Advances in Education 教育进展, 2025, 15(6), 417-422
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2025.1561010

2024年高考数学新课标II卷第8题函数最值的解法与思想探究

刘　硕*，邹心茹，刘愉宇

吉林师范大学数学与计算机学院，吉林　四平

收稿日期：2025年5月10日；录用日期：2025年6月11日；发布日期：2025年6月18日

摘　要

函数性质、不等式恒成立与最值的综合应用问题不仅是高中数学的重要知识点，更是高考数学的主要考点。本文基于2024年高考数学新课标II卷第8题，探讨了如何利用不同的数学工具和方法来解决函数最值问题，为中学生解决此类数学问题提供多种思路和方法借鉴，有助于提升学生的数学思维能力和解题技巧。

关键词

函数性质，不等式，最值，零点，分类讨论法，图象直观法，转化与化归思想

Exploration of the Solution Methods and Thought Processes for the Function Maximum and Minimum Problem in the 2024 National College Entrance Examination Mathematics New Curriculum Standard II Test, Question 8

Shuo Liu*, Xinru Zou, Yuyu Liu

College of Mathematics and Computer, Jilin Normal University, Siping Jilin

Received: May 10th, 2025; accepted: Jun. 11th, 2025; published: Jun. 18th, 2025

*通讯作者。

文章引用: 刘硕, 邹心茹, 刘愉宇. 2024年高考数学新课标II卷第8题函数最值的解法与思想探究[J]. 教育进展, 2025, 15(6): 417-422. DOI: 10.12677/ae.2025.1561010

Abstract

The comprehensive application problems of function properties, the constant validity of inequalities and extremums are not only important knowledge points in high school mathematics, but also the main examination points in the mathematics of the college entrance examination. Based on Question 8 of the 2024 College Entrance Examination Mathematics New Curriculum Standard Volume II, this article explores how to use different mathematical tools and methods to solve the problem of maximum and minimum values of functions, providing multiple ideas and methodological references for middle school students to solve such mathematical problems, which is conducive to enhancing students' mathematical thinking ability and problem-solving skills.

Keywords

Function Properties, Inequality, Most Valuable, Zero O'Clock, Classification Discussion Method, Image Visualization Method, The Idea of Transformation and Reduction

1. 引言

函数在高中数学中占有重要地位，从知识体系看，它是代数的关键内容，与方程、不等式等联系紧密，许多数学问题可转化为函数问题求解。从思想方法讲，函数思想是重要的数学思想，能通过建立函数模型来分析和解决实际问题及数学问题。从能力培养来说，学习函数有助于提升学生的逻辑思维、抽象概括、运算求解和数学建模等多种能力。同时，它也是后续学习高等数学等知识的必备基础，在高中数学教学与学习中都具有极其重要的意义。本题以一次函数与对数函数为载体，以函数的最值和对数函数的单调性等基础知识为主要考察内容，考查图象直观、分类讨论、化归与转化思想，考查学生的逻辑推理能力和综合运用所学知识，分析问题和解决问题的能力。

2. 真题呈现

(2024 年全国新高考II卷·8)设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若 $f(x)\geq 0$，则 a^2+b^2 的最小值为(　)。

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

3. 问题剖析

本题属于给定一个函数，在满足一定条件下，求相关表达式最值的问题。位于高考数学新课标第 8 题(单项选择的最后一题)，难度中等偏上，巧妙结合函数的基本性质、对数函数的特点以及不等式恒成立等多个重要考点，全面考察了学生对函数知识的掌握程度，是对高中函数板块知识综合运用能力的检验，在试卷中起到承上启下的作用，既不是过于简单基础的题目，也不是难度极高的压轴题，处于区分中等水平和中上等水平学生的关键位置。解决本题的关键在于发现隐含于基本题设中的两个参数之间的关系，进而将问题转化为求坐标原点到直线的距离或求二次函数的最小值，故可将此问题拆分成求参数 a 与 b 关系和已知参数关系求 a^2+b^2 最小值问题两步，下面将分两步探讨多种解法。

