

基于牟合方盖体积计算的教学思考

祁秋菊^{1,2}

¹内蒙古师范大学科学技术史研究院, 内蒙古 呼和浩特

²呼和浩特职业学院师范部, 内蒙古 呼和浩特

收稿日期: 2025年4月25日; 录用日期: 2025年5月23日; 发布日期: 2025年5月30日

摘要

数学概念的高度抽象性与逻辑结构的严密性, 常导致教学过程中出现“认知断层”现象, 而将数学史中相关数学思想的发展历程融入数学教学, 有助于学生攻克数学难题, 促进数学思想的深度理解与精准掌握。本文通过对牟合方盖体积的计算古今方法的研究, 系统阐述了牟合方盖的由来, 详细介绍了祖暅方法、定积分截面法及二重积分三种方法计算牟合方盖体积的过程。通过在课堂上实现数学思想的古今碰撞, 直观呈现应用截面法计算不规则立体体积思想的演进, 让学生了解数学思想的形成、发展, 深入洞悉数学知识背后蕴含的深邃思想, 从而提升学生的数学思维, 培养学生的创造性思想。

关键词

牟合方盖, 定积分, 二重积分

Teaching Reflections on the Calculation of the Volume of Mouhefanggai

Qiuju Qi^{1,2}

¹Institute for the History of Science and Technology, Inner Mongolia Normal University, Hohhot Inner Mongolia

²Normal Department of Hohhot Vocational College, Hohhot Inner Mongolia

Received: Apr. 25th, 2025; accepted: May 23rd, 2025; published: May 30th, 2025

Abstract

The high degree of abstraction of mathematical concepts and the rigor of their logical structure often lead to the phenomenon of “cognitive disconnection” in the teaching process. Integrating the development of relevant mathematical ideas from the history of mathematics into teaching can help students overcome mathematical difficulties and promote a deeper understanding and accurate mastery of mathematical ideas. This paper systematically elaborates on the origin of the Mouhefanggai

文章引用: 祁秋菊. 基于牟合方盖体积计算的教学思考[J]. 教育进展, 2025, 15(5): 1455-1461.

DOI: 10.12677/ae.2025.155924

by studying the ancient and modern methods for calculating its volume. It also provides a detailed introduction to the processes of calculating the volume of Mouhefanggai using Zu Geng's method, the cross-sectional method of definite integrals, and double integrals. By facilitating a collision of ancient and modern mathematical ideas in the classroom and intuitively presenting the evolution of the idea of using the cross-sectional method to calculate the volume of irregular solids, students can gain an understanding of the formation and development of mathematical ideas. They can also gain a deeper insight into the profound ideas behind mathematical knowledge, thereby enhancing their mathematical thinking and fostering their creative thinking.

Keywords

Mouhefanggai, Definite Integrals, Double Integrals

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

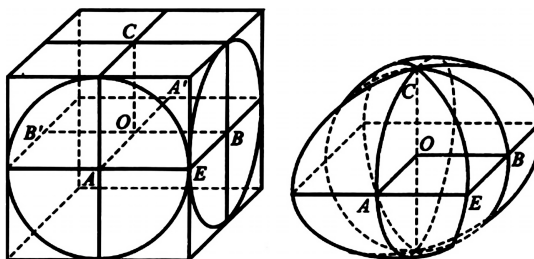
数学思想的高度抽象性，往往会让学生的学习过程中感到困惑，难以迅速领会其精髓，而数学思想形成过程是呈现由直观到抽象、由一般到特殊的螺旋式上升的态势，其中充满了探索与发现，蕴含着数学思想的演进过程，因此，将数学史融入数学教学，能够帮助学生循序渐进地理解数学思想。如在积分思想教学中，引入牟合方盖体积计算的古今算法，让学生深入了解由截面积求体积思想背后的历史脉络与思想演进过程，直观感受其中古今数学思想的碰撞与交融，领悟数学思想的传承与发展，能够有效地帮助学生拓宽思维，加深对数学思想的理解。

