

十字相乘法在初中数学教学中的实践探析与策略优化

李永杰¹, 陈静毅², 张晓飞^{1*}, 郭丽娟¹

¹平顶山学院数学与统计学院, 河南 平顶山

²平顶山市第一高级中学附属中学, 河南 平顶山

收稿日期: 2025年5月10日; 录用日期: 2025年6月11日; 发布日期: 2025年6月19日

摘要

文章从十字相乘法的基本原理谈起, 探讨十字相乘法在初中阶段数学学习过程中的应用。并进一步地阐述了十字相乘法应用的优势和不足之处, 在此基础上给出了初中阶段数学学习过程中关于十字相乘法的替代方法, 旨在为初中数学教师提供有效的教学参考, 以及理性地看待十字相乘法在中学数学教学中的要求变化。

关键词

十字相乘法, 初中数学, 因式分解

Practical Analysis and Strategy Optimization of the Cross Multiplication Method in Middle School Mathematics Teaching

Yongjie Li¹, Jingyi Chen², Xiaofei Zhang^{1*}, Lijuan Guo¹

¹School of Mathematics and Statistics, Pingdingshan University, Pingdingshan Henan

²Pingdingshan NO.1 Senior High School Affiliated Middle School, Pingdingshan Henan

Received: May 10th, 2025; accepted: Jun. 11th, 2025; published: Jun. 19th, 2025

Abstract

This article begins with the basic principles of the cross-multiplication method and explores its application in mathematics learning during middle school mathematics. Furthermore, it elaborates

*通讯作者。

文章引用: 李永杰, 陈静毅, 张晓飞, 郭丽娟. 十字相乘法在初中数学教学中的实践探析与策略优化[J]. 教育进展, 2025, 15(6): 494-500. DOI: 10.12677/ae.2025.1561021

on the advantages and limitations of the cross-multiplication method. Based on this, alternative methods to the cross-multiplication method in middle school mathematics education are provided. The aim is to offer effective teaching references for middle school mathematics teachers and to rationally view the changes in the requirements for the cross-multiplication method in middle school mathematics education.

Keywords

Cross Multiplication Method, Middle School Mathematics, Factorization

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

十字相乘法作为因式分解的一种经典方法，在初中代数教学中具有独特地位。它以一种直观、灵巧的方式，将代数式拆解为两个线性因式的乘积，在数学解题、方程求解以及代数式的化简等方面具有广泛的应用。特别是在二次三项式的因式分解、一元二次方程的求解，乃至二次函数有关问题的解决中，十字相乘法以其快捷的解决过程为广大教师和优秀学生所推崇。笔者在和中学教师交流过程中发现，甚至有老师把十字相乘法的掌握及应用的熟练程度作为判断一个学生是否有数学天赋的标准之一。

2000 年《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》(下面简称“课程标准”)中去掉了十字相乘法，不同的专家学者对此持有不同的看法和意见。2008 年，首都师范大学的王尚志教授等[1][2]从“通性通法”的视角对删除十字相乘法给出了肯定的回答，并对十字相乘法的教学给出合理建议。而反对将十字相乘法从课程标准中删除的学者认为该方法具有重要的应用价值：首先，作为基本运算工具，它不仅广泛应用于初中阶段的代数运算和一元二次方程的求解，更是高中数学学习中不可或缺的重要方法和技巧；其次，该方法在培养学生数学思维能力、提升观察分析能力等方面具有独特的教育功能，熟练掌握该方法将对后续数学学习产生深远影响[3]-[6]。尽管学术界对其必修地位仍存争议，但多数一线教师仍将其作为处理因式分解、解一元二次方程等问题的重要补充内容。基于这一共识，近年来关于十字相乘法教学研究论文层出不穷，或从数学史的视角谈十字相乘法的教与学[7]-[9]，或从中外教学对比进行研究[10]，内容丰富，笔者深受启发。2024 年江苏省南通市首开东洲初级中学的徐黄娟[11]老师从经历过程提升素养的角度分享了十字相乘法的教学感悟与成效。但从查阅到的文献中发现，对十字相乘法教学问题的研究多聚焦于微观层面，很少有宏观视角的系统性探讨。基于此，本文拟从十字相乘法的原理谈起，对其展开全面探讨，以期与中学数学教育工作者深入交流，共同推进中学数学教学研究的发展。