4. 真题破解

(1) 第一步：求参数 a 与 b 关系

方法 1：分类讨论定参法

由题意可知，$f(x)=(x+a)\ln(x+b)$ 的定义域为 $(-b,+\infty)$。

令 $x+a=0$，解得 $x=-a$；令 $\ln(x+b)=0$，即 $x=1-b$。

若 $-a\le -b$，当 $x\in(-b,1-b)$ 时，可知 $x+a>0$，$\ln(x+b)<0$，此时 $f(x)<0$，不符合题意；

若 $-b<-a<1-b$，当 $x\in(-a,1-b)$ 时，可知 $x+a>0$，$\ln(x+b)<0$，此时 $f(x)<0$，不符合题意；

若 $-a=1-b$，当 $x\in(-b,1-b)$ 时，可知 $x+a<0$，$\ln(x+b)<0$，此时 $f(x)>0$；当 $x\in[1-b,+\infty)$ 时，可知 $x+a\ge 0$，$\ln(x+b)\ge 0$，此时 $f(x)\ge 0$，符合题意；

若 $-a>1-b$，当 $x\in(1-b,-a)$ 时，可知 $x+a<0$，$\ln(x+b)>0$，此时 $f(x)<0$，不符合题意。

综上所述，$-a=1-b$，即 $a-b+1=0$。

点评：此方法逻辑严谨，通过对不同情况的细致讨论，能全面且准确地得出参数之间的关系。但需要对多种情况进行逐一分析，耗费时间较长。而且在分类讨论过程中，学生容易出现遗漏或重复讨论的情况，对学生的细心程度要求较高。适用于函数形式较为复杂，通过其他简单方法难以直接得出参数关系，且函数在不同区间上性质差异较大的情况。对于基础扎实、逻辑思维能力较强，且有足够时间进行细致分析的学生来说，这种方法是一个不错的选择。

方法 2：函数性质析参法

要使 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)\ge 0$ 有意义，则 $x+b>0$，即 $x>-b$。

令 $y_1=x+a$，$y_2=\ln(x+b)$

因为 $f(x)\ge 0$，所以原不等式等价为 $\begin{cases}x+a\ge 0\\ \ln(x+b)\ge 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+a\le 0\\ \ln(x+b)\le 0\end{cases}$。

由 $\ln(x+b)\ge 0=\ln 1$，得 $x+b\ge 1$，即 $x\ge 1-b$；由 $\ln(x+b)\le 0=\ln 1$，得 $0<x+b\le 1$，即 $-b<x\le 1-b$。

对于 $y_1=x+a, y_1=0$ 时，$x=-a$。

为了满足 $f(x)\ge 0$ 恒成立，那么 $-a=1-b$，即 $a-b+1=0$。

点评：从函数的基本性质出发，解题思路常规且自然，容易理解。但对学生函数知识的掌握程度要求较高，需要学生能够熟练运用函数的各种性质进行推理和判断。在处理较为复杂的函数时，可能会因为涉及较多的性质分析而导致思路混乱。适用于函数性质较为明确，且学生对函数基本性质掌握较好的情况。尤其适合那些在函数知识方面有扎实基础，善于从函数本身性质出发思考问题的学生。

方法 3：图象直观寻参法

画出 $y=x+a$ 和 $y=\ln(x+b)$ 的图像：

$y=x+a$ 是一条斜率为 1，截距为 a 的直线，$y=\ln(x+b)$ 是由基本对数函数 $y=\ln x$ 向左 $(b>0)$ 或向右 $(b<0)$ 平移 $|b|$ 个单位得到的，定义域为 $(-b,+\infty)$，过点 $(1-b,0)$。

如图 1 所示，要使 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)\ge 0$ 在定义域 $(-b,+\infty)$ 上恒成立，就是要求在定义域内，两个函数的函数值需同号。这意味着两个函数的零点必须重合，因为只有零点重合，才能保证在定义域的不同区间上，两个函数同时非负或同时非正，所以可得 $-a=1-b$，即 $a-b+1=0$。