2. 我国古代计算“牟合方盖”体积的方法

2.1. 牟合方盖的由来

“牟合方盖”的产生源于《九章算术》中球体体积的计算问题，最早由中国数学家刘徽提出，刘徽在研究《九章算术》时，发现了其中球体积公式的不精确性，为了修正《九章算术》中关于球体积的计算公式，构造出了牟合方盖这一特殊的几何体，并尝试通过牟合方盖来精确地计算球体的体积。

《九章算术》中“开立圆术”中给出了球体的体积公式 $V = \frac{9}{16}D^3$ (D 为球体的直径) [1]。刘徽在研究《九章算术》时对这一公式的正确性产生了怀疑，并使用截面法进行验证，通过研究发现内切圆柱体的体积与正方体的体积为 $\frac{\pi}{4}$ ，《九章算术》中的球体体积公式是在 $\pi = 3$ 的情况下，内切球与圆柱体的体积之比亦是 $\frac{\pi}{4}$ 时，上述球体的体积公式才成立。为了验证内切球与圆柱体的体积之比不等于 $\frac{\pi}{4}$ ，刘徽构造了新的立体——牟合方盖(如图 1)，牟合方盖是由正方体的两个相邻侧面为底分别作两个内切圆柱，剔除其余部分，剩下的内核部分。这种几何体的特征是其横截面在每个高度上都是正方形，且这些正方形外接于球体在同一高度的横截面圆形。刘徽用截面法证明了内切球与牟合方盖的体积之比为 $\frac{\pi}{4}$ ，但牟合方盖的体积明显小于内切圆柱的体积，从而推出《九章算术》中球体体积公式是错误的，并试图通过计算牟合方盖的体积来计算球体体积[2]。遗憾的是，刘徽终其一生也没有求出牟合方盖的体积，将这一难题留给了后人。



图片来源：李文林著《数学史概论》

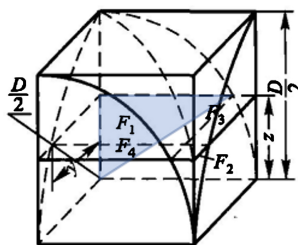
Figure 1. Mouhefanggai

图 1. 牟合方盖

2.2. 祖暅计算“牟合方盖体积”的方法

祖冲之父子在研究《九章算术》刘徽注时，发现“牟合方盖”体积计算的问题没有得到解决，便沿着刘徽的思路继续探究。最终，祖冲之的儿子祖暅运用“祖暅原理”，即夹在两平行平面间的两几何体，被平行于这两平面的任意平面所截，若截得两截面面积总相等，那么两几何体体积相等，最终攻克了牟合方盖体积计算这一难题。

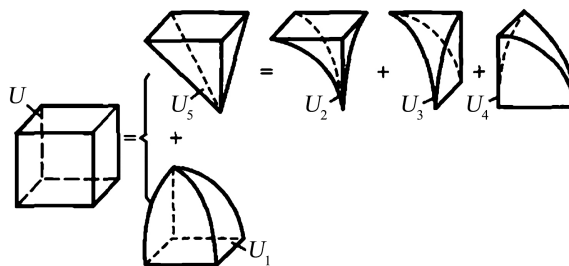
祖暅计算牟合方盖的具体步骤如下(记为法 1)：首先取边长为 D 正方体 V_1 的八分之一(如图 2)，以其左下棱为轴， $\frac{D}{2}$ 为半径作 $\frac{1}{4}$ 圆柱面；然后以后下棱为轴， $\frac{D}{2}$ 为半径作 $\frac{1}{4}$ 圆柱面。上述圆柱面将小正方体分割后得到 4 个曲面立体(如图 3 所示)，其中 U_1 称为内棋，便是牟合方盖的 $\frac{1}{8}$ ；另外 3 块 U_2 、 U_3 、 U_4 称为外棋，在距底面高为 z 的水平平面去截上述 4 个曲面立体分别得到四个截面，其中一个大正方形 F_1 ，记其边长为 y ，小正方形 F_2 与两个长方形 F_3 、 F_4 。



图片来源：由朱家生著《数学史》插图修改

Figure 2. One-eighth of the Mouhefanggai

图 2. 八分之一牟合方盖



图片来源：朱家生著《数学史》

Figure 3. Volume decomposition diagram

图 3. 体积分解图

由勾股定理得: $F_1 = y^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 - z^2$ 。

故可得: $F_2 + F_3 + F_4 = z^2$ 。

又因为以 $\frac{D}{2}$ 为底边长和高得倒立四棱锥 U_5 被距底面高为 z 的水平平面去截得截面积亦为 z^2 。

由祖暅原理可得: $U_2 + U_3 + U_4 = U_5 = \frac{1}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3$ 。