2. 十字相乘法的原理

我国现代数学教育家张奠宙指出要“提供各种数学历史背景，让学生了解数学的原始思考及其来龙去脉，获得真正的理解”。[12]以这一思想为指导，为了使學生能够对十字相乘法有深刻的认识和理解，本文首先从十字相乘法概念的提出和原理谈起。十字相乘法的思想可以追溯到古代数学中二次方程求解和因式分解的相关内容。例如，古代中国的《九章算术》中就有关于二次方程问题的记载和求解方法。虽然当时没有明确提出十字相乘法这一具体名称和形式，但在求解二次方程或进行多项式的因式分解时，已经蕴含了类似的思想。十字相乘法这一概念的雏形大概最早出现于 1896 年吉雷特所著的《初等代数》一书中，作者在书中采用十字交叉线的形式进行因式分解[11]。追根溯源，这一做法可能是古代的数学家

们受到多项式竖式乘法的启发而得到。十字相乘法是通过将二次多项式的二次项系数和常数项分别分解为两个因数的乘积，并使得这两组因数经过适当组合、交叉相乘后相加的结果恰好等于一次项的系数，从而实现对二次多项式的因式分解。

我们可以从下面两个视角来认识十字相乘法：

1) 多项式乘法的逆运算。我们知道 $(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$ ，所以对于多项式 x^2+bx+c ，我们的目标是找到满足条件 $p+q=b$ 和 $pq=c$ 的实数 p 和 q ，使得 $x^2+bx+c=(x+p)(x+q)$ 。例如对于多项式 $x^2+7x+12$ ，经观察我们发现当 $p=4, q=3$ 时满足 $p+q=7, pq=12$ ，所以 $x^2+7x+12=(x+4)(x+3)$ 。

2) 系数的关系。对于一般的二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq 0)$ ，如果它可以分解成因式的乘积 $(kx+p)(lx+q)$ ，即 $ax^2+bx+c=(kx+p)(lx+q)=klx^2+(kq+pl)x+pq$ ，则 $a=kl, b=kq+pl, c=pq$ 。所以十字相乘法就是利用这种系数之间的关系来寻找恰当的 k, l, p, q 。例如对于多项式 $2x^2+11x+15$ ，我们假定 $2x^2+11x+15=(2x+p)(x+q)$ ，则 $pq=15$ 。通过尝试发现当 $p=5, q=3$ 时， $2\times 3+1\times 5=11$ ，满足系数关系，所以 $2x^2+11x+15=(2x+5)(x+3)$ 。

3. 十字相乘法的应用

十字相乘法作为中学数学解题的一种重要技巧，在代数运算、方程求解等知识模块中都具有广泛的应用价值。若能熟练掌握该方法，不仅能显著提升解题效率，更能培养学生的数感与代数思维，对后续数学学习具有积极的促进作用。

1) 因式分解。十字相乘法是对二次多项式进行因式分解的重要方法之一。但是从十字相乘法的原理来看，十字相乘法不一定可以求解任意的因式分解问题。在有理数域内，二次三项式 ax^2+bx+c 能否进行因式分解关键是判断 $\Delta=b^2-4ac$ 是否为完全平方数，例如在多项式 x^2+3x+1 中， $\Delta=3^2-4=5$ 不是完全平方数，所以 x^2+3x+1 不能进行因式分解。但是，在能够成功应用十字相乘法的情形下，该方法往往是十分高效快捷的。2023 年师三分老师[13]分多种情况深入浅出地阐述了十字相乘法在因式分解中的应用，这些方法的熟练应用既能提高解题速度又能提升解题的准确率。

2) 求解一元二次方程。十字相乘法提供了一种直观高效且简便的求解一元二次方程的方法，该方法特别适用于有理根的情况。对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0, (a\neq 0)$ ，首先观察方程左边二次三项式 ax^2+bx+c 的各项系数，特别是二次项系数 a 和常数项 c ，若能找到满足十字相乘法 a 和 c 的恰当分解方式，则可将原方程转化为：

$$ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=0$$

由于 $(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=0$ 有两个根 $x_1=\frac{c_1}{a_1}, x_2=\frac{c_2}{a_2}$ ，所以原方程 $ax^2+bx+c=0, (a\neq 0)$ 有两个根 $x_1=\frac{c_1}{a_1}, x_2=\frac{c_2}{a_2}$ 。在求解一元二次方程时，十字相乘法与其他方法相比有下面的优势与不足(见表 1)。

