

数形结合思想在数学教学中的应用探究

彭麟茹, 张丽春*

北华大学数学与统计学院, 吉林 吉林

收稿日期: 2025年5月2日; 录用日期: 2025年5月30日; 发布日期: 2025年6月9日

摘要

数形结合思想作为数学学科的核心思想之一, 将抽象数学语言与直观图形相融合, 实现抽象思维和形象思维的互补。其内涵包括“以形助数”和“以数解形”。在数学教学里, 它意义重大, 能帮助学生理解概念, 例如借助数轴理解绝对值; 可培养思维能力, 让学生灵活转换形象与抽象思维; 还能提升解决问题的能力, 为解题提供新思路。文章以数学教学为背景, 结合数学教学实践, 系统探讨数形结合思想的理论基础、应用路径及教学策略。期望为数学教学提供参考, 助力提升教学质量, 促进学生数学素养的全面发展。

关键词

数形结合, 数学教育, 应用探究

Exploration of the Application of the Concept of Combining Numbers and Shapes in Mathematics Teaching

Linru Peng, Lichun Zhang*

School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin Jilin

Received: May 2nd, 2025; accepted: May 30th, 2025; published: Jun. 9th, 2025

Abstract

The idea of combining numbers and shapes, as one of the core concepts of mathematics, integrates abstract mathematical language with intuitive graphics to achieve the complementarity of abstract thinking and visual thinking. Its connotation includes “using shapes to assist numbers” and “using numbers to solve forms”. In mathematics teaching, it is of great significance as it can help students

*通讯作者。

文章引用: 彭麟茹, 张丽春. 数形结合思想在数学教学中的应用探究[J]. 教育进展, 2025, 15(6): 78-83.
DOI: 10.12677/ae.2025.156962

understand concepts, such as using number lines to understand absolute values; Can cultivate thinking ability, allowing students to flexibly transform images and abstract thinking; It can also enhance problem-solving skills and provide new ideas for solving problems. This article takes mathematics teaching as the background, combined with mathematics teaching practice, systematically explores the theoretical basis, application path, and teaching strategies of the combination of numbers and shapes. Expected to provide a reference for mathematics teaching, help improve teaching quality, and promote the comprehensive development of students' mathematical literacy.

Keywords

Combination of Numbers and Shapes, Mathematics Education, Application Exploration

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 数形结合思想的简述

1.1. 数形结合思想的内涵

数形结合思想是一种重要的数学思想方法, 它将数学中抽象的数量关系与直观的几何图形、位置关系相互结合、相互转化。通过“以形助数”, 可以将复杂的代数问题转化为直观的图形问题, 使问题更加形象、具体, 便于理解和解决, 比如利用数轴来直观表示数的大小、正负、绝对值等概念, 借助函数图象分析函数的性质和变化规律。而“以数解形”则是通过建立数学模型, 用代数方法来解决几何问题, 实现对几何图形的精确描述和定量分析, 例如通过坐标法来研究几何图形的位置关系和度量问题。数形结合思想能使抽象问题具体化、复杂问题简单化, 有助于提高解题效率, 培养学生的数学思维能力[1]。数学家华罗庚曾精辟指出: “数缺形时少直观, 形少数时难入微”, 揭示了数形结合思想的本质——数与形的辩证统一。在数学教学中, 这一思想不仅是工具, 更是连接数学知识与学生认知的桥梁, 为培养数学思维与解决实际问题能力奠定基础。

1.2. 数形结合思想的理论基础

1) 哲学基础

辩证唯物主义: 辩证唯物主义认为世界是物质的, 物质是运动的, 运动是有规律的, 而数学作为研究现实世界数量关系和空间形式的科学, 数和形是对物质世界的一种抽象反映。数与形之间相互联系、相互转化, 体现了辩证唯物主义中矛盾双方对立统一的关系。

