

SOLO分类视角下高中数学教材习题探析

毛旭武

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2025年5月22日; 录用日期: 2025年6月20日; 发布日期: 2025年6月27日

摘要

数学核心素养具有显性与隐性双重性质, 关键能力是数学核心素养的外在表现, 也是数学课程目标培养的核心, 可用学生的具体行为来描述。其指引着数学课程教学的新方向, 同时也是评估数学课程标准实施情况的指标。本研究以高中数学人教A版“函数的概念与性质”章末习题为例, 根据课程标准对于学业的要求, 借助SOLO分类理论对教材习题进行分析, 发现教材习题存在明显的SOLO梯度。且主要集中在多元结构(M)和关联结构(R)水平, 关键能力水平随着思维层次的进阶依次叠加, 同时注重对学生数学抽象、逻辑推理和数学运算能力的培养。可见教材习题为广大一线教师提供了切实可行的教学路径。

关键词

SOLO分类理论, 关键能力, 教材习题

Analysis of High School Mathematics Textbook Exercises from the Perspective of SOLO Taxonomy

Xuwu Mao

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: May 22nd, 2025; accepted: Jun. 20th, 2025; published: Jun. 27th, 2025

Abstract

Mathematics core literacy has the dual nature of explicit and invisible, the key ability is the external expression of mathematics core elements, but also the core of mathematics curriculum goal training, and can be described by the specific behavior of students. It guides the new direction of mathematics curriculum teaching and is also an index to evaluate the implementation of mathematics curriculum standards. This study takes the exercises at the end of the chapter “The Concept and Nature of

Functions” in the A edition of high school Mathematics Teaching as an example. According to the academic requirements of the curriculum standards, the exercises in the textbook are analyzed with the help of SOLO classification theory, and it is found that there are obvious SOLO gradients in the textbook exercises. It mainly focuses on the level of multiple structure (M) and relational structure (R), and the level of key ability is superimposed with the advanced level of thinking, while focusing on the cultivation of students’ mathematical abstraction, logical reasoning and mathematical operation ability. It can be seen that the textbook exercises provide a practical teaching path for the majority of front-line teachers.

Keywords

SOLO Classification Theory, Key Ability, Textbook Exercises

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《普通高中课程标准(2017年版 2020年修订)》(以下简称课程标准)提出,数学核心素养是数学课程目标的集中体现,是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现。作为衡量数学核心素养的一个重要指标,数学关键能力的培养一直是学者们关注的一个热点。

高中阶段数学核心素养包含数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析六个部分,孔凡哲与史宁中认为数学关键能力只有经过这六部分数学活动才能够真正形成[1]。徐斌艳从数学活动视角提出数学关键能力涉及问题提出、数学表征与变换、数学推理论证、数学建模、数学地解决问题和数学交流,并系统界定了各能力成分内涵[2]。朱立明以课标为基础从“三会”的视角给出高中生数学关键能力的价值、特征及操作[3]。曹一鸣和刘坚以教学诊断为依据,开展精准教学改进,为数学关键能力的培养提供了路径[4]。潘竹树和李祎以“最短路径问题”为例,借助数学模型培养关键能力[5]。朱贵玺认为只有经历解决问题的全过程,才能增强发现和提出问题,分析和解决问题能力的培养[6]。张扬和王宗信通过数学实验,以变化四边形进行单元教学培养关键能力[7]。宋建华提出在数学教学过程中恰当选择阅读目标、把握阅读重点以及多角度阅读培养学生数学阅读能力[8]。王国才和陈灵在教学实践中提出“五理”并举培养数学关键能力[9]。

习题作为教材的一部分,为教学活动提供练习使用,是数学教学活动过程中培养关键能力的重要资源。习题构成了教材的训练系统,能够帮助学生有效习得数学知识,并内化为自我认知系统[10]。王嵘和张蓓提出要加强习题的多样性,完善习题立意,充分利用习题培养数学关键能力[11]。郭玉峰和赵坤认为教材习题兼具知识、发展和评价功能,对学生思维品质和数学关键能力培养不可或缺[12]。王世朋等以人教A版第一册习题为例,认为习题拓广探索部分为探究学习提供了素材,提出了基于认知水平、结合兴趣关键和紧扣困惑本质等教学建议[13]。付钰对中美数学教材“三角函数”习题进行比较,发现教材习题在数量、类型和难度方面存在差异,为我国教材编写提供了启示[14]。周莹等以人教版和湘教版教材为例,对函数习题与数学内容标准进行一致性研究,为教材编写课标修订提供参考,促进师生树立良好的教材习题观[15]。

SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome)分类理论由比格斯在皮亚杰认知发展阶段理论上提出,认为学生的总体认知结构难以被检测,但学生在解决某一具体问题时所表现出来的思维层次是可

以检测的[16]。近年来,利用该理论评价题目依然成为一个热点。鲁依玲等利用 SOLO 分类理论,对 2022 年全国数学新高考 I 卷试题从内容领域和思维层次进行分析,为高中数学教学提供了启示[17]。周莹等借助 SOLO 分类理论对 2017~2019 年南宁市中考数学试卷进行比较研究,为教师教学提出了依纲靠本,融合文化,启发创新的建议[18]。刘绿芹将 SOLO 分类理论引入学生作业评价,认为对学生作业不仅要量化评价更要进行质性评价,并对思维层次进行划分,为学生订正作业,为教师针对性评价打下基础[19]。

鉴于此,本研究基于 SOLO 分类理论,深入分析人教 A 版高中数学必修第一册第三章“函数的概念与性质”章末习题,通过思维层次和关键能力对教材习题进行评价。

2. 研究对象

人教 A 版高中数学教材以“主线-主题-核心知识”的基本结构展开,作为高中数学课程主线的函数,在“函数的概念与性质”教材习题设置方面存在着以下特点。(1) 层次分明。习题分别设置了“复习巩固”“综合应用”“拓广探索”三个栏目,使习题更具针对性,选择性和层次性。(2) 紧扣教材。围绕教材知识点编排,对函数定义、三要素、单调性、奇偶性等逐一考察,帮助学生巩固课堂所学,加深对重点内容的印象,其中不少题目源于教材例题的变形,有利于学生举一反三,灵活应用。(3) 注重应用。将函数知识与实际生活场景结合,蕴含数形结合、分类讨论等数学思想。使学生从习题中体会函数的实用价值,培养数学关键能力,提高数学学习兴趣。

3. 研究过程

3.1. 教材习题的划分标准

SOLO 分类理论一共包含 5 个层次水平,分别是前结构水平、单点结构水平、多点结构水平、关联结构水平和抽象拓展结构水平。其中,处在前结构水平的学生基本不理解问题,回答问题逻辑混乱,或者只是简单地重复问题中的部分信息,甚至给出完全不相关的答案。因此,本研究不涉及对该层次题目的探讨。具体划分如“见表 1”所示。

Table 1. SOLO structure hierarchical division

表 1. SOLO 结构层次划分

SOLO 层次水平	基本特点	解题涉及知识点	编码
单点结构水平	学生能够识别题目中涉及的一个函数知识点。	1 个	U
多点结构水平	学生能够识别题目中多个函数知识点,但这些知识点是孤立的。	≥ 2 个	M
关联结构水平	学生能够将函数的多个知识点有机地联系起来解决问题。	≥ 3 个	R
拓展抽象水平	学生不仅能够综合运用函数的概念和性质解决问题,还能将函数知识拓展到更广泛的数学情境或实际应用中。	≥ 3 个	E

孔凡哲和史宁中将关键能力划分为数学抽象、数学推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析 6 个部分。现对这 6 个部分进行编码,数学抽象(编码 1)、数学推理(编码 2)、直观想象(编码 3)、数学运算(编码 4)、数学建模(编码 5)数据分析(编码 6)。为此,制定出教材习题二维评价模型。

3.2. 教材习题分析案例

确定完划分标准后,开始对人教 A 版“函数的概念与性质”章末习题进行编码,具体编码步骤如下。

首先,判断该题所涉及的关键能力,如该题考查数学抽象,则属于“关键能力”表现,应该编码 1。其次,判断该题所处的 SOLO 水平,若属于单点结构水平,则编码 U;属于多点结构水平,则编码 M,

以此类推。最后，结合以上两点对习题进行编码。如果该习题考查的是数学抽象，且思维层次属于单点结构水平，则编码 1-U，以此类推。

由于习题的编码过程较为抽象，因此选取人教 A 版“函数的概念与性质”章末习题中较为典型的例题，举例阐述 SOLO 分类理论水平和关键能力判定的具体方法和操作依据。

