

基于BOPPPS教学模式的《线性代数》 教学设计

——以矩阵的乘法为例

黄文琳

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2025年5月24日; 录用日期: 2025年6月23日; 发布日期: 2025年6月30日

摘要

本文以BOPPPS教学模式为基础, 针对《线性代数》课程中“矩阵乘法”这一核心知识点展开教学设计研究。通过导入(Bridge-in)、目标(Objective)、前测(Pre-assessment)、参与式学习(Participatory Learning)、后测(Post-assessment)和总结(Summary)六个环节, 构建了以学生为中心、注重互动反馈的闭环教学体系。研究结合计算机图形学等实际应用案例, 采用MATLAB/Python编程实践、小组探究等多元化教学方法, 帮助学生深入理解矩阵乘法的运算规则及其应用价值, 为理工科数学课程的教学改革提供了可借鉴的实施路径。

关键词

BOPPPS教学模式, 线性代数, 矩阵乘法, 教学改革

Instructional Design of *Linear Algebra* Based on BOPPPS Teaching Model

—A Case Study of Matrix Multiplication

Wenlin Huang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: May 24th, 2025; accepted: Jun. 23rd, 2025; published: Jun. 30th, 2025

Abstract

Based on the BOPPPS teaching model, we conduct teaching design research on the core knowledge

文章引用: 黄文琳. 基于 BOPPPS 教学模式的《线性代数》教学设计[J]. 教育进展, 2025, 15(6): 1428-1435.
DOI: 10.12677/ae.2025.1561151

point of “Matrix Multiplication” in the *Linear Algebra* course. Through the six links of Bridge-in, Objective, Pre-assessment, Participatory Learning, Post-assessment and Summary, a closed-loop teaching system centered on students and emphasizing interactive feedback has been constructed. This study combines practical application cases such as computer graphics and adopts diversified teaching methods such as MATLAB/Python programming practice and group exploration to help students deeply understand the operation rules and application value of matrix multiplication, providing a referential implementation path for the teaching reform of mathematics courses in science and engineering.

Keywords

BOPPPS Teaching Model, Linear Algebra, Matrix Multiplication, Teaching Reform

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《线性代数》是数学学科的重要分支，也是理工科(如计算机科学、物理学、工程学、经济学等)的基础课程之一。其核心概念，如矩阵、向量空间、线性变换等，不仅在理论研究中占据重要地位，还在实际应用中发挥着关键作用，例如计算机图形学、机器学习、信号处理、网络科学等领域。矩阵乘法作为《线性代数》中的核心运算之一，是连接多个重要概念的桥梁，如线性方程组的求解、矩阵的秩与逆、特征值与特征向量等。因此，矩阵乘法的掌握程度直接影响学生对后续内容的理解和应用能力。然而，在传统教学模式下，矩阵乘法的教学往往侧重于计算规则的讲解和重复练习，而较少涉及概念的直观理解与实际应用。许多学生能够机械地完成矩阵乘法的计算，但对于“为什么矩阵乘法要这样定义？”“矩阵乘法在不同学科中的应用是什么？”等问题缺乏深刻认识。这种“会计算、不理解”的现象导致学生在面对复杂问题时难以灵活运用矩阵运算，甚至对线性代数产生畏难情绪。因此，如何改进教学方法，使学生不仅掌握矩阵乘法的运算规则，还能理解其背后的数学思想并应用于实际问题，成为《线性代数》教学改革的重要课题。

