

快速傅里叶变换(FFT)教学改革探索与实践

李雪波*, 陈 姣, 黄芸霁, 魏正元

重庆理工大学数学科学学院, 重庆

收稿日期: 2025年6月12日; 录用日期: 2025年7月11日; 发布日期: 2025年7月21日

摘 要

快速傅里叶变换因其高效的计算特性成为数字信号处理的核心工具, 但其数学推导与时-频转换机理的高度抽象常给课堂教学带来障碍。为解决这一难点, 本文在系统梳理傅里叶级数及连续、离散傅里叶变换理论体系的基础上, 以实测风速波动信号为例, 设计并实现逐阶频率叠加的可视化教学方案, 有助于学习者直观把握各频率分量的物理意义与信号重建机理。

关键词

快速傅里叶变换, 教学方法

An Exploration and Practice of Teaching Reform in Fast Fourier Transform (FFT)

Xuebo Li*, Jiao Chen, Yunpei Huang, Zhengyuan Wei

School of Mathematical Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Jun. 12th, 2025; accepted: Jul. 11th, 2025; published: Jul. 21st, 2025

Abstract

The Fast Fourier Transform (FFT), due to its computational efficiency, has become a fundamental tool in digital signal processing. However, its abstract mathematical derivation and the underlying principles of time-frequency conversion often pose challenges in classroom instruction. To address this issue, this study systematically reviews the theoretical framework of Fourier series as well as continuous and discrete Fourier transforms. Using measured wind speed fluctuation signals as a case study, a step-by-step frequency superposition visualization scheme is designed and implemented. This approach facilitates learners' intuitive understanding of the physical meaning of individual frequency components and the mechanism of signal reconstruction.

*通讯作者。

文章引用: 李雪波, 陈姣, 黄芸霁, 魏正元. 快速傅里叶变换(FFT)教学改革的探索与实践[J]. 教育进展, 2025, 15(7): 695-703. DOI: 10.12677/ae.2025.1571273

Keywords

Fast Fourier Transform, Teaching Method

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)作为一种高效实现离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)的方法,在数字信号处理、通信系统、图像处理、生物医学工程等领域中发挥着关键作用[1]。FFT通过优化计算流程,将DFT的时间复杂度从 $O(N^2)$ 降至 $O(N \log_2 N)$,极大地提升了大规模频域分析的可行性与应用效率[2]。掌握FFT算法不仅对于深入理解频域特性至关重要,也是应用现代数字信号处理技术的基础。尽管FFT在实践中的应用广泛,但其背后的数学原理依旧具有高度的抽象性,尤其是频域与时域之间的转换关系,这使得学生在学习过程中常常面临困难[3]-[5]。

傅里叶变换将时间序列信号表示为一组不同频率正弦波的叠加,涵盖了复数运算及频率分量的理解。然而,这一过程的抽象性往往导致学生在理解其核心概念时遇到障碍。传统教学方式通常依赖于公式推导和静态频谱图展示,虽有助于介绍基本概念,但往往难以揭示频率分量如何逐步作用于时域结构,从而难以帮助学生真正理解傅里叶分解的动态特征及其物理含义[6]。

为改善这一教学困境,近年来学者们提出了多种可视化教学方法。杨富龙等(2017)[7]基于MATLAB平台构建了动态演示系统,通过展示矩形信号的傅里叶变换过程,帮助学生理解时域与频域之间的关系;王波(2018)[8]则通过可视化手段直观展示了傅里叶频移性质的影响,帮助学生理解频谱随时间变化的基本规律;李月娥等(2024)[9]进一步结合音频与图像信号的处理实例,展现了傅里叶变换在工程中的典型应用。此外,Jithin D. George (2018)[10]以几何图形化方式对FFT的核心算法进行可视化诠释,从而降低了学生对其递归分解机制的理解难度。尽管这些方法在提高教学直观性方面取得了进展,但大多数方法仍然侧重于频谱结果的展示和应用实例的分析,较少关注频率分量在时域信号形成过程中的动态演变,未能充分体现傅里叶变换在时频结构构建上的数学本质。