即: $V_{\text{牟合方盖}} = 8U_1 = 8\left[\left(\frac{D}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3\right] = \frac{16}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3$

令 $r = \frac{D}{2}$, 则 $V_{\text{牟合方盖}} = \frac{16}{3}r^3$ 。

3. 用微积分计算“牟合方盖”的体积

3.1. 用定积分计算牟合方盖体积

随着数学思想的不断进步, 牟合方盖体积的计算方法也在不断更新。刘玉琚主编《数学分析讲义》第八章(定积分), 运用定积分的知识求出了牟合方盖的体积(记为法 2): 求柱面 $x^2 + z^2 = r^2$ 与 $x^2 + y^2 = r^2$ 围成的体积[3]。

解法如下: 以牟合方盖的中心建立直角坐标系, 两个圆柱的轴线分别为 x 轴与 y 轴(如图 4 所示仅为第一挂限部分)。用平行于 $yo z$ 平面且距离为 x 的平面去截 $\frac{1}{8}$ 牟合方盖, 由勾股定理可知, 其截面为边长为 $\sqrt{r^2 - x^2}$ 的正方形, 故其截面积为 $S = r^2 - x^2$, 则应用定积分可由截面积求得牟合方盖的体积。

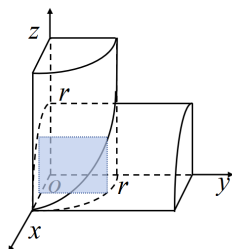


Figure 4. Cross-sectional diagram
图 4. 截面示意图

$$V_{\text{牟合方盖}} = 8 \int_0^r S dx = 8 \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} r^3$$

该方法的核心思想为微元法, 利用截面积求体积。祖暅是通过与 $\frac{1}{8}$ 牟合方盖具有相等截面积的以 $\frac{D}{2}$ 为底边长和高的倒立四棱锥, 通过求四棱锥体积求得了 $\frac{1}{8}$ 牟合方盖的体积。相对于祖暅求牟合方盖体积的方法, 这里用定积分计算牟合方盖的体积, 是应用微元法的思想, 首先对 $\frac{1}{8}$ 牟合方盖垂直于 x 轴平行于 $yo z$ 做一系列纵向切割, 选其中距原点距离为 x 的一个立体作为研究对象, 则其一个底面的边长为 $\sqrt{r^2 - x^2}$, 厚度为 dx , 用底面的边长为 $\sqrt{r^2 - x^2}$, 高为 dx 的正四棱柱的体积近似替代, 便得到体积微元 $dV = (r^2 - x^2) dx$, 然后在闭区间 $[0, r]$ 上对体积微元 dV 求定积分, 就可以求得 $\frac{1}{8}$ 牟合方盖的体积, 再乘

8 就得到牟合方盖的体积 $\frac{16}{3}r^3$ 。

法 1 和法 2 求牟合方盖体积各具特色, 法 1 是巧妙地找到了与 $\frac{1}{8}$ 牟合方盖截面面积相等的四棱锥, 通过四棱锥体积的计算间接地推导出牟合方盖的体积, 这种方法体现了古人对几何图形之间关系的深刻洞察, 通过构造与转化, 将复杂问题简化为已知问题, 展现了数学思维的巧妙与灵动。而法 2 则采用了微元法, 通过对牟合方盖进行无限细分, 利用截面积在微小区间内的近似值, 无限累积求和, 从而精确地计算出其体积。这种方法不仅能够求解牟合方盖的体积, 还适用于计算多种复杂几何体的体积。它在继承前者利用截面积求体积思想的基础上, 进一步拓展了应用范围, 提升了数学工具的通用性, 是数学思想从具体到抽象、从特殊到一般的重要发展。