近年来，随着教育改革的深入和信息化教学手段的普及，高等数学课程的教学模式不断创新。BOPPPS作为一种结构化教学模式，因其目标明确、互动性强等特点，在理工科课程教学中得到广泛应用[1]-[5]。BOPPPS 教学模式是一种以学生为中心、强调互动与反馈的教学设计框架，起源于加拿大教师技能培训体系(Instructional Skills Workshop, ISW) [6]。其名称由六个教学环节的首字母组成，分别是 Bridge-in (导入)：通过问题、案例或实际应用场景激发学生兴趣，建立新旧知识的联系；Objective (学习目标)：明确告知学生本节课的学习目标，使其清晰了解需要掌握的内容；Pre-assessment (前测)：通过提问、小测验或讨论等方式了解学生的已有知识水平，调整教学策略；Participatory Learning (参与式学习)：通过互动、小组讨论、案例分析等方式引导学生主动参与学习过程；Post-assessment (后测)：通过练习、提问或项目检验学生对知识的掌握情况，提供即时反馈；Summary (总结)：回顾本节课的核心内容，强化学习目标，并建立与后续课程的衔接。BOPPPS 模式的理念是通过结构化的教学设计，确保学生在课堂中始终保持高度的参与度和目标导向性。其闭环设计(如图 1 所示)能够有效提升教学效率，尤其适用于数学、工程等逻辑性较强的学科。近年来，BOPPPS 模式在国内外高等教育中得到了广泛应用，并取得了显著的教学效果。张亚彤等[7]以动车组运用与管理课程为研究对象，结合该课程的专业特性，对“BOPPPS”教

学模式在“动车组运用与管理”课程中的具体应用进行了实践性探索。该研究基于课程特点，系统性地设计了“BOPPPS”教学框架在该专业课程中的实施路径。通过这一教学实践，研究者初步验证了“BOPPPS”模式在轨道交通专业课程教学中的适用性和有效性，并为同类专业课程的教学改革提供了可借鉴的实践经验。王姝锐[8]基于课程思政理念，运用雨课堂智慧教学平台，深入研究了 BOPPPS 教学模式在“大学生心理健康教育”课程中的创新应用。该研究通过系统分析 BOPPPS 教学框架与心理健康教育课程的契合点，构建了具有思政特色的新型教学模式，并对其育人成效进行了实证评估。陈瑛与邓清[9]基于知识图谱技术，创新性地将 BOPPPS 教学模式应用于专业课程教学改革。研究团队通过构建结构化知识体系，对课程内容进行系统化梳理，同时结合 BOPPPS 教学框架重构教学流程。实证研究结果显示，该教学模式不仅提高了学生的课堂参与积极性，还显著增强了学生的知识理解深度和实践应用能力。这一研究成果为高等院校工科专业课程的教学创新提供了可借鉴的理论框架和实施路径。安凤娇等[10]基于概率论与数理统计课程的特征，对传统教学目标进行了系统性重构。通过应用 BOPPPS 教学模式，在教学全过程融入思政教育元素：在课前准备阶段注重思想启迪，在课堂教学环节实现专业知识与思政教育的有机融合，在课后延伸阶段深化价值引领。这种三维一体的教学设计不仅有效完成了知识传授的基本目标，更在培养学生正确价值观方面取得了显著成效。该研究为理工科专业课程开展课程思政建设提供了可操作的实践范式，实现了知识传授与价值引领的协同发展。