针对上述不足,本文提出了一种基于逐阶频率叠加的动态可视化方法,以风速时间序列数据为基础,构建频率分量与时域信号之间的双向映射。该方法通过逐步引入频率成分并通过逆变换重建时域信号,帮助学生直观理解频域成分如何影响时域信号的形态。与现有方法相比,本方法不仅提供了更加系统的频谱展示,还深入揭示了傅里叶变换的内在机制,增强了学生对FFT本质的理解。通过结合数学推导和可视化展示,本研究帮助学生全面掌握傅里叶变换的计算方法和理论内涵,从而提升他们在时频分析和FFT应用方面的能力。

总的来说,本研究所提出的动态可视化方法为FFT教学提供了新的视角,强调频域与时域转换过程中结构性规律的表达。通过更具交互性和层次性的学习体验,学生不仅能够直观理解傅里叶变换的数学原理,还能加深对信号处理等相关课程内容的理解,具有较高的教学应用价值。

2. 傅里叶变换理论与离散化基础

2.1. 傅里叶变换的基本理论

在信号处理领域,通常可以从两种视角描述信号特性:一是时域视角,即观察信号随时间的变化过

程；二是频域视角，即分析信号所包含的不同频率成分及其分布。尽管时域表示直观易懂，但复杂信号往往由多种不同频率的波动叠加而成，直接观察时域波形难以清晰揭示其内部结构。为了有效刻画信号的频率特性，傅里叶提出了将时域信号转换到频域的方法，即傅里叶变换(Fourier Transform, FT)。

傅里叶变换是一种将时间信号映射至频率域的数学工具，通过这一变换，可以将原本难以处理的时域问题转化为频域问题，从而简化分析与处理过程。其核心思想在于：任何满足一定条件的函数均可表示为不同频率的正弦波和余弦波的加权叠加[7]。通过分解，能够明确识别信号中哪些频率成分占主导，哪些频率成分贡献较小，进而为信号分析、处理与重构提供理论基础。

为了推导傅里叶变换公式，首先从周期信号的频率分解出发。傅里叶级数(Fourier Series)理论指出，任何周期为 T 的信号 $x(t)$ 可以展开为[11]：

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi n f_1 t) + b_n \sin(2\pi n f_1 t)) \quad (2.1)$$

其中， $f_1 = \frac{1}{T}$ 为基频， a_n 与 b_n 为傅里叶系数，分别由下式给出：

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi n f_1 t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi n f_1 t) dt \quad (2.2)$$

为了推导更为简洁，引入欧拉公式 $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$ ，则有以下变换：

$$\cos(2\pi n f_1 t) = \frac{1}{2} [e^{j2\pi n f_1 t} + e^{-j2\pi n f_1 t}] \quad \sin(2\pi n f_1 t) = \frac{1}{2j} [e^{j2\pi n f_1 t} - e^{-j2\pi n f_1 t}] \quad (2.3)$$

据此，可将余弦项和正弦项合并，得到傅里叶级数的复指数形式：

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_1 t} \quad (2.4)$$

其中复系数 C_n 表达为：

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi n f_1 t} dt \quad (2.5)$$

式(2.5)定义了周期信号在离散频率 $n f_1$ 上的频谱分布，而式(2.4)则描述了通过频谱系数重建原始周期信号的反演公式。

进一步地，当信号周期 $T \rightarrow \infty$ 时，基频 $f_1 \rightarrow 0$ ，离散频率分布密度逐渐趋于连续，傅里叶级数自然过渡为傅里叶变换。此时，信号 $x(t)$ 的傅里叶变换定义为：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.6)$$