2) 心理学基础

认知心理学中的信息加工理论: 该理论认为, 人类的认知过程就像一个信息加工系统, 包括对信息的输入、编码、存储、检索和输出等环节。数形结合思想有助于信息的编码和存储, 将抽象的数学信息转化为形象的图形信息, 或者将图形信息转化为易于计算和分析的数字信息, 能减轻记忆负担, 提高信息加工的效率。例如, 记忆三角函数的性质时, 结合三角函数图象, 能更轻松地记住函数的周期、最值、单调性等信息。

3) 数学学科基础

解析几何: 解析几何是数形结合的典范。通过建立平面直角坐标系或空间直角坐标系, 将几何图形中的点、线、面等元素用坐标表示, 从而将几何问题转化为代数问题进行研究。同时, 代数方程也可以

通过图形来直观地展示其性质和变化规律, 实现了数与形的紧密结合。

2. 数形结合思想在数学教学中的作用

2.1. 有助于学生理解抽象概念, 培养思维能力

数学中的许多概念较为抽象, 学生理解起来有一定难度。借助数形结合思想, 能将抽象概念转化为直观的图形, 帮助学生更好地理解。在讲解函数概念时, 利用几何画板等工具, 动态展示随着自变量的变化, 函数值相应改变的过程, 同时呈现出函数图象的生成。学生可以看到, 每一个自变量的取值在图象上都有唯一对应的点, 直观理解函数“一个自变量对应一个函数值”的对应关系本质, 将抽象的函数概念变得生动可感。

数形结合思想要求学生既能从“数”的角度分析问题, 又能从“形”的角度思考问题, 促使学生的形象思维和抽象思维相互转化、协同发展, 培养学生思维的灵活性和创造性。在学习几何图形性质时, 例如, 教师在教授锐角三角函数时, 可以让学生先画图, 了解锐角三角函数的概念。然后让学生运用数形结合的方法找出互余两角正弦和余弦之间的相等关系, 以及同一个锐角正弦和余弦之间的数量关系等。通过这样的方式引导学生掌握知识内容, 培养学生的“数感”, 帮助学生巩固所学知识, 进而提升他们的数学综合能力。例如在教授三角形内角和定理时, 让学生通过剪拼三角形的三个角, 拼成一个平角, 从直观的操作中获得形象感知, 这是形象思维的体现。接着引导学生运用平行线的性质进行理论推导, 将形象认识上升为抽象的逻辑推理, 在这个过程中, 两种思维相互促进, 共同发展。

2.2. 有助于提高学生解题能力, 激发学习兴趣

数学题型复杂多变, 学生常不知从何下手。数形结合能化繁为简, 快速指引方向。传统解题方法有时繁琐复杂, 数形结合能提供巧妙简洁的思路。

例如在证明 $x > 0$, $\sin x < x$ 时, 不使用数形结合时, 可构造函数 $f(x) = x - \sin x$ 求导得 $f'(x) = 1 - \cos x$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 单调递增, $f(0) = 0$, 所以 $f(x) > 0$, 即 $\sin x < x$, 证明过程需要一定的导数知识和推理。若用数形结合, 在同一坐标系中画出 $y = x$ 和 $y = \sin x$ 在 $x > 0$ 部分的图象。 $y = x$ 是过原点的直线, $y = \sin x$ 是周期函数, 在 $x = 0$ 处, 两函数值相等, 且 $y = \sin x$ 的图象在 $y = x$ 图象的下方, 直观地看出当 $x > 0$ 时, $\sin x < x$ (如图 1 所示)。使不等式的证明更加直观形象, 无需复杂的推导过程, 通过观察图象就能直接得出结论, 有助于从几何角度理解函数之间的大小关系, 加深对不等式的理解。使学生更愿意主动探索函数奥秘, 从而对数学学习产生浓厚兴趣。

2.3. 有助于减轻教师教学负担, 促进教师专业成长

数形结合思想不光是学生学习数学的助力, 还是教师数学教学的助力。传统教学中, 教师需花费大量时间讲解抽象概念和复杂解题思路, 学生还可能难以理解。引入数形结合后, 复杂知识变得直观。教师根据具体的教学内容引导学生使用适宜的方式结合或互转数与形。如此, 学生可以经历数学知识的探究过程, 做到知其然和知其所以然。在这样的情况下, 教师不用再费尽心力地教给学生“是什么”、“为什么”、“怎么做”, 大大地减轻了教学负担。