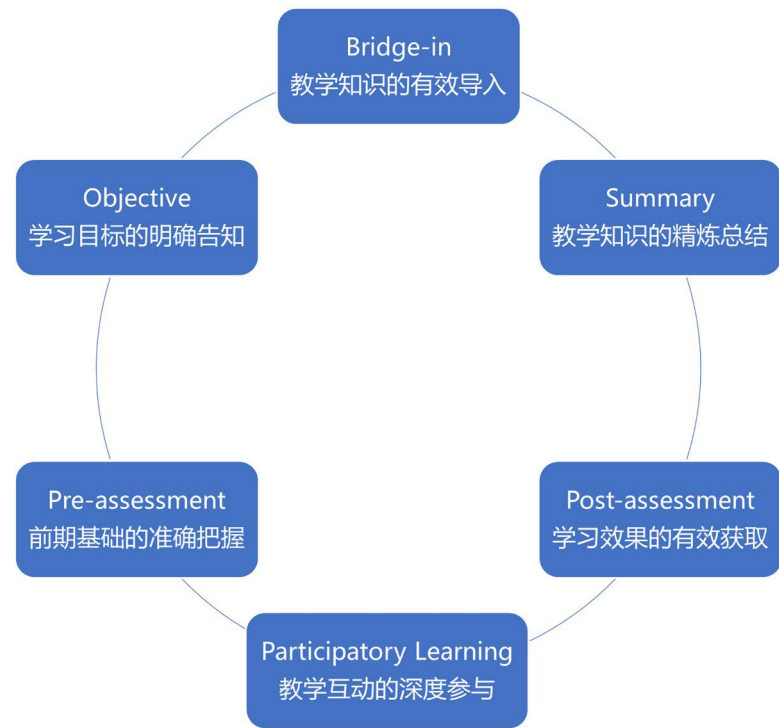


Figure 1. BOPPPS closed-loop teaching mode
图 1. BOPPPS 闭环教学模式

作为高校理工、经管类各专业的重要数学基础课程之一，《线性代数》在现代科学和工程技术领域具有极其广泛且深刻的应用价值。其核心概念——如矩阵、向量空间、行列式、特征值与特征向量等——不仅是数学理论体系的重要组成部分，更是解决实际问题的关键工具。在工程与技术领域，线性代数为计算机图形学、机器人运动学、信号处理、电路分析等提供了数学基础[11] [12]。例如，在计算机视觉中，

图像处理(如滤波、边缘检测)依赖于矩阵运算;在机器人控制中,运动学建模通过矩阵变换描述机械臂的空间位姿;在通信工程中,信号的正交分解(如傅里叶变换)本质上是向量空间的投影问题。在数据科学与人工智能领域,线性代数是机器学习、深度学习的核心数学语言[13]。例如,神经网络的前向传播本质上是矩阵乘法与激活函数的复合运算;主成分分析(PCA)通过矩阵的特征值分解实现数据降维;推荐系统中的协同过滤算法也依赖于矩阵分解技术(如 SVD)。在经济学与管理科学中,线性代数被广泛应用于投入产出分析、最优化问题(如线性规划)和金融建模(如投资组合优化) [14]。例如,列昂惕夫的投入产出模型通过矩阵方程描述不同经济部门之间的供需关系;而马科维茨的现代投资组合理论(MPT)则利用协方差矩阵量化资产风险。此外,在物理学(如量子力学中的希尔伯特空间)、化学(分子轨道理论)、生物信息学(基因序列比对)等领域,线性代数同样发挥着不可替代的作用[15][16]。可以说,无论是理论研究还是工程实践,掌握线性代数的核心思想与方法已成为现代科技工作者的必备技能。因此,《线性代数》课程的教学质量直接影响学生后续专业课程的学习效果以及解决复杂问题的能力。如何通过科学的教学设计(如 BOPPPS 模式)帮助学生建立扎实的线性代数基础,并培养其应用能力,是当前数学教育改革的重要课题之一。

2. 基于 BOPPPS 教学模式的矩阵乘法教学设计

2.1. 导言(3 分钟)——通过回顾旧知、案例对课程进行导入

在课程开始时,先帮助学生复习矩阵的相关基础知识。作为重要的数学工具,矩阵在当代科技领域的应用越来越广泛,尤其在人工智能、计算机视觉、自动驾驶、电子信息等前沿技术中发挥着关键作用。通过选用神舟十五号发射实况的图像处理实例(见图 2)作为教学案例,向学生展示不同参数调整后的效果对比,包括明暗度变化、对比度调节以及发射瞬间红色强化的特效处理等。通过设置问题情境激发学生的学习兴趣,待讲解完矩阵运算方法后,再引导学生探究这些图像处理技术背后的数学机制。