其中， $\omega = 2\pi f$ 为角频率(单位为弧度每秒)， $F(\omega)$ 表示信号在角频率 ω 处的频域表示。傅里叶变换通过计算 $x(t)$ 与基函数 $e^{-j\omega t}$ 的内积，提取信号在各频率成分上的投影强度。

为进一步理解傅里叶变换的实质，可利用欧拉公式将 $e^{-j\omega t}$ 展开为：

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) \quad (2.7)$$

代入(2.6)式后，傅里叶变换可以分解为实部和虚部：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(\omega t) dt \quad (2.8)$$

式(2.8)表明，傅里叶变换实质上分别度量了信号与不同频率余弦波(实部)和正弦波(虚部)的相关程度。

为了实现频域与时域之间的双向映射, 定义傅里叶逆变换为:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.9)$$

傅里叶变换与逆变换共同构成了连续时间信号的时频变换体系, 为信号分析、滤波器设计、调制解调以及频谱估计等应用奠定了理论基础。

2.2. 离散傅里叶变换与性质

随着数字信号处理技术的不断发展, 连续时间信号在实际应用中通常需要经过离散化处理, 以适应数字系统对数据存储、运算与传输的要求。为在离散信号上延续连续傅里叶变换的频率分析能力, 发展了离散傅里叶变换[12]。DFT 本质上是在时域和频域均进行离散化的傅里叶变换形式, 可视为对离散时间傅里叶变换频谱的有限采样。

设连续时间信号 $x(t)$ 以采样周期 Δt 进行均匀采样, 得到离散时间序列:

$$x(n) = x(n\Delta t), (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (2.10)$$

其中, N 为采样点数, 采样总时长为 $T = N\Delta t$, 采样频率为 $f_s = \frac{1}{\Delta t}$ (单位为 Hz)。根据连续傅里叶变换定义(2.6), 有限采样的信号, 可以将积分限制在区间 $[0, T]$ 上, 并利用采样点近似代替积分, 得到[13]:

$$F(\omega) \approx \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n \Delta t} \quad (2.11)$$

为了进一步离散化频率变量, 引入角频率采样点 $\omega_k = k\Delta\omega$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ 。其频率分辨率为 $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N\Delta t}$, 将 $\omega = \omega_k$ 代入(2.11)式, 得到离散频率点上的表达式:

$$F(\omega_k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.12)$$

进一步定义离散频谱序列 $X(k) \triangleq F(\omega_k)$, 则可简化为离散傅里叶变换的标准形式:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.13)$$

DFT 通过有限点的加权求和, 完成了时域离散信号向频域离散频谱的转换。为了实现频域与时域之间的可逆映射, 引入离散傅里叶逆变换(IDFT):

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.14)$$

2.3. 快速傅里叶变换

使用离散傅里叶变换计算时, 需要进行 N 次复数乘法和 $N-1$ 次加法操作, 计算复杂度为 $O(N^2)$ 。当 N 较大时, 计算量巨大, 导致频域分析在实际应用中受限。为此, Cooley 与 Tukey 于 1965 年提出了快速傅里叶变换算法。它利用了 DFT 的对称性、周期性和冗余性, 将复杂度降低至 $O(N \log_2 N)$, 极大提高了处理效率。

为了推导 FFT 基本思想, 考虑 N 为 2 的整数次幂, 即 $N = 2^m$ (m 为正整数)。将原离散序列 $x(n)$ 按奇偶索引分组, 即偶数索引子序列为 $x_e(n) = x(2n)$, 奇数索引子序列为 $x_o(n) = x(2n+1)$ 。则根据 DFT 定义(2.13), $X(k)$ 可拆分为[14]:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_e(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(2n)k} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_o(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(2n+1)k} \quad (2.15)$$

整理得:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_e(n) e^{-j\frac{2\pi}{N/2}nk} + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_o(n) e^{-j\frac{2\pi}{N/2}nk} \quad (2.16)$$