Table 1. Advantages and limitations of the cross multiplication method in solving quadratic equations

表 1. 十字相乘法在求解一元二次方程时的优势与不足

序号	方法	优点	不足
1	十字相乘法	计算快捷，思维更直观	仅能适用于有理根的情形
2	配方法	通用性强，可得顶点坐标	步骤繁琐，符合易出错
3	求根公式	适用于所有二次方程	计算量大，易漏判别式

3) 化简分式。十字相乘法在分式加减和复杂分式化简等过程中有广泛应用。在对分式进行加减运算时, 可以先对分母进行因式分解, 然后再进行通分运算求得结果。例如:

$$\frac{5}{3x^2+7x+2} + \frac{4}{3x^2-2x-1} = \frac{5}{(3x+1)(x+2)} + \frac{4}{(3x+1)(x-1)} \\ = \frac{3}{(x+2)(x-1)}, x \neq -2, x \neq 1.$$

在对一些含有二次三项式的分式进行化简时, 可先分别对分子分母中的二次三项式用十字相乘法因式分解, 然后约分, 从而简化分式。例如:

$$\frac{x^2+5x+6}{2x^2+11x+14} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(2x+7)} = \frac{x+3}{2x+7}, x \neq -\frac{7}{2}$$

十字相乘法在分式化简中不仅比配方法操作简便、高效准确而且可以培养学生的代数转换变形能力, 促进同学们数学核心能力素养的提升。

4) 求解不等式问题。十字相乘法是一元二次不等式解法使用频率较高的方法之一。

在求解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$ 时, 可通过十字相乘法将不等式转化为两因式乘积的形式, 然后结合乘积的符合性质和数轴分析, 能高效快捷地确定解集范围。例如: 求解不等式 $x^2-9x+14>0$ 。用十字相乘法可以很容易地将 $x^2-9x+14$ 表示为 $(x-2)(x-7)$, 从而原不等式转化为 $(x-2)(x-7)>0$, 故 $\begin{cases} x-2>0 \\ x-7>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2<0 \\ x-7<0 \end{cases}$, 解得 $x<2$ 或 $x>7$ 。在处理不等式问题时, 十字相乘法与其他方法相比有下面的优势与不足(见表 2)。

Table 2. Advantages and limitations of the cross multiplication method in solving inequality problems

表 2. 十字相乘法在处理不等式求解问题时的优势与不足

序号	方法	优点	不足
1	十字相乘法	计算快捷, 符号分析直观	仅能适用于可分解的情形
2	配方法	通用性强, 可求顶点	步骤繁琐, 符号易错
3	图形法	直观展示函数图像	绘图耗时, 精确度低

5) 二次函数中的应用。十字相乘法在二次函数的零点求解、图像分析中具有高效性和直观性的特点, 它是初中数学学习的有力工具。对于二次函数 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$, 当 $y=0$ 时, 就转化为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 。通过十字相乘法可以较容易地得到方程的两个根 x_1 和 x_2 (两个实根若存在), 从而原二次函数 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$, 可以容易看出该二次函数描绘的二次曲线与 x 轴有两个交点 $(x_1,0)$ 和 $(x_2,0)$ 。在处理二次函数问题时, 十字相乘法与其他方法相比有下面的优势与不足(见表 3)。

Table 3. Advantages and limitations of the cross multiplication method in solving quadratic function problems

表 3. 十字相乘法在处理二次函数问题时的优势与不足

序号	方法	优点	不足
1	十字相乘法	计算快捷, 直观容易理解	仅能适用于有理根的情形
2	配方法	通用性强, 可得顶点式	计算复杂
3	求根公式	适用于所有二次函数	计算量大, 符号容易出错

4. 十字相乘法的应用优势与局限性

通过第三部分的应用分析，我们可以清晰地看到十字相乘法的一些应用优势和局限性。

1) 应用优势

直观简便：十字相乘法通过直观的分解和验证步骤，简化了计算过程，提高了解决问题的效率。在解决因式分解问题的过程中，十字相乘法相较于提公因式法、公式法、拆项法等，优势明显；特别是对于因式分解作为一些复杂问题的一部分之类的题目，这种优势尤其受广大师生的欢迎。