例 1. 求下列函数的定义域：

$$(1) y = \sqrt{x-2}\sqrt{x+5} \quad (2) y = \frac{\sqrt{x-4}}{|x|-5}$$

习题分析：这是已知函数表达式求函数定义域的基础题目，主要考察了数学抽象、逻辑推理和数学运算的关键能力，由于在判断过程中只需根据函数的形式(根式、分式等)应用基本定义域概念及规则(分母不为零、根号内非负等)进行判断即可。只涉及单一知识点，问题情境简单，该题目对应 SOLO 层次中的单点结构水平，编码 1-2-4-U。

例 2. 设 $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ 求证：

$$(1) f(-x) = f(x) \quad (2) f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) (x \neq 0)$$

习题分析：本题主要考察函数的代数运算与性质分析，具体包括函数的奇偶性验证和函数关系的变形与证明能力。主要考察了数学抽象、逻辑推理和数学运算的关键能力，具体求证过程中学生需要分别计算不同自变量下的函数值，求证函数的性质，并进行比较。需要分别考虑 $f(-x) = f(x)$ 和 $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ 的情况，但每一部分相对独立，涉及多个线索但无需整合，属于 SOLO 水平中的多点结构水平，编码 1-2-4-M。

例 3. 已知函数 $f(x) = 4x^2 - kx - 8$ 在 $[5, 20]$ 上具有单调性，求实数 k 的取值范围。

习题分析：本题主要考察二次函数的单调性分析及参数范围的求解，考察了数学抽象、逻辑推理和数学运算的关键能力，要求学生结合区间与对称轴的关系确定参数的约束条件，需要将函数单调性与二次函数对称轴的知识联系起来，根据给定区间确定对称轴的位置，从而求解参数 k 的取值范围。这需要学生综合运用多个知识点来解决问题，因此，此题属于 SOLO 层次中的关联结构水平，编码 1-2-4-R。

例 4. 经济学家在研究供求关系时，一般用纵轴表示产品价格(自变量)，而用横轴来表示产品数量(因变量)。下列供求曲线，那条表示厂商希望的供应曲线，那条表示客户希望的需求曲线？为什么？如“见图 1”。

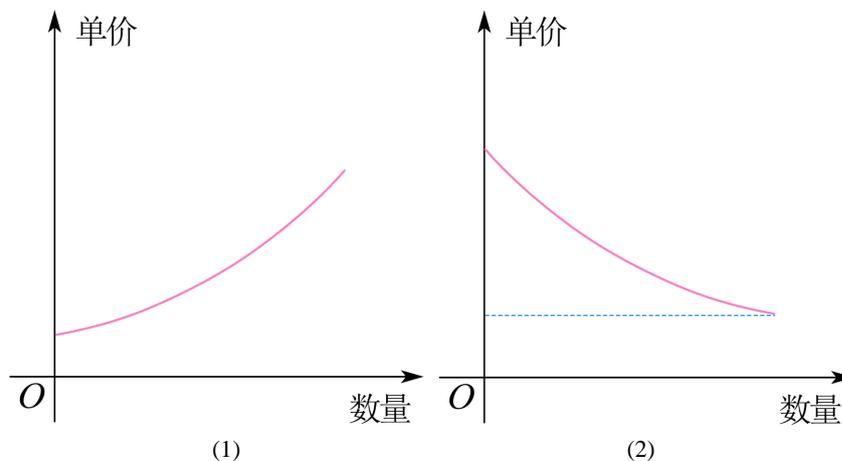


Figure 1. Example 4 question
图 1. 例 4 题

习题分析：本题主要考察了数学抽象、逻辑推理和直观想象的关键能力。题目要求学生识别两条曲线的数学特征(上升/下降趋势)，然后结合经济学中的供求原理，分析厂商供应曲线(通常正斜率，价格越高供给量越大)和消费者需求曲线(通常负斜率，价格越高需求量越小)的区别，最终需要解释这种差异反映的市场行为本质。这既需要整合数学函数图像分析，又要将数学知识迁移到现实世界的市场规律，体现了从具体数学知识到跨学科应用的思维跃迁，属于拓展抽象水平，编码 1-2-3-E。