记: $X_e(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_e(n) e^{-j\frac{2\pi}{N/2}nk}$, $X_o(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_o(n) e^{-j\frac{2\pi}{N/2}nk}$ 。则可以简洁地表示为递归关系:

$$X(k) = X_e(k) + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} X_o(k) \quad (2.17)$$

$$X(k + N/2) = X_e(k) - e^{-j\frac{2\pi}{N}k} X_o(k) \quad (2.18)$$

式(2.17)与(2.18)表明, 一个 N 点 DFT 可以通过两个长度为 $N/2$ 的 DFT 递归计算得到, 通过不断分治递归直至长度为 2 的基本单元, FFT 可以将整体计算量从 $O(N^2)$ 降低至 $O(N \log_2 N)$ 。

3. 快速傅里叶变换频域特性解析与应用展现

快速傅里叶变换作为数字信号处理中的核心算法, 极大地提高了频域分析与应用的效率。针对前述教学痛点, 本文结合实际教学改革需求, 设计并实现了基于 FFT 的逐阶频率叠加动态可视化方法, 旨在通过视觉化手段揭示傅里叶分解、频率成分贡献及信号重建的全过程。该方法通过实时保留和叠加不同阶数的频率分量, 并利用逆变换逐步重建时域信号, 使学生能够直观感知频率成分在信号重建中的具体作用与物理意义。

实验数据来源于实际采集的单通道风速波动信号, 采样频率为 50 Hz。为满足可视化展示需求, 从中选取前 5000 个采样点(对应时间区间为 0 至 100 秒), 该数据段包含了信号的低频、中频和高频成分, 能够充分展示信号的频率特性与多频成分的叠加。原始信号的时域波形如图 1 所示, 可以观察到该信号在时间尺度上呈现出明显的波动变化, 叠加了不同尺度的振荡特征, 体现了典型的多频率成分组合特性。

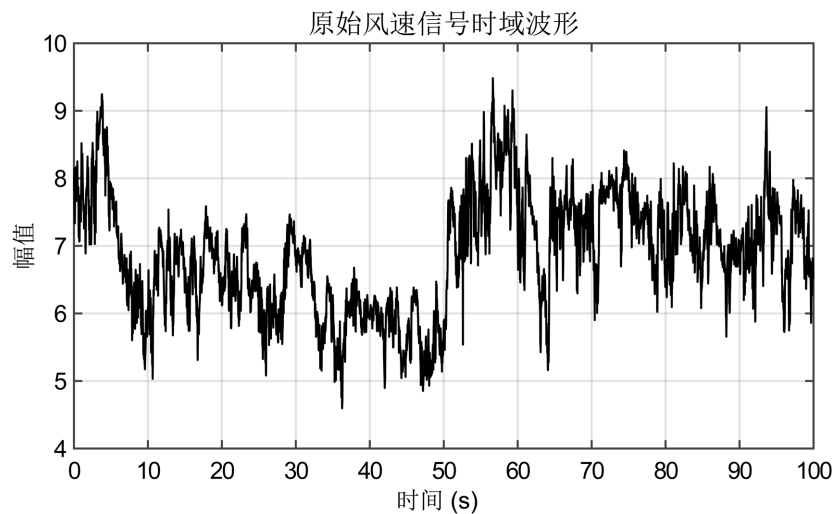


Figure 1. Raw wind velocity signal

图 1. 原始风速信号

为了进一步揭示信号所包含的频率结构特性,依据第二章推导的离散傅里叶变换标准公式(公式 2.13)对得离散时间序列 $f(n)$ 进行快速傅里叶变换处理,获得其频率域幅值分布。频率分辨率由 $\Delta f = \frac{f_s}{N}$ 确定,其中, $f_s = 50$ Hz 为采样频率, $N = 5000$ 为采样点数,因此频率分辨率为 $\Delta f = 0.01$ Hz。根据奈奎斯特采样定理(Nyquist Theorem),信号频率分析范围为 $[0, f_s/2]$, 即 $[0, 25]$ Hz。该频率设置能够完整覆盖风速信号中的主要有效频率成分,满足时频分析需求。经过归一化处理后的 FFT 幅频谱如图 2 所示。可以观察到,信号能量主要集中在低频段(0~5 Hz),在该频率范围内,幅值显著高于其他频率区域,呈现明显的能量主导特性。随着频率的增加,幅值逐步衰减。整体而言,该信号呈现出以低频为主导、多尺度频率成分叠加的典型特性。

