

融合BOPPPS模式下的常微分方程教学设计策略的实践

——以“ n 阶常系数齐次线性微分方程的解法”为例

谢启林, 陈智奇, 李 锋

广东工业大学数学与统计学院, 广东 广州

收稿日期: 2025年4月3日; 录用日期: 2025年5月2日; 发布日期: 2025年5月14日

摘 要

BOPPPS教学模式是20世纪70年代加拿大英属哥伦比亚省的教学技能工作坊(ISW)项目中的参与式教学模式。本文以《常微分方程》课程中“ n 阶常系数齐次线性微分方程的解法”为例, 基于BOPPPS教学模式, 实践下常微分方程课程教学设计的策略。将“以学生为中心、以实践为主体”的教学思想融入到常微分方程课程教学中, 有效地促进师生之间的互动, 提高学生的有效参与度和课程的教学质量。

关键词

BOPPPS教学模式, 常微分方程, 教学设计, 师生互动

Practice of Teaching Design Strategies for Ordinary Differential Equations under the Integrated BOPPPS Mode

—Taking the “Solution of n -Order Homogeneous Linear Differential Equations with Constant Coefficients” as an Example

Qilin Xie, Zhiqi Chen, Feng Li

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: Apr. 3rd, 2025; accepted: May 2nd, 2025; published: May 14th, 2025

Abstract

BOPPPS teaching mode is a participatory teaching mode in the Teaching Skills Workshop (ISW)

文章引用: 谢启林, 陈智奇, 李锋. 融合 BOPPPS 模式下的常微分方程教学设计策略的实践[J]. 教育进展, 2025, 15(5): 203-208. DOI: 10.12677/ae.2025.155742

project in British Columbia, Canada in the 1970s. This article takes the “Solution of n -Order Homogeneous Linear Differential Equations with Constant Coefficients” in the course of “Ordinary Differential Equations” as an example to discuss the teaching design strategy of ordinary differential equations under the BOPPPS teaching mode. Integrating the teaching philosophy of “student-centered and practice oriented” into the teaching of ordinary differential equations effectively promotes interaction between teachers and students, improves students’ effective participation, and enhances the teaching quality of the course.

Keywords

BOPPPS Teaching Mode, Ordinary Differential Equations, Instructional Design, Teacher Student Interaction

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 绪论

2022年3月28日，国家智慧教育平台正式上线。教育系统要以“应用为王，服务至上、简洁高效、安全运行”为总要求，坚定推进国家教育数字化战略行动。目前各行业需要许多具有良好数学基础、较强动手能力、宽广知识面的创新型应用人才。多元化的培养模式正在各个高校兴起，但是从目前发展现状看，还存在诸多的问题，主要表现为师资专业单一化与学生知识需求多元化之间难以匹配，难以实现“厚基础”与“宽口径”的平衡。作为各个学科的基础，数学无处不在已然成为共识，特别是在高科技的研发中，数学知识的发展和应用至关重要。

《常微分方程》是研究常微分方程求解的基本理论和基本方法的数学学科，是数学类本科生的专业基础必修课。对于将来从事数学类相关职业的学生而言，本课程帮助学生较清晰地认识常微分方程相关的核心概念的形成过程[1][2]。课程的教学过程中须始终把学生作为主体，始终贯彻为学而教，以教导学，以教促学的教学思想。教学过程中运用问题引导式教学、“探究-发现策略”合作学习等教学手段由浅入深，逐级递进地展开本节课的教学内容，培养学生对数学问题的进行综合和演绎的能力。采用问题驱动的教学方法，把问题放在每节课的核心位置，让每次课都解决1~2个真实问题，让学生养成从问题出发，始终带着问题意识来学习本课程。另一方面常微分方程是分析这一数学大类的主干课程，在强调逻辑推理能力的同时也特别强调数学直观能力。这一理念一直贯穿始终，让学生越学越有自信，不至于被畏难情绪阻碍学习的进度。除了线下课堂，学生可利用教育信息化手段在线学习。目前，中国大学MOOC平台常微分方程的课程有天津师范大学周立群等的《常微分方程》、浙江大学林智等的《常微分方程》，上海师范大学丁炜等的《常微分方程》等。这些课程主要采取讲授教学法、启发式教法等，培养学生掌握微分方程思想和方法。然而，线上课程始终无法代替和超越传统课堂教学，任课教师需要引导学生正确使用众多网络课程使其成为课堂教学的有力辅助。