3.3. 整体研究结果

依据以上的编码原则，发现同一习题可能涉及多个水平的 SOLO 层次，培养的关键能力也可能涉及多个。研究以考查力度最大、涉及面最广的 SOLO 层次、关键能力为依据划分。另外，为了更准确地判断习题具备的关键能力以及 SOLO 层次，本研究将各习题的每个小问分开处理，编码结果如“见表 2”所示。

Table 2. Encoding result
表 2. 编码结果

所属栏目	题号	关键能力	SOLO	编码结果
复习巩固	1 (1)	1, 2, 4	U	1-2-4-U
	1 (2)	1, 2, 4	U	1-2-4-U
	2 (1)	1, 2, 4	M	1-2-4-M
	2 (2)	1, 2, 4	M	1-2-4-M
	3 (1)	1, 2, 4	M	1-2-4-M
	3 (2)	1, 2, 4	M	1-2-4-M
	4	1, 2, 4	R	1-2-4-R
	5	1, 2, 3, 4	R	1-2-3-4-R
	6 (1)	1, 2, 4, 5	U	1-2-4-5-U
	6 (2)	1, 2, 3, 4	R	1-2-3-4-R
综合运用	7	1, 2, 4	U	1-2-4-U
	8 (1)	1, 2, 4	M	1-2-4-M
	8 (2)	1, 2, 4	M	1-2-4-M
	9 (1)	1, 2	R	1-2-R
	9 (2)	1, 2	R	1-2-R
	10 (1)	1, 2, 4, 5	U	1-2-4-5-U
10 (2)	1, 2, 4, 5, 6	M	1-2-4-5-6-M	
拓展探索	11	1, 2, 3	E	1-2-3-E
	12	1, 2, 3, 4	R	1-2-3-4-R
	13	1, 2, 3, 4, 5	R	1-2-3-4-5-R
	14 (1)	1, 3, 5	M	1-3-5-M
	14 (2)	1, 2, 4, 5	R	1-2-4-5-R

结合教材习题 SOLO 层次划分标准和习题关键能力划分标准对人教版高中数学必修第一册第三章

“函数的概念与性质”章末习题进行了二维归类，如“见表3”所示。

Table 3. SOLO taxonomy evaluation statistics table for key competencies
表 3. 指向关键能力的 SOLO 思维层评价统计表

关键能力 \ 思维层次	单点结构(U)	多点结构(M)	关联结构(R)	拓展结构(E)
数学抽象	1 (1) (2), 6 (1), 7, 10 (1)	2 (1) (2), 3 (1) (2), 8 (1) (2), 10 (2), 14 (1)	4, 5, 6 (2), 9 (1) (2), 12, 13, 14 (2)	11
逻辑推理	1 (1) (2), 6 (1), 7, 10 (1)	2 (1) (2), 3 (1) (2), 8 (1) (2), 10 (2),	4, 5, 6 (2), 9 (1) (2), 12, 13, 14 (2)	11
直观想象		14 (1)	5, 6 (2), 12, 13	11
数学运算	1 (1) (2), 6 (1), 7, 10 (1)	2 (1) (2), 3 (1) (2), 8 (1) (2), 10 (2),	4, 5, 6 (2), 12, 13, 14 (2)	
数学建模	6 (1), 10 (1)	10 (2), 14 (1)	13, 14 (2)	
数据分析		10 (2)		