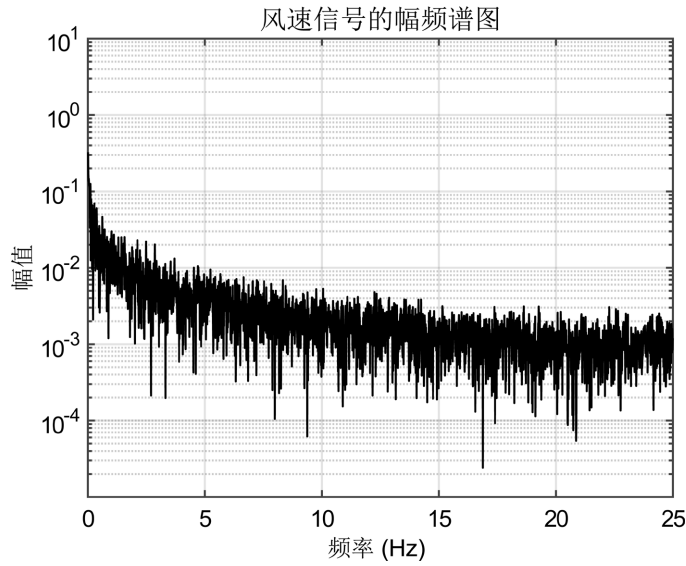


Figure 2. Amplitude spectrum of the wind velocity signal
图 2. 风速信号的幅频谱图

为了深入理解频率成分对时域特性的贡献,本文设计了逐阶频率叠加的信号重建实验。利用逆快速傅里叶变换(IFFT),逐步保留 n 阶频率成分后的近似时域重建信号 $\hat{f}_n(t)$ 。在可视化设计上,为直观展现频率叠加对信号重建的动态影响,每增加一阶频率成分,生成一帧图像。每帧图像分为左右两部分:左图绘制原始信号与当前重建信号的对比曲线,右图绘制所有已保留频率成分对应的三角模式波形。通过串联各帧图像生成动态视频,完整呈现频率分解与时域重建的演变过程。部分关键阶数示例帧如图 3 所示。

在这个过程中,每个阶数的频率成分都与傅里叶变换中频率分量的数学表达密切相关。根据傅里叶变换的公式:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.13)$$

可以理解每一阶频率分量 X_k 对时域信号的重建贡献。通过逆变换(IFFT):

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.14)$$

每次增加频率阶数,实际上就是将对应的频率分量加入重建过程,逐步恢复信号的原始形态。

从实验结果观察,不同频率阶数对信号重建效果具有明显分阶段特征:

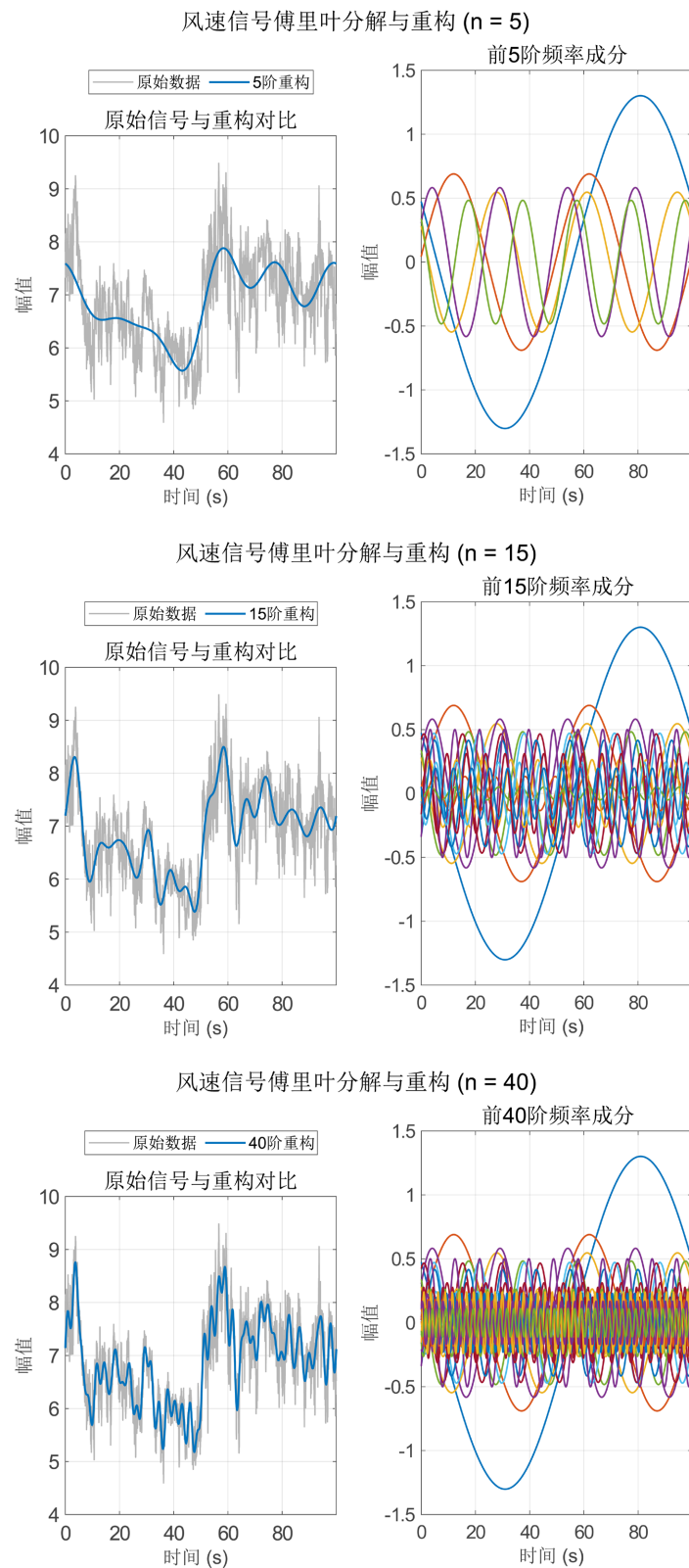


Figure 3. Example of stepwise frequency superposition and reconstruction of the wind velocity signal (using 5th, 15th, and 40th orders)

图 3. 风速信号逐阶频率叠加与重建示例(阶数分别是 5、15 和 40 阶)

- 当仅保留 $n=5$ 阶频率成分时, 重建信号主要恢复了原始信号的整体趋势, 反映出低频成分对信号大尺度变化的控制作用, 但细节波动严重缺失, 曲线光滑, 缺少起伏;
- 随着阶数增至 $n=15$, 信号重建质量明显提升, 更多细节特征得以恢复, 较好捕捉了原信号中的中频变化, 局部起伏显著增强, 但高频细节仍存在缺失现象;
- 当保留至 $n=40$ 阶频率成分后, 重建信号在幅值、相位及细节层面与原始信号高度吻合, 表明高频分量在微观特征刻画中起到关键补充作用。

综上所述, 低频成分主导信号的整体形态, 中频成分补充局部起伏, 高频成分则负责微观细节的描绘。逐阶叠加的动态可视化不仅揭示了傅里叶分解各频率成分的物理意义, 还帮助学生从直观感知上理解频域特性与时域结构之间的内在联系。