点评：借助图象直观形象，通过分析函数单调性和函数零点直接得到答案，不需要求导，不需要分类讨论，考查学生的数学能力。对于有一定几何直观能力的学生来说，解题速度较快，但对学生绘制函数图象的准确性要求较高。适用于函数图象特征明显，容易绘制的情况。对于那些几何直观能力较强，善于通过图象分析问题的学生，这种方法能够快速找到解题的突破口[1]。

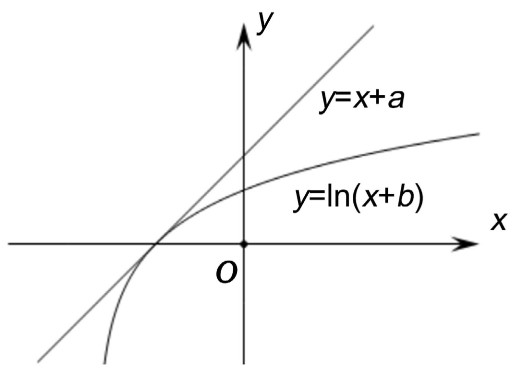

Figure 1. $y=x+a$ and $y=\ln(x+b)$ the graph of the function

图 1. $y=x+a$ 与 $y=\ln(x+b)$ 函数图象

方法 4：转化化归得参法

$y=\ln(x+b)$ 的符号与 $y=x+b-1(x>-b)$ 的符号一致，所以 $f(x)\geq 0$ 等价于 $(x+b)(x+b-1)\geq 0$ 且 $x>-b$，注意到该一元二次不等式有个零点为 $x=1-b>-b$，则该零点只能为保号零点(零点两侧符号一致)，即 $\Delta=0$ (或两根相等)，所以 $-a=1-b$，即 $a-b+1=0$。

点评：将复杂的函数问题转化为熟悉的二次函数问题，利用二次函数的零点性质来求解参数关系，简化了问题的难度。但需要学生对二次函数的性质，特别是零点的概念有深入的理解。在转化过程中，如果对原函数的结构分析不准确，可能会导致转化错误，从而得出错误的结果。适用于函数结构可以转化为与二次函数相关的形式，且学生对二次函数知识掌握熟练的情况。对于善于运用数学思想方法，将复杂问题简单化的学生来说，这种方法是一种快速的解题途径。

(2) 第二步：已知参数关系 $a-b+1=0$，求 a^2+b^2 的最小值

方法 1：几何意义求最值法

由于 a^2+b^2 的几何意义是点 (a,b) 到原点 $(0,0)$ 距离的平方，且点 (a,b) 满足直线 $a-b+1=0$，故可将问题转化为求坐标原点 $(0,0)$ 到直线 $a-b+1=0$ 的距离的最小值。由点到直线的距离公式可得 $d=\dfrac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 a^2+b^2 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$。

点评：巧妙地利用了 a^2+b^2 的几何意义，将代数问题转化为几何中的点到直线距离问题。这种方法直观形象，计算量较小，解题效率较高，但对学生的几何直观和空间想象能力有一定要求。而且在某些情况下，可能难以直接将代数表达式与几何意义建立联系。适用于所求代数式具有明显几何意义，且相关几何图形和性质容易确定的情况。例如，在涉及到距离、面积等几何量与代数表达式的关联时，这种方法能发挥较大优势。

方法 2：二次函数求最值法

将问题转化为当 a,b 满足 $a-b+1=0$ 时，求 a^2+b^2 的最小值。由 $a-b+1=0$ 得 $b=a+1$，于是 $a^2+b^2=a^2+(a+1)^2=2\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{1}{2}$，当且仅当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立。所以 a^2+b^2 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$。

点评：通过将 b 用 a 表示，代入 a^2+b^2 转化为关于 a 的二次函数，利用二次函数的性质求最值。思路直接，是一种常规且基础的方法。对学生的知识基础要求相对较低，只要熟练掌握二次函数的配方和最值求解方法，就能顺利解题。但计算过程可能较为繁琐，需要进行准确的代数运算和配方。适用于参数关系可以较为容易地转化为一个变量表示另一个变量，且对二次函数知识掌握扎实的学生。尤其适合在