为直观起见，将人教 A 版高中数学必修第一册第三章“函数的概念与性质”章末习题中所涉及的数学关键能力和 SOLO 水平的考察比例绘制成如“见图 2”所示分布：

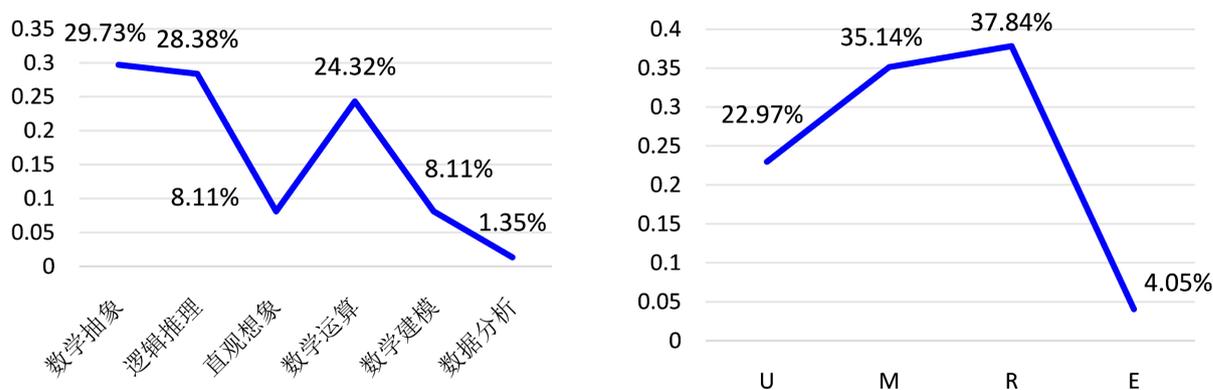


Figure 2. SOLO thinking hierarchy diagram pointing to key competencies
图 2. 指向关键能力的 SOLO 思维层次分布图

通过对人教 A 版高中数学必修第一册第三章“函数的概念与性质”章末习题的分析，可以发现习题对数学核心素养的考查覆盖了六大关键能力，整体设计较为全面，但各能力的考查分布存在显著差异。其中，数学抽象(29.73%)、逻辑推理(28.38%)和数学运算(24.32%)三种能力占据了习题总量的 82.43%，构成了考查的绝对主体，体现了本章节对函数概念理解、性质推导和计算应用的高度重视。相比之下直观想象(8.11%)和数学建模(8.11%)的考查比例明显偏低，而数据分析能力(1.35%)的考查则近乎边缘化。这种分布格局反映出当前习题设计仍偏重于传统数学能力培养，对几何直观、实际应用和数据处理的关注相对不足，当然这也和本章节知识所考察的内容本身有关。

在所考察的 SOLO 水平上，展现出不同思维层次水平在习题中的占比分布，呈现出明显的阶梯式分布。这反映出教材习题作为考察本章节内容的同时，其目的是培养不同思维层次水平的学生。其中，R 水平占比最高，达到了 37.84% 的占比说明习题设计更注重考查学生整合数学知识和解决复杂问题的综合能力，强调高阶思维和数学素养的整体发展；紧随其后的是 M 水平，占比 35.14%，表明习题设计注重考查

学生对多个知识点的关联与综合运用能力；U水平 22.97%，说明习题设计更侧重学生对基础知识点的识记与理解，强调概念掌握和基本技能的训练；而E水平(拓展抽象水平)占 4.05%，说明习题设计注重考查学生的拓展迁移与创新应用能力，强调数学高阶思维和解决开放性问题能力的培养。这种分布结构体现了“重基础、强关联、适度综合”的设计特点，符合循序渐进的学习规律，能够满足不同学生的学习需求。

4. 基于 SOLO 分类理论对教学的启示

4.1. 发挥课后习题功能最大化

教材习题的设置体现了本章节的重点内容与能力要求，既能够有效诊断学生对知识的掌握程度，又能系统促进学生思维水平和关键能力的发展。教师应当充分重视课后习题的教学价值，将其视为评价与教学的重要抓手。具体而言，在完成章节内容教学后，教师可以采取以下策略：一是基于 SOLO 分类理论，将课后习题改编为分层测试题，精准评估学生所处的思维水平层次；二是采用“同题异构”的命题方式，通过改变问题情境或设问角度，深入考察学生的知识迁移能力和思维灵活性。这种基于教材习题的二次开发，既能保持教学评价的一致性，又能实现对学生核心素养的多元化培养。

4.2. 精选教学例题促思维进阶化

教师在课堂教学中要充分发挥主导作用，首先，在选择例题上必须确保与教学目标的精准对应，既要紧扣核心知识点，又要符合学生的认知发展规律。其次，设计上应当遵循 SOLO 分类理论的层级递进原则，构建系统化的教学阶梯：从单一结构水平(U)的基础认知，逐步过渡到多点结构水平(M)的知识关联，再到关联结构水平(R)的综合运用，最终达到抽象拓展水平(E)的创新迁移。这种递进式的例题设计策略，能够有效引导学生的思维实现从低到高的过度，避免随意选取例题造成的教学碎片化。为学生搭建循序渐进的学习支架，实现知识掌握与思维，能力的发展。