4. 教学实践与认识

本研究结合快速傅里叶变换理论基础, 围绕风速信号的实际数据分析, 设计并实现了逐阶频率叠加与动态可视化的方法。通过从低阶到高阶频率分量的逐步叠加, 清晰展现了频域成分对时域信号结构的具体影响, 直观揭示了不同频率分量在整体趋势、局部变化与微观细节刻画中的作用分工。

在教学实践中, 基于本实验所生成的动态图演示, 能够有效突破传统教学中抽象符号与静态公式带来的认知障碍, 帮助学生建立起从时域到频域、从分解到重建的完整理解链条。学生不仅能够感知各频率成分的物理意义, 也能直观看到信号重建过程中的逐步改善效果, 从而将傅里叶变换的理论知识与实际应用紧密结合。

通过本次探索表明, 将动态可视化方法引入信号处理教学, 不仅提升了学生对频域分析本质的直观认知, 同时也增强了其对快速傅里叶变换核心思想与工程应用价值的全面理解, 为后续复杂信号处理技术的学习奠定了坚实基础。

基金项目

重庆理工大学本科教育教学改革研究一般项目(项目编号: 2025YB47); 重庆理工大学校级本科教育教学改革研究重点项目(项目编号: 2024ZD09); 重庆理工大学 2025 年研究生课程思政示范课程《应用数理统计》(项目编号: gzlsz202501)。

参考文献

- [1] 曾海东, 韩峰, 刘瑶琳. 傅里叶分析的发展与现状[J]. 现代电子技术, 2014, 37(3): 144-147.
- [2] 陈华杰, 王梦真, 盘亚楠, 等. STM32 的 FFT 算法优化在无线通信中的应用[J]. 中国宽带, 2025, 21(3): 149-151.
- [3] 尹田鹏. 信息技术在核磁共振波谱教学中的应用现状研究[J]. 化学教育(中英文), 2025, 46(6): 83-91.
- [4] 陈昕, 葛亚敏. 图像处理技术课程编程实现式教学改革[J]. 辽宁工业大学学报(社会科学版), 2024, 26(6): 114-116, 120.
- [5] 马如坡. MATLAB 在数字信号处理教学中的应用与实践[J]. 中国教育技术装备, 2019(18): 25-27.
- [6] 王波. 傅里叶变换时移性质的 Matlab 辅助教学初探[J]. 电脑知识与技术, 2018, 14(33): 140-141.
- [7] 杨富龙, 张爱华, 杨彬, 等. 傅里叶变换可视化教学方法的探索与实践[J]. 工业和信息化教育, 2017(8): 61-64.
- [8] 王波. 傅里叶变换频移性质的教学过程可视化初探[J]. 科技资讯, 2018, 16(25): 193-195.
- [9] 李月娥, 刘毓超. 工程应用牵引的傅里叶变换教学方法探讨[J]. 电气电子教学学报, 2024, 46(5): 132-136.
- [10] George, J.D. (2018) The Right Way to Teach the FFT. arXiv: 1805.08633.
- [11] 方敬轩. 线性代数视角下的高等数学傅里叶级数教学探索[J]. 中央民族大学学报(自然科学版), 2024, 33(4): 84-89.

-
- [12] 李燕, 黄小津. 离散傅里叶变换性质的可视化教学设计[J]. 电气电子教学学报, 2024, 46(1): 1-4.
- [13] 孙军民. 基于傅里叶变换的雷电磁频谱研究[J]. 现代电子技术, 2024, 47(24): 13-17.
- [14] Potts, D., Steidl, G. and Tasche, M. (2001) Fast Fourier Transforms for Nonequispaced Data: A Tutorial. In: Benedetto, J.J. and Ferreira, P.J.S.G., Eds., *Modern Sampling Theory*, Birkhäuser, 247-270.
https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0143-4_12