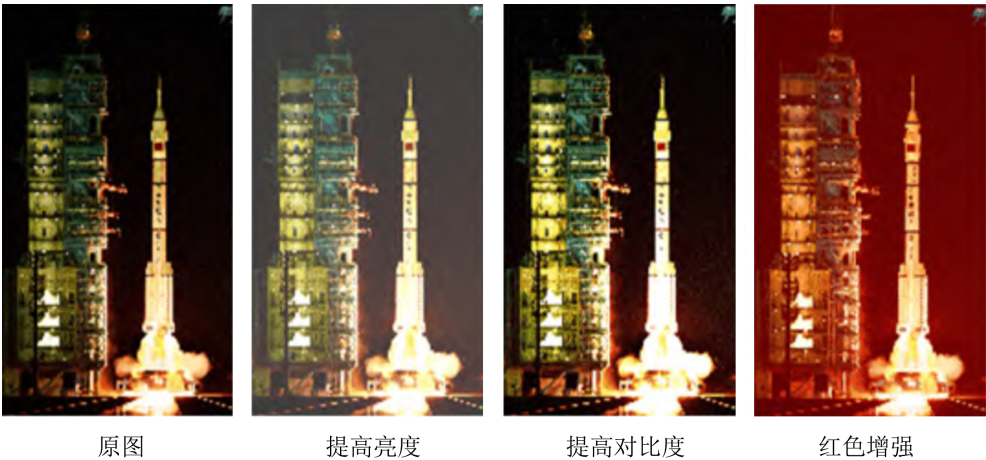


Figure 2. Scene of the launch of the Shenzhou-15 spacecraft
图 2. 神舟十五号飞船发射画

初学矩阵时,学生常常感到困惑,难以理解其实际应用价值。因此,教师应尽量采用直观、贴近生活的方式,帮助学生建立矩阵与现实世界的联系。例如,图像处理和动态演示就是非常合适的教学案例,既能简化概念,又能增强学生的理解。同时,通过引入神舟十五号载人飞船发射的实例,可以自然地融入课程思政元素,培养学生的民族自豪感、自信心和爱国情怀。

2.2. 学习目标(1 分钟)——PPT 展示

通过 PPT 展示本节课的学习目标, 包含知识目标(理解和掌握矩阵的线性运算和乘法运算及其运算规律)、能力目标、情感目标。根据线性代数课程体系, 以及矩阵的运算对后续内容的重要性, 使得学生明确本节课的教学目标以及重难点, 能够更好地对本节课的内容有一个整体的把握。

2.3. 先测(4 分钟)——提问、PPT 与板书相结合

矩阵最初源于对数的扩展与排列, 本质上是一种有序的数表结构。教师可先带领学生复习实数运算的基本法则, 进而提出问题: 矩阵是否也存在类似的运算规律? 鼓励学生大胆推测矩阵加法、数乘以及乘法运算的可能规则。这种启发式的教学设计能有效激发学生的探究欲望, 促使他们主动思考矩阵运算的定义方式, 从而强化学生在教学过程中的主体地位, 突出学生的课堂中心地位。

2.4. 参与式学习(30 分钟)——特色设计

本阶段采用多种教学方法相结合的方式课程特色设计, 包括讲授法、类比分析法、探究学习法、发生教学法、讨论式教学法等。具体分为以下 4 个教学点:

(1) 采取板书和 PPT 结合的方式, 给出矩阵的加法运算、数乘运算及其运算律。由于矩阵的线性运算难度不大, 因此通过类比实数的加法和数乘运算规律即可给出矩阵的加法运算、数乘运算及其运算律。

(2) 介绍矩阵乘法定义的由来:

现在广泛应用的矩阵乘积被称为一般的矩阵乘积, 它是由英国数学家阿瑟·凯莱在研究线性变换的复合时提出来的。根据下述两个线性变换

$$\begin{cases} x' = px + qy \\ y' = sx + ty \end{cases}, \quad \begin{cases} x'' = ax' + by' \\ y'' = cx' + dy' \end{cases},$$