4.3. 实施因材施教课后活动化

在我国基础教育实施班级授课制的背景下，集体教学难以完全满足学生个体差异化的学习需求。针对这一现状，教师可以通过 SOLO 分类理论构建分层化的课后学习体系：首先，根据学生表现出的思维层次进行动态分组，为各组匹配相应层级的复习资料和习题；其次，设计阶梯式的学习任务，要求学生在熟练掌握本层级内容后，适度挑战更高思维水平的题目。这种分层策略既保证了基础知识的全员巩固，又为学有余力的学生提供了向上发展的空间，使每个学生的学习任务都能精准定位在其“最近发展区”内。通过这种差异化辅导机制，不仅能实现知识体系的系统性建构，更能有效促进不同层次学生思维能力的持续发展，最终达成因材施教的教育目标。

参考文献

- [1] 孔凡哲, 史宁中. 中国学生发展的数学核心素养概念界定及养成途径[J]. 教育科学研究, 2017(6): 5-11.
- [2] 徐斌艳. 数学学科核心能力研究[J]. 全球教育展望, 2013, 42(6): 67-74+95.
- [3] 朱立明. 高中生数学关键能力: 价值、特质与操作性定义[J]. 天津师范大学学报(基础教育版), 2021, 22(2): 49-54.
- [4] 曹一鸣, 刘坚. 促进学生数学核心素养与关键能力发展的教学研究[J]. 中小学课堂教学研究, 2017(4): 3-6.
- [5] 潘竹树, 李伟. 借助数学模型培养关键能力——以“最短路径问题”为例[J]. 数学通报, 2022, 61(10): 39-43.
- [6] 朱贵玺. 数学解决问题过程中须培养的四种关键能力[J]. 教学与管理, 2020(2): 36-38.
- [7] 张扬, 王宗信. 变化基本图形生长关键能力——通过数学实验变化四边形进行单元教学的尝试[J]. 数学通报, 2022, 61(1): 33-35.

-
- [8] 宋建华. 基于核心素养和关键能力的高中生数学阅读能力培养研究[J]. 科技资讯, 2020, 18(24): 142-143+146.
- [9] 王国才, 陈灵. “五理”并举促进数学关键能力发展[J]. 人民教育, 2022(Z3): 104-105.
- [10] 章建跃, 王嵘. 中国数学教科书使用变式素材的途径和方法[J]. 数学通报, 2015, 54(10): 1-8+48.
- [11] 王嵘, 张蓓. 数学习题的多样化设计与学生数学素养的提高[J]. 课程·教材·教法, 2012, 32(10): 67-73.
- [12] 郭玉峰, 赵坤. 数学核心素养在高中教材习题中的表现研究: 以“函数”为例[J]. 教育科学研究, 2019(3): 68-74.
- [13] 王世朋, 钱良辰, 汪煦. 课本习题实施探究活动教学的路径及建议——以人教 2019 A 版数学第一册教学为例[J]. 数学通报, 2022, 61(8): 41-45.
- [14] 付钰, 张景斌. 中美数学教材三角函数习题的比较研究[J]. 数学教育学报, 2018, 27(3): 14-18.
- [15] 周莹, 廖丽红, 梁鑫, 等. 初中数学教材与课程标准的一致性研究——以“人教版”和“湘教版”中的函数习题为例[J]. 数学通报, 2017, 56(5): 6-9+14.
- [16] Biggs, J.B. and Collis, K.F. (1982) *Evaluating the Quality of Learning: The SOLO Taxonomy*. Academic Press.
- [17] 鲁依玲, 夏玉梅, 宁连华. 基于 SOLO 分类理论的高考数学试题分析——以 2022 年全国数学新高考I卷为例[J]. 数学教育学报, 2023, 32(3): 18-23.
- [18] 周莹, 陆宥伊, 吴晓红. 基于 SOLO 分类理论的中考数学试题比较研究——以 2017-2019 年南宁市中考试卷为例[J]. 数学通报, 2020, 59(3): 41-46+60.
- [19] 刘绿芹. SOLO 分类理论在高中数学作业批改中的应用[J]. 教学与管理, 2015(16): 59-61.