2. BOPPPS 教学模式的概述

在教育教学手段和方式飞速发展的今天，如何与时俱进地注重培养学生的创造性和主动性是值得教师深入思考的问题。始终从学生已有的知识结构出发，力争让知识能够从已有的熟悉的知识中自然地生长出来，让学生充分浸润在知识的自然成长中，培养学生良好的数学直观能力，因此，要求教师也要适

应时代的发展,走在教育教学理念的前沿。为了改进传统的教学模式,强调以学生为中心,提高学生的兴趣,本文以“ n 阶常系数齐次线性微分方程的解法”为例,将 BOPPPS 教学模式应用到常微分方程课程设计中,更好地实现课堂有效教学。

BOPPPS 模式来源于 20 世纪 70 年代加拿大英属哥伦比亚省的教师教学技能工作坊(ISW)项目中的参与式教学模式。它通过导入(Bridge-in)引入新的知识,激发学生兴趣;明确学习目标(Outcomes),让学生清楚地知道他们应该掌握什么;进行前测(Pre-Assessment),了解学生的现有知识和理解程度;采用参与式学习(Participatory Learning)的方式,让学生以多种形式参与课堂;后测(Post-Assessment)检测学生是否达到学习目标并对知识进行延展;最后总结(Summary),巩固学习成果[3]。BOPPPS 教学模式是优秀的教学模式,既是教师用来进行教学设计的工具之一,也是老师们开展课前教学设计和课中组织课堂教学的一种有效方法。由于人的集中注意力之间大约为 15 分钟,所以它的基本概念是把课程内容分割为若干个阶段,每个阶段的用时大约为 15 分钟[4][5]。在文献[6]中,作者探讨了 BOPPPS 模式在中药药剂学课程中的应用效果,对比了其与传统教学模式在学生参与度和教学成效方面的差异。学生参与度高: BOPPPS 模式强调学生的主动参与和互动,通过问题和项目的设计,激发学生的学习兴趣 and 积极性,提高学生参与教学的热情,而传统教学模式往往以教师讲授为主,学生参与度相对较低。同时,教学反馈及时、注重知识应用;传统教学模式则更侧重于知识的传授,对知识的应用关注不够;教学结构清晰: BOPPPS 模式具有明确的六个教学环节,为教师设计教学活动提供了清晰的框架和思路,有助于教师更好地组织教学,提高教学效率。传统教学模式的教学结构相对较为松散,缺乏明确的环节划分和逻辑顺序。更多相关文献可以参考[7][8]。

3. 融入 BOPPPS 教学模式下的“ n 阶常系数齐次线性微分方程的解法”的教学设计

n 阶常系数齐次线性微分方程是微分方程理论中的基础内容;在物理、经济学、工程等领域,许多实际问题可以转化为 n 阶常系数齐次线性微分方程。例如,电路中的 RLC 串联电路、经济模型中的动态系统、机械振动系统等。这类方程具有明确的结构,即解可以表示为特征方程的根对应的指数函数的线性组合。这种结构使得解的形式清晰,便于分析和应用。因此本节知识的学习显得非常有必要。本节内容选自教材[1]第四章第二节,为概念引入课程。特征根法是求解高阶常系数线性微分方程的重要解法。本节内容主要讲述利用特征根法求解 n 阶常系数齐次线性微分方程。首先,基于二阶常系数线性微分方程解的特征,猜测二阶微分方程的解的结构为指数函数的形式,然后将其代入微分方程并化简,从而将复杂的难于求解的微分方程转化为简单的易于求解的代数方程,最后,根据特征根的不同类型来给出 n 阶常系数齐次线性微分方程的通解的表达式。

(一) 课程导入环节(Bridge-In)

在 BOPPPS 教学模式中,授课教师可以在该教学环节巧妙地引入实例,吸引学生的注意力,激发学习兴趣,从而建立与即将学习课程内容的联系。提问:试根据二阶常系数齐次线性微分方程的通解形式,推测 n 阶常系数齐次线性微分方程的解的结构?