考试中，当其他方法不易想到时，此方法可以作为一种保底的解题方法。

方法 3：柯西不等式求最值法

根据柯西不等式$\left(m^2+n^2\right)\left(p^2+q^2\right)\geq(mp+nq)^2$，对于$a^2+b^2$，令$m=a, n=b, p=1, q=-1$，则$\left(a^2+b^2\right)\left(1^2+(-1)^2\right)\geq\left[a\times1+b\times(-1)\right]^2=(a-b)^2$。

由$a-b+1=0$得$a-b=-1$，所以$2\left(a^2+b^2\right)\geq1$，即$\left(a^2+b^2\right)\geq\frac{1}{2}$，当且仅当$\frac{a}{1}=\frac{b}{-1}$且$a-b=-1$时取等号，解得时$a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$时，所以$a^2+b^2$的最小值为$\frac{1}{2}$。

点评：运用柯西不等式构建与a^2+b^2相关的不等式关系来求解。这种方法技巧性较强，能快速得到a^2+b^2的取值范围。但要求对柯西不等式的形式和应用条件有清晰的认识。适用于题目中参数的形式和条件符合柯西不等式应用场景的情况。对于数学基础较好，对不等式知识有深入研究，且善于运用技巧解题的学生来说，这种方法是一个有力的解题工具。

5. 启示

5.1. 解题方法多样，区分度良好

本题解题切入点丰富，解法灵活多样。不同解法反映出考生各异的数学思维水平，无论数学基础如何，考生都能尝试作答，但在答案的准确性、解题的灵活性与效率上会有所差异[2]。

5.2. 筑牢知识根基，把握解题关键

本题中函数的概念、性质以及对数函数的特点等基础知识贯穿始终，强调知识的生成和知识之间的联系。这启示我们在日常教学中，必须加强学生对各类基础知识和基本方法的深刻理解，多做针对性练习，强化学生对知识的综合应用能力[3]。

5.3. 巧用数学思想，优化解题方法

数形结合、分类讨论、转化与化归等数学思想在解题中发挥着关键作用。在今后的教学中，我们要培养学生善于根据题目特点选择合适的数学思想，从多角度思考问题，培养思维的灵活性和创新性，从而优化解题思路，提高解题效率。

5.4. 聚焦创新培育，精铸素养内核

逐步加强考查数学创新素养是新高考命题的新特点和新趋势。对此，应实施数学创新教育和创新学习。对于学生提出一个新问题、发现一种新解法、表达一个新观点等都属于创新，这些点滴、微小的创新可称为创新的星火，教师应善于点燃、呵护创新的星火，使之逐渐成燎原之势[4]。

5.5. 回归数学本质，提高数学素养

“数学本质”就是引导学生能够用数学的眼光观察世界，用数学的思维思考世界，用数学语言表达世界，不断提升和发展学生的思维品质。因此，数学教学就要遵循数学学科和学生思维发展的规律特征，通过创设问题的不断解决，揭示相关数学规律、结论背后的学生思维过程，并最终形成长久的自身的一种数学素养[5]。

参考文献

[1] 雷波，孔小琼. 落实“四翼”考查要求助力创新人才选拔——2024 年高考数学新课标卷部分试题评析[J]. 数学教学通讯, 2024(24): 7-11.

[2] 杨捷. 回归教材回顾真题提升素养——2024 年高考数学新课标II卷试题分析[J]. 中学教学参考, 2025(5): 9-11+21.

[3] 熊洪智. 优化试卷结构·突出主干知识·深化关键能力——2024 年高考数学新课标II卷试题评析[J]. 云南教育(中学教师), 2024(11): 31-34.

[4] 陈香君, 赵思林. 2024 年高考数学新课标II卷试题评价与教学建议[J]. 教育科学论坛, 2024(34): 48-51.

[5] 张刚, 马杰. 2024 年高考数学新课标II卷评析与思考[J]. 数学通讯, 2024(16): 39-43.