高效求解：十字相乘法不仅是因式分解的一种特效方法，该方法还能够快速找到一元二次方程的解，把二次函数表示成 $y = (x - m)(x - n)$ 的形式，能够提高求解效率。

广泛应用：鉴于上述优点，十字相乘法在数学解题、方程求解以及代数式的化简等方面具有广泛的应用。也造成在课程改革二十多年，十字相乘法在中学数学教学中仍有一定的市场。

2) 局限性

首先，十字相乘法要求学生具备较强的数感和运算能力。对于系数较小的整系数二次三项式的因式分解和一元二次方程的求解，特别是二次项系数和常数项的质因数较少的问题能带来较便捷的运算，但是当二次项系数或者常数项较大、质因数个数较多或者系数是分数、无理数时，十字相乘法应用起来比较困难，甚至不能使用。其次，十字相乘法缺乏通用性，无法解决复数根的问题。一方面初中学生没有学习复数的概念与运算，另一方面在初中阶段因式分解仅限于实数特别是有理数范围内。最后，对于含有参数或系数为分数的一元二次方程，可能无法直接应用。

5. 全日制义务教育数学课程标准对十字相乘法的要求及其删除原因分析

十字相乘法虽然已被课程标准移除，但这一备受中学数学教师推崇的解题方法，其被明确作为教学内容的历史可追溯至二十世纪六十年代。1963 年教育部门颁布的《全日制中学数学教学大纲(草案)》中，该方法首次以“十字交叉法”的名称被正式列为教学内容，至今已有六十余年的教学实践历史。此后，随着数学教学大纲的多次修订，直到 1986 年颁布的《全日制中学数学教学大纲》才首次正式采用“十字相乘法”这一名称，并将其明确列为选学内容。在 1988 年至 1992 年之间，国家又先后三次对教学大纲进行了修订和调整，十字相乘法的具体教学要求也呈现出细微差异。最终，2000 年颁布的《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲(试用修订版)》中正式取消了这一内容的教学要求，不认为十字相乘法是分解因式的基本方法，并延续至今。关于十字相乘法历史沿革的详细内容，读者可以参阅[6] [14] [15]。

尽管十字相乘法在简化代数运算等方面具有显著优势，但自 2000 年以来，我国历次修订的义务教育数学课程标准均未再将其纳入必修内容。这一调整可能源于教学实践中的现实考量：十字相乘法对多数初中学生而言存在较大的理解难度，其掌握程度往往也难以达到预期的教学效果。基于查阅到的文献资料[1] [2] [14]与教学实践，笔者认为初中阶段学生在掌握十字相乘法时主要面临以下四个方面的学习困难：

1) 理解原理困难

十字相乘法是基于乘法分配律和因式分解原理的一种方法，但初中生在初次接触时往往难以理解其背后的数学原理。

2) 分解系数困难

在十字相乘法中，需要将二次项系数和常数项进行分解，找到两组数，它们的乘积分别等于二次项系数和常数项，且它们的和等于一次项系数。这一步骤对初中生来说较为困难，容易出错。

3) 确定符号困难

在分解系数后，需要确定每组数的符号。由于乘法中同号得正，异号得负的规则，学生在确定符号

时容易混淆，再加上有理数加法法则的复杂性，容易导致结果错误。

4) 计算过程繁琐

十字相乘法虽然能够简化一元二次方程的求解过程，但相对于直接求根公式来说，其计算过程仍然较为繁琐，需要学生进行多次运算和验证。

6. 十字相乘法的替代方法

基于十字相乘法在实践应用中的一些局限性，也可以采用其他更具普适性的方法进行替代。根据笔者的教学观察与实证研究，较为有效的替代方法主要包括以下几种：

1) 拆项法 + 提取公因式法：在多项式中通过拆解某项，使其一部分和其他项相结合，结合的两项含有某个公因式，剩下的那部分和其他项含有公因式，那么可以把各自的公因式提取出来，一般来说，提取一次公因式后还可以再次提取公因式，从而将多项式化为两个因式乘积的形式。

2) 配方法 + 公式法：配方法往往与公式法搭配应用。这是一种先根据二次多项式的二次项和一次项将多项式配方为完全平方形式，再利用平方差公式进行分解的方法，从而可以更容易地找到其根或进行因式分解。