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0$$

设计意图:启发学生猜测 $x = e^{\lambda t}$,可能是 n 阶常系数齐次线性微分方程的一个特解,其中 λ 为常数。在讨论一般形式的二阶常系数齐次微分方程

$$x'' + px' + qx = 0 \quad (1)$$

我们不妨引入如下的特例:

$$x'' = -x \quad (2)$$

其中 $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$, $x = x(t)$ 。引导学生猜测其解为正余弦三角函数, 激发学生兴趣。

(二) 学习目标环节(Outcome)

(1) 知识目标: 通过教师讲解, 学生能够求出二阶常系数齐次线性微分方程所对应的特征方程。通过教师的引导和学生的练习, 能根据不同特征根的类型写出二阶常系数齐次线性微分方程的通解。进而, 推广到 n 阶的常系数齐次线性微分方程。

(2) 能力目标: 学生通过积极的练习, 能够熟练掌握二阶常系数齐次线性微分方程的求解。通过教师分析特征方程的过程, 让学生能体会到碰到陌生问题时善于利用类比和转化的数学思想。

(3) 情感态度价值观: 在解决数学问题的过程中, 培养学生直面问题, 绝不轻言放弃意志品质, 同时让学生体会到一个问题可以从不同的视角来看, 问题之间是可以互相转化的, 培养学生的多元视角和灵活处理问题的思维习惯。

(三) 课前测试环节(Pre-Assessment)

让学生猜测并且验证方程(2)的解为 $x_1(t) = \sin t$, $x_2(t) = \cos t$, 了解学生对微分方程解这个概念的掌握情况。

(四) 参与式学习环节(Participatory Learning)

对于二阶微分方程(1), 写出对应的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$, 求解特征方程的解, 称之为特征根。引导学生猜测形式 $x_0(t) = e^{r_0 t}$ 为微分方程的解, 进而发现只有当 r_0 为特征根时, $x_0(t)$ 恰好为二阶微分方程的一个解。因而, 我们需要对特征根的情况进行分类, 两个不同的实根 r_1, r_2 , 重实根 $r_1 = r_2$, 和共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 三种情况。(a) 当两个不同的实根时, $x_1(t) = e^{r_1 t}$, $x_2(t) = e^{r_2 t}$ 恰好为二阶微分方程(1.1)两个线性无关的解。(b) 当重实根 $r_1 = r_2$ 时, 在已知 $x_1(t)$ 为一个解时, 通过验证发现 $x_2(t) = te^{r_1 t}$ 为另一个形式较为简单的解。(c) 当为共轭复根时, 需用欧拉公式将 $x_1(t) = e^{(\alpha + \beta i)t}$, $x_2(t) = e^{(\alpha - \beta i)t}$ 中虚单位 i 消去, 化为如下形式:

$$x_1(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad x_2(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$$

至此, 找到了两个线性无关的解。进而, 总结如下情况见如下表 1。

Table 1. Solution of second-order homogeneous linear differential equation with constant coefficients

表 1. 二阶常系数齐次线性微分方程解

特征根	通解中的对应项
单实根 r_1, r_2	$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$
2 重实根 $r_1 = r_2$	$x(t) = e^{r_1 t} (C_1 + C_2 t)$
一对单复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$x(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$

通过二阶常系数齐次线性微分方程类比出 n 阶常系数齐次线性微分方程的求法, 特别要注意理解特征方程的根含有重根的情形, 具体讨论如下: 将 $x = e^{\lambda t}$ 代入 n 阶常系数齐次线性微分方程得

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0,$$

$$F(\lambda) e^{\lambda t} = (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n) e^{\lambda t} = 0$$

由 $e^{\lambda t} \neq 0$ 得 $F(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ 这个代数方程称为特征方程。如何根据特征根的不同情况

讨论微分方程的解？启发学生从特征根均为单根和有重根，分两种情况讨论。

情形一：特征根均为单根，即 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是特征方程的 n 个相异的根。微分方程的解是什么？启发学生从特征根均为实根和有复根，分两种情况讨论。(a) 当特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 均为实根时， n 阶常系数齐次线性微分方程的通解为 $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$ 。(b) 当 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 特征根有复根时：微分方程的解是什么？启发学生思考若特征根有复根，则复根成对出现。不妨设为 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ ，则 $e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t$ 都是原方程的解，且二者线性无关。因此， n 阶常系数齐次线性微分方程的通解为

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t + C_3 e^{\lambda_3 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}。$$

情形二：特征根有重根：微分方程的解是什么？启发学生从特征根均为实根和有复根，分两种情况讨论。分析：(a) 当特征根均为实根时，不妨设特征方程有 k 重实根 λ ，可以知道 $x_1 = e^{\lambda t}$ 为 n 阶常系数齐次线性微分方程的解。在二阶常系数齐次线性微分方程的讨论过程中，得到 $x_2 = te^{\lambda t}$ 是与 $x_1 = e^{\lambda t}$ 线性无关的解。因此，类比推广到 n 阶常系数齐次线性微分方程，可得 $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}$ 。(b) 当特征根均为复根时，可以类似的讨论，设特征方程有 k 重复根 $\lambda = \alpha \pm \beta i$ ，则 n 阶常系数齐次线性微分方程解