数形结合思想在数学教学中的实践应用, 不仅是学生能力发展的催化剂, 更是教师专业成长的重要契机。这一过程要求教师突破传统的学科壁垒, 重新审视数学知识的本质联系, 从而在教学设计、跨学科整合、技术应用及教学研究等维度实现自我能力的迭代升级。同时, 教师通过将数形结合思想的理论研究转化为可操作的课堂实践, 并在学术共同体中分享案例成果(如发表教学论文、参与专题研讨), 形成“实践 - 反思 - 研究 - 创新”的专业发展闭环, 实现从经验型教师向研究型教师的实质性跨越。

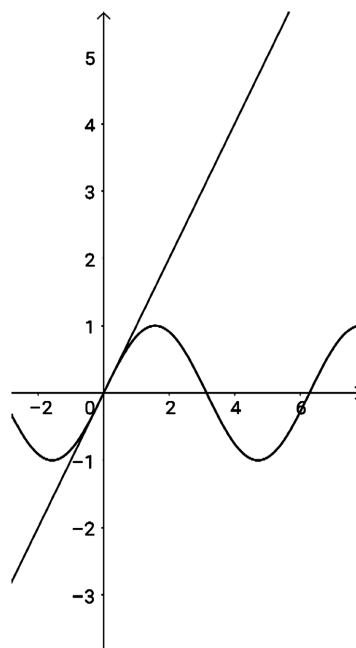


Figure 1. Two function graphs

图 1. 两个函数图像

3. 数学教学中数形结合思想的应用策略

3.1. 形成数形结合思想的教学意识

强化教师对数形结合思想的认知与理解, 可以提高教师在数学教学中的教学效果, 帮助学生更好地理解数学概念、解决数学问题, 在提升教学质量的同时, 增强学生理解和应用数学的能力[2]。首先梳理数学教材, 挖掘各章节适合数形结合教学的内容。将代数与几何知识按数形结合思路重新整合, 规划教学序列, 构建系统教学框架。同时教师在备课时, 要格外注意自身的教学语言是否风趣幽默, 教学环节是否劳逸结合, 是否足够激发学生的学习兴趣, 并以此为基础渗透数形结合思想。

例如在介绍一次函数概念时, 先不直接给出抽象定义, 而是通过实际生活场景绘图导入。比如展示汽车匀速行驶的路程-时间关系, 在平面直角坐标系中, 以时间为横轴, 路程为纵轴, 描出不同时刻对应的路程点, 然后连线得到一条直线。让学生观察这条直线的特征, 引导他们发现随着时间均匀增加, 路程也均匀增加。此时引出一次数函数“形”的特征是一条直线, 让学生对一次函数有直观的图形认知, 再过渡到用语言描述一次函数概念, 帮助学生从具体到抽象理解一次函数。学生能够随着一次函数图像的变化, 渗透更深入的数学教育思想。

3.2. 挖掘知识背后的数形结合思想

数形结合思想是看不见摸不到的意识形态, 学生很难感知。在高等数学教学中, 不论是什么函数, 只要先画图, 就会使问题变得直观化, 从而获得快速且准确的解题思路[3]。而线性代数作为数学的重要分支, 在众多领域发挥关键作用。其中, 数形结合思想将抽象代数概念与直观几何图形相融合, 为理解和解决线性代数问题提供了强大工具, 极大提升了分析和解决问题的效率。

例如向量是线性代数的基础概念, 也是数形结合的典型示例。从代数角度, 向量是有序数组, 可进行加法、数乘等运算; 从几何视角, 在二维平面或三维空间中, 向量表现为有向线段, 其长度对应向量模长, 方向即有向线段指向。比如在二维平面, 向量 $\vec{a} = (x, y)$, 可直观表示为从原点 $(0, 0)$ 出发, 终点为

(x, y) 的有向线段, 向量加法遵循平行四边形法则或三角形法则, 这与代数定义的向量加法 $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ 相对应, 通过图形能直观理解向量运算本质。