3) 因式定理法：如果一个多项式在 $x = a$ 处取值为 0，那么这个多项式可以被 $(x - a)$ 整除。利用这个性质，我们可以尝试找出多项式的零点，从而得到其因式。这种方法往往将二次三项式的因式分解转化为一元二次方程的求解问题。

4) 综合除法：这是一种用于多项式除法的算法，也可以用于因式分解，特别是对含有一次有理因式的一元高次多项式的因数分解问题，综合除法应用起来比较简便。因为综合除法的理论基础是因式定理，同时在试除过程中需要对系数进行因数分解，一般来说，综合除法往往与因式定理、因数分解结合应用，但是，综合除法应用起来比较复杂，不要求初中学生掌握，仅作为教师的“秘方”。

5) 待定系数法：当多项式因式分解的形式已知但系数未知时，可以先将待分解的多项式写成既定形式，再利用多项式恒等理论，通过解方程组来找到这些待定系数，从而实现多项式的因数分解。这种方法对二次三项式尤其有效。

6) 一元二次方程的求根公式法：如果一个一元二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 在实数范围内能够因式分解，那么一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 必有两个实数根 x_1 和 x_2 ，使得 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ，这样就完成了因数分解。这也可以看作是“低配版”的因式定理。

7. 结束语

十字相乘法这一看似简洁明了的代数技巧，实则蕴藏着深邃的数学思想与丰沛的教学智慧。它虽然未被纳入正在执行的全日制义务教育数学课程标准作为必修内容，但这并不意味着十字相乘法没有教学价值或实际应用。事实上，十字相乘法在解决某些特定类型的二次三项式因式分解问题时，具有简洁、高效的特点。教师在实际教学中不仅要传授学生操作之“术”，更要着重传递背后的数学原理与思维之“道”，要根据学生的学习情况和需求，适当补充和拓展相关知识内容，通过引导学生理解和掌握十字相乘法的原理和应用，帮助学生更好地解决数学问题，培育学生逻辑思维、强化数感以及提高数学素养和解题能力。唯有如此，才能让学生在熟练掌握十字相乘法的同时，深切领略到数学所独有的简洁之美与精妙之妙。

基金项目

- 1) 平顶山学院“互联网 + 教育”专题教学研究与实践项目(编号：HLW202023);
- 2) 河南省哲学社会科学教育强省研究项目(编号：2025JYQS0350)。

参考文献

- [1] 王尚志, 张思明, 胡凤娟. 如何认识“十字相乘法”? (一) [J]. 中学数学教学参考, 2008(11): 6-8.
- [2] 王尚志, 张思明, 胡凤娟. 如何认识“十字相乘法”? (二) [J]. 中学数学教学参考, 2008(13): 17-18.
- [3] 王怀喜. 请给“十字相乘法”留一席之地[J]. 中小学数学(初中版), 2013(Z1): 84.
- [4] 邝孔秀. “十字相乘法”该删吗? [J]. 数学通报, 2001(10): 22-23.
- [5] 李冰. 对北师大版新课标初中数学教材的几点商榷[J]. 教学与管理, 2008(11): 70-72.
- [6] 郭蕊. 初中数学“十字相乘法”教与学的调查研究[D]: [硕士学位论文]. 乌鲁木齐: 新疆师范大学, 2016.
- [7] 贾彬, 余庆纯. “十字相乘法”: 基于学生问题, 选取 HPM 视角[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2020(6): 40-47.
- [8] 邵爱娣, 余庆纯, 汪晓勤. HPM 视角下的“十字相乘法”课例研究[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(5): 10-15.
- [9] 段贵霞. 数学史融入课堂教学——以“十字相乘法”为例[J]. 上海中学数学, 2021(7): 70-71, 83.
- [10] 徐智愚. 再谈“十字相乘法” [J]. 上海中学数学, 2009(6): 1-2.
- [11] 徐黄娟. 经历过程提升素养——以“十字相乘法”教学为例[J]. 数学教学通讯, 2024(8): 40-42.
- [12] 王兄. 基于图式的数学学习研究[D]: [博士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2004.
- [13] 师三分. 解析初中数学因式分解运用思路——以“十字相乘法”为例[J]. 数学之友, 2023, 37(6): 35-36.
- [14] 李静贤. 初中生学习“十字相乘法”的学习障碍研究[D]: [硕士学位论文]. 广州: 广州大学, 2021.
- [15] 数学课程标准研制组. 数学课程标准解读[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2008.