的教学中。

基金项目

资助信息: 苏州科技大学品牌课程建设项目。

参考文献

- [1] 张奠宙, 王振辉. 关于数学的学术形态和教育形态: “谈火热的思考”与“冰冷的美丽”[J]. 数学教育学, 2002, 11(2): 1-4.

-
- [2] 张国锋. 问题驱动的类比法、互动型、研究性教学模式——以电磁学课程建设为例[J]. 物理与工程, 2024, 34(4): 71-75.
- [3] Yew, E.H.J. and Goh, K. (2016) Problem-Based Learning: An Overview of Its Process and Impact on Learning. *Health Professions Education*, 2, 75-79. <https://doi.org/10.1016/j.hpe.2016.01.004>
- [4] 李波. 新工科背景下问题驱动法在计算机程序设计教学中的应用研究[J]. 高教学刊, 2024, 10(29): 120-123.
- [5] 江跃勇, 赵甫荣. 问题驱动下的二次型教学策略[J]. 绵阳师范学院学报, 2024, 43(11): 8-13.
- [6] 杜翔云, 钟秉林, Anette Kolmos. 以问题为基础的学习理念及其启示[J]. 中国高等教育, 2008(2): 20-24.