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \sin \beta t。$$

总结为 n 阶常系数齐次线性微分方程一般形式：

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0，$$

则对应的特征方程： $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$ ，此时结论见如下表 2。

Table 2. The solutions of n -order homogeneous linear differential equations with constant coefficients

表 2. n 阶常系数齐次线性微分方程的解

特征根	通解中的对应项
单实根 λ	$x = C_1 e^{\lambda t}$
一对单复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$x = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$
k 重实根	$x = e^{\lambda t} (C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + \dots + C_k t^{k-1})$
一对 k 重复根	$x = e^{\alpha t} (C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + \dots + C_k t^{k-1}) \cos \beta t$ $+ (D_1 + D_2 t + D_3 t^2 + \dots + D_k t^{k-1}) \sin \beta t$

(五) 后测环节(Post-Assessment)——课堂练习及演板

例题 1：求微分方程 $x'' - 2x' + 5x = 0$ 的通解。(过程略)

学生可以用特征根法进行求解。为了巩固利用特征根法求解二阶微分方程，建议学生对于三种情况的特征根进行分别练习。同时，解决导入中微分方程(2)解的情况。

(六) 总结环节(Summary)

PPT 展示和板书是本次课的主要内容，强调大胆猜测，小心求证的数学思维的培养。教师也可以充分利用网络资源，在设计过程中，可以借助于多媒体，通过创设问题情境，引导学生主动积极思考，自主验证得出结果。知识点方面，引导学生根据特征根的不同类型来给出 n 阶常系数齐次线性微分方程的通解的表达式。这种教与学过程学生易于接受，教师也能更好地管理课堂，尽可能地达到自己预期的教学效果。

4. 结束

在导入环节中，由简单的例子入手引发学生思考二阶常系数齐次线性微分方程解的情况，激发学生

兴趣。再由学生猜测一般形式的 n 阶常系数齐次线性微分方程解与特征方程的关系, 最后通过验证特征根和解的关系得到结论, 从而培养学生严密的数学思维。综上本文基于 BOPPPS 教学模式, “以学生为中心、以实践为主体”的教学思想融入到常微分方程课程教学中, 通过在导入、目标、前测、参与式学习、后测和总结六个环节, 有效地促进师生之间的互动, 提高学生的有效参与度, 进而提高上课质量, 有助于提升学生的专业水平, 更能激发学生对所有必修课知识兴趣。

基金项目

2023、2024 年度广东省本科高校教学质量与教学改革工程建设项目, 2023 年度广东省本科高校数学教指委教改项目, 2023、2024 年度广东工业大学本科教学工程项目, 2024 年广东省研究生教育创新项目。

参考文献

- [1] 王高雄, 等. 常微分方程[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [2] 丁同仁, 李承治. 常微分方程教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [3] 何雨辰. OBE 理念下 BOPPPS 教学模式在“电路分析基础”课程教学中的探索与实践[J]. 黑龙江教育(理论与实践), 2024(2): 57-60.
- [4] 储亚伟, 叶薇薇, 王海坤. 基于 BOPPPS 模型下的高等数学微课教学设计——以“一阶非齐次线性微分方程的解法”为例[J]. 山东农业工程学院学报, 2016, 33(9): 153-156.
- [5] 张艳辉. 基于 BOPPPS 模式下的高等数学微课教学设计策略的探讨——以“一阶非齐次线性微分方程的解法”为例[J]. 科技风, 2021(1): 40-41.
- [6] 张雯, 谢辉, 狄留庆. BOPPPS 模式在中药药剂学课程教学中的应用[J]. 科教导刊, 2023(33): 82-85.
- [7] 汤丹, 李硕果, 陈磊, 等. 基于 BOPPPS 模型的双线混融教学模式探索与实践——以国家级一流本科课程“中药分析学”为例[J]. 创新教育研究, 2024, 12(11): 249-255. <https://doi.org/10.12677/ces.2024.1211793>
- [8] 叶慧. 融入 BOPPPS 理念的英语听说课混合式教学综述[J]. 科学咨询, 2020(50): 86.