可以得到

$$\begin{cases} x'' = a(px + qy) + b(sx + ty) = (ap + bs)x + (aq + bt)y \\ y'' = c(px + qy) + d(sx + ty) = (cp + ds)x + (cq + dt)y \end{cases}$$

分别记线性变换的系数矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} ap + bs & aq + bt \\ cp + ds & cq + dt \end{pmatrix}$ 。根据

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{C} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

可以定义矩阵的乘法 $C = AB$, 即

$$C = \begin{pmatrix} ap + bs & aq + bt \\ cp + ds & cq + dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix}$$

在前期先测环节发现, 学生对矩阵加法和数乘运算的理解较为准确。具体而言, 矩阵加法要求两个矩阵必须同型, 运算时只需将对应位置的元素相加; 数乘运算则是将数与矩阵的每个元素分别相乘。然而在引入矩阵乘法时, 许多学生会误认为应该采用对应元素相乘的方式。针对这一认知偏差, 教师可以从数学史的角度阐释矩阵乘法的起源——这种特殊的运算规则实际上源于对线性变换复合运算的需求。通过还原数学家凯莱创立矩阵乘法的历史情境, 不仅能够解答学生的疑惑, 更能让他们体会到数学概念产生的实际背景。这种基于历史脉络的教学方式, 既能帮助学生深入理解矩阵乘法的本质, 又能培养其严谨求实的科学态度。同时, 通过介绍凯莱的学术贡献, 还能潜移默化地培养学生的创新精神和钻研品质。

(3) 在课堂教学中,教师可组织学生通过观察矩阵 C 的元素与矩阵 A、B 元素间的对应关系,开展小组探究活动。各小组需要合作解决以下核心问题:

1. 矩阵乘法运算是否具有普遍适用性?
2. 如何确定乘积矩阵 C 的元素组成及其一般表达式?

通过小组汇报交流,引导学生自主归纳出矩阵乘法的关键条件:只有当第一个矩阵的列数与第二个矩阵的行数相等时才能进行乘法运算。同时掌握“行乘列”的计算法则:乘积矩阵 C 中第 i 行第 j 列的元素,等于左矩阵第 i 行元素与右矩阵第 j 列对应元素乘积之和。此外,乘积矩阵的行数取决于左矩阵的行数,列数则由右矩阵的列数决定。

这种教学方式突破了传统“填鸭式”教育的局限。在传统课堂中,教师往往单向灌输知识,忽视学生的认知体验。而通过小组讨论和成果分享,不仅能凸显学生的主体地位,还能提升学生的课堂参与度 and 情感投入,激发数学学习的内在动力,培养数学语言表达能力,增强学习自信心,促进对数学思想的深入理解。

特别值得注意的是,从二阶矩阵推广到高阶矩阵的乘法定义过程,完美体现了数学中“从特殊到一般”的思维方法。这种循序渐进的认知过程,有助于学生构建完整的知识体系。

(4) 在学习矩阵加减法时,我们是通过与实数的加减法类比引出的,其运算规律与实数的加减法运算规律较为一致,由此继续引导学生思考矩阵乘法的运算规律又是如何?是否仍然和实数乘法的运算规律一致?引导学生总结出矩阵乘法的运算规律。并且通过举反例,说明矩阵乘法一般不满足交换律和消去律。

通过类比引导学生将矩阵乘法的性质与数的乘法的性质进行类比,探究两种运算之间的异同点,进而学会使用类比的思想来学习后续课程内容。而反例的展示则让学生更加直观地体会到矩阵乘法不满足交换律和消去律这一特点。

2.5. 后测(4 分钟)——课堂练习

通过课堂练习,让学生巩固矩阵的线性运算和乘法运算规则。

例如:设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & 8 & -7 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$, 计算 $2A + 3B$, AB , BA 。