又比如线性方程组求解也是线性代数的重要内容, 也体现了数形结合优势。以二元线性方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 为例, 每个方程在平面直角坐标系中表示一条直线。方程组的解就是两条直线的交点坐标。

当两条直线相交, 方程组有唯一解; 平行时, 方程组无解; 重合时, 方程组有无穷多解。这种将线性方程组转化为直线位置关系的方法, 把抽象代数运算转化为直观几何图形判断, 让解的情况一目了然, 有助于理解线性方程组解的存在性和唯一性条件。

例如方程组 $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ (如图 2), 可以清楚地观察到方程有唯一解。

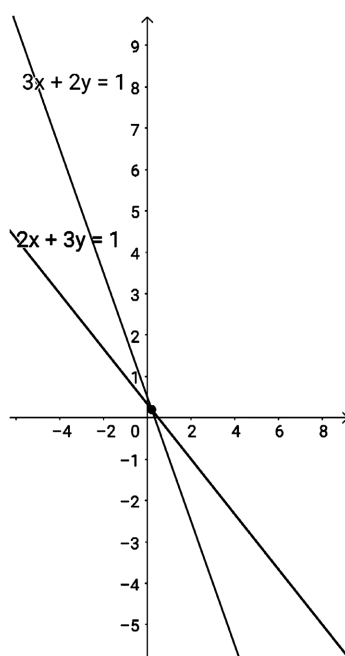


Figure 2. Two function graphs
图 2. 两个函数图像

3.3. 学生之间交流合作, 领悟数形结合思想

“数形结合”思想的渗透, 仅靠教师的传授是远远不行的, 需要让学生对此进行深刻地思考, 在脑海中转化, 进而生成更具有价值的信息。所以, 教师可以积极采用小组合作学习, 通过学生之间的交流合作, 来促进学生对于“数形结合”思想的渗透[4]。

进行分组时, 要根据学生能力、性格等因素进行科学分组, 每个小组人数控制在 4~5 人。若人数过多, 同学之间的交流距离会变远, 进而会导致学生的交流时间过多, 交流不集中。人数太少, 意见会总结得较少, 就会显得比较片面, 所以教师需要根据教学的需要来对小组的人数进行调整, 以求能够达到最佳的合作效果。在这样的交流合作中, 每个同学的观点和想法相互碰撞。有人从图像中看出趋势, 有人从数字里找到规律, 大家互相启发、补充, 对数形结合思想的理解也越发深刻。它不仅让数学知识不再枯燥、孤立, 还让我们学会从多个角度思考问题, 提升思维的灵活性。这种思想就像一座桥梁, 连接起抽象的数学概念和直观的图形世界, 让我们在学习数学的道路上走得更稳、更远。

4. 总结

数形结合思想在数学教学中应用广泛且成效显著,能有效帮助学生理解数学知识、培养思维能力、提高解题水平。教师应积极采用数形结合教学策略,不断探索创新教学方法,充分发挥这一思想的优势,提升数学教学质量,助力学生在数学学习道路上稳步前行,为学生的未来发展奠定坚实基础。在今后的教学研究中,还需进一步探索数形结合思想与其他教学方法的融合,以更好地适应不同学生的学习需求,促进数学教育的持续发展。

基金项目

吉林省高教学会科研课题:以学生为中心的数字化混合教学模式研究——以大学数学课程为例(JGJX2022C50)。

参考文献

- [1] 冯盛良. 基于核心素养的初中数学教学中数形结合思想的渗透[J]. 亚太教育, 2024(17): 52-55.
- [2] 冯慧丽. 人教版初中数学数形结合思想教学策略研究[J]. 甘肃教育研究, 2024(19): 63-65.
- [3] 张建华. 数形结合在高等数学教学中的应用探讨[J]. 江西电力职业技术学院学报, 2022, 35(1): 51-52+55.
- [4] 尤芳平. 初中数学教学中数形结合思想的应用[J]. 科学咨询, 2022(13): 196-198.