尽管上述两种计算方法都以截面积为切入点, 但定积分的截面法显然更具普遍性和系统性, 它不仅继承了祖暅计算“牟合方盖”体积计算方法的智慧, 还在此基础上运用“微元法”, 开拓性地应用对截面无限求和的手段, 创立了应用截面积求体积的一般方法, 改进了不规则几何体体积的计算方法, 为后续不规则几何体体积计算理论的发展奠定了坚实基础。

3.2. 用二重积分计算牟合方盖

在同济版《高等数学》的二重积分中再次出现了牟合方盖体积的计算问题, 求两个底圆半径都等于 r 的直交圆柱面所围成的立体的体积[4] (记为法 3)。设两个圆柱面的方程分别为 $x^2 + y^2 = r^2$ 及 $x^2 + z^2 = r^2$, 利用平面直角坐标系的对称性, 只需求得第一挂限部分的体积 V_1 , 然后乘以 8 便是牟合方盖的体积。

第一挂限部分可以看作底为 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}, 0 \leq x \leq r\}$ (如图 5 所示), 顶为 $z = \sqrt{r^2 - x^2}$ 的去顶柱体的体积。

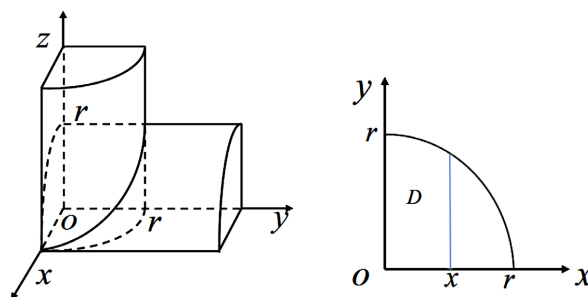


Figure 5. Analysis diagram of the integration region
图 5. 积分区域分析图

$$V_1 = \iint_D \sqrt{r^2 - x^2} d\sigma = \int_0^r \left[\int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \sqrt{r^2 - x^2} dy \right] dx = \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{2}{3}r^3$$

从而得到牟合方盖的体积 $V = 8V_1 = \frac{16}{3}r^3$ 。

用定积分求牟合方盖体积的思想源于“微元法”, 即将 $\frac{1}{8}$ 牟合方盖分割成无数个微小的截面, 每个截面的面积乘以其厚度 dx 得到微小体积元, 再通过积分求和得到总体积。二重积分的出现是对定积分思想的自然延伸和拓展。它将积分区域从一维扩展到二维, 能够处理更复杂的几何形状和更广泛的体积计算问题。在二重积分中, 体积被看作是由无数个微小的柱体累加而成, 每个柱体的高度由函数 $z = \sqrt{r^2 - x^2}$ 确定, 底面为微小的二维区域 $d\sigma$, 由于二重积分的积分区域扩展到二维平面, 能够更全面地描述和计算

复杂几何体的体积，相对于定积分，二重积分能够处理更一般的情况，包括不规则的二维区域和复杂的曲面。二重积分的计算可以通过化为累次积分来实现，不仅简化了计算过程，还提供了一种处理复杂积分问题的系统化方法。

对比法 2 和法 3，不难看出，在计算不规则立体体积的历程中，这些计算方法不仅仅是数学方法的改进，更是数学思想的深刻变革。用定积分截面法计算牟合方盖体积时，数学家们是通过简单的面积计算公式对其截面正方形的面积进行计算，然后利用微元法的思想，将复杂的体积问题转化为以规则图形面积为底无限小量为高的柱体体积的无限求和，从而求得牟合方盖的体积。这一过程虽然体现了数学中“化整为零”的思想，即将整体分解为局部，再通过对局部的近似处理，应用极限的思想，通过无限求和取极限得到整体量的准确值，但其局限性在于仍然依赖于截面为规则图形，其面积的计算相对容易，难以推广到更为一般的曲边图形。随着积分思想的进一步发展，二重积分的引入突破了这一局限性，在用二重积分计算牟合方盖体积过程中，是通过定积的思想求得其截面面积，这里截面图形可以是任意曲边图形，打破了截面为规则图形的局限性，极大地扩展了应用积分思想计算不规则立体体积的应用范围。二重积分计算体积方法的进步在于将不规则立体截面视为一个二维区域，通过定积分的思想得到其截面面积，再对截面面积在其高的取值范围内求积分得到其体积，这种“从线到面，再从面到体”的积分思想，不仅体现了数学家们思维维度的升级，更是对空间结构的更高层次理解，从而使积分思想方法的应用更加一般化和普适化，实现数学思想从局部到整体、从特殊到一般的深刻转变。

4. 数学思想的传承与发展

数学教学绝不应该只是定义、定理的表层教学，更应该是数学思想、方法的传授，以及数学思维的提升。为了更好实现这一深层目标，在数学教学中融入数学思想、方法的发展历程十分必要，能够极大地拓宽数学教学的广度和深度。而牟合方盖体积计算的案例正体现了这一点，其中刘徽的构造法与中国古代“出入相补”原理相呼应，彰显了中国古代数学文化的博大精深；而祖暅原理则通过“幂势既同，则积不容异”的表述，揭示了积分思想在中国传统数学文化中的雏形。这些历史资源为现代积分理论的教学增添了生动的文化背景与深刻的历史内涵，在数学分析的教学中，恰当地引入历史案例重构课堂，引导学生领悟从牟合方盖的“截面积累加”过渡到二重积分的“区域分割”的数学思想，帮助学生理解微元法思想本质，从而克服认知壁垒。

关于牟合方盖三种解法虽推导过程各不相同，但却深刻地反映了人类通过面积来探究体积思想的一脉相承，这种从面积到体积的探索路径，并非是数学家们偶然的思维跳跃，而是数学知识体系在长期发展中深度关联、一脉相承的生动体现，是数学理论与方法的继承、升华与创新。这三种解法蕴含的数学思想共同搭建起从截面积通往不规则体体积求解的桥梁，其中蕴含的数学思维演进过程，能够让学生通过对这些方法的深入剖析，清晰梳理出数学家们在体积计算方法上从直观到抽象、从特殊到一般的发展脉络，从而促进数学思维的提升。

在数学教学的课堂上，通过介绍“牟合方盖”体积计算地三种解法，引导学生思考虽然都是基于应用截面积求体积的思想，但选取研究视角却各不相同，从不同维度对“牟合方盖”这一经典案例展开了研究。这种教学多视角研究方式，能够激励学生摆脱思维定式束缚，换角度思考问题，找到解题数学问题的最优途径，从而有效地提升学生的数学思维。

5. 总结

数学思想抽象，逻辑严密，让人们心生畏惧、望而却步。然而，纵观数学的发展历程，数学的发展充满了创新与突破，饱含着数学家的智慧与激情，因此，将数学史融入数学教学中，能够有效地突破数学

教学的难度,有助于在数学严谨的研学中实现从冰冷美丽到火热的思考的转变[5]。牟合方盖体积计算的古今算法,直观地呈现了运用“截面法”求体积的思想演进过程,既体现了由古代智慧到现代分析的思想传承,又彰显了中国数学传统的卓越贡献,也为当代大学生实现了课堂上的跨时空对话。在数学教学中恰当地引入数学史案例,让学生感受古今数学思想的碰撞,领悟其中的历史与逻辑的统一,既可以拓宽数学思维,加深数学思想的理解和应用,又可以使数学思想的传承在课堂中得以焕发新的生命力[6]。

综上所述,将数学史与现代数学知识结合,重构数学课堂,不仅能让学生在课堂上实现跨时代思想交流,透彻理解数学知识,提升数学学习效率,锤炼数学思维、拓宽研学视角,而且会对学生们今后的学习与生活产生深远影响,在面对各种未知挑战时,能时刻敏锐思考,勇于创新。

参考文献

- [1] 李文林. 数学史概论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011: 84-85.
- [2] 朱家生. 数学史[M]. 北京: 高等教育出版社, 2022: 63.
- [3] 刘玉琰, 等, 主编. 数学分析讲义(上册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019: 321.
- [4] 同济大学数学系, 编. 高等数学(下册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014: 146-147.
- [5] 张奠宙, 王振辉. 关于数学的学术形态和教育形态——谈“火热的思考”与“冰冷的美丽” [J]. 数学教育学报, 2002(2): 1-4.
- [6] 彭刚, 汪晓勤, 程靖. 数学史融入数学教学: 意义与方式[J]. 成都师范学院学报, 2016, 32(1): 115-120.