2.6. 总结(3 分钟)——整合要点,布置作业

采用多媒体动画技术对本节课核心内容进行系统梳理,通过动态可视化展示强化学生的理解记忆。课后练习分为两个层次:基础题组用于巩固课堂所学知识要点;拓展应用题则结合学生熟悉的数字图像处理场景,展示矩阵运算的实际应用价值,帮助学生建立“理论源于实践、服务实践”的认知理念。为满足不同学生的学习需求,特别提供完整的算法实现代码,便于有兴趣的学生自主探索更多图像处理效果。这种分层设计的实践环节既能夯实理论基础,又能让学生亲身体验矩阵运算与数学软件的结合应用,从而有效培养其数理思维能力、工程实践能力以及知识迁移应用能力。

3. BOPPPS 与矩阵乘法教学的内在联系

BOPPPS 模式作为一种系统化的教学设计框架,其核心理念与矩阵乘法的教学需求高度契合。矩阵乘法是线性代数中的核心内容,但其抽象性、计算规则的特殊性(如行列匹配要求、非交换性)以及广泛的应用背景(如图形变换、机器学习)使得学生在学习过程中容易陷入机械计算而忽视其数学本质。BOPPPS

模式通过其结构化、互动性和目标导向的特点,能够有效解决矩阵乘法教学中的关键问题。以下从认知建构、技能训练、错误预防、应用迁移四个维度深入探讨二者的内在联系。

首先,在认知建构方面,矩阵乘法的定义涉及“行向量与列向量的点积求和”,这一概念对初学者而言较为抽象。BOPPPS 模式通过 Bridge-in (引入)和 Participatory Learning (参与式学习)两个关键阶段,帮助学生逐步建立正确的认知结构。其次,在技能训练方面,矩阵乘法的计算过程涉及多个步骤(如行列匹配、逐元素相乘再求和),学生容易在操作中出错。BOPPPS 模式通过 Objective (目标)和 Post-assessment (后测)确保技能训练的精准性和有效性。此外,在错误预防方面,矩阵乘法易错点(如维度不匹配、运算顺序错误,假设交换律成立)可通过前测预判,并在参与式学习中设计针对性练习(如故意给出错误维度矩阵让学生验证)。最后,在应用迁移方面,矩阵乘法的真正价值在于其广泛的应用场景,但传统教学常因时间限制仅停留在计算层面。BOPPPS 的 Summary (总结)阶段可弥补这一缺陷,帮助学生建立知识网络,引导学生超越机械计算,思考矩阵乘法在更高阶数学(如特征值分解)中的应用,实现知识迁移。

4. 结语

本研究基于 BOPPPS 教学模式,对《线性代数》课程中的矩阵乘法知识点进行了系统的教学设计与实践。通过精心设计的六个教学环节,实现了从知识导入到学习评价的完整闭环。研究表明,这种结构化教学模式能够有效提升学生对抽象数学概念的理解深度和应用能力。特别是在参与式学习环节,通过引入计算机图形学等实际案例和编程实践,显著增强了学生的学习兴趣 and 课堂参与度。本研究不仅验证了 BOPPPS 模式在高等数学教学中的适用性,也为其他理工科基础课程的教学改革提供了有益参考。未来研究可进一步探索 BOPPPS 与其他创新教学方法的融合应用,以及在不同专业背景下的适应性调整。

基金项目

上海高校青年教师培养资助计划。

参考文献

- [1] 曹丹平, 印兴耀. 加拿大 BOPPPS 教学模式及其对高等教育改革的启示[J]. 实验室研究与探索, 2016, 35(2): 196-200.
- [2] 路婉秋, 王北海. 基于 BOPPPS 的《食品包装安全》通识课的设计与实践[J]. 包装工程, 2020, 41(S1): 33-36.
- [3] 杨秀丽, 贺鹏, 王光宇. 对 BOPPS 模型的研究与思考[J]. 求知导刊, 2018, 6(8): 5-6.
- [4] 王凤芹, 杜晶, 邢翠芳. BOPPS 模型在计算思维培养中的应用与反思[J]. 计算机教育, 2017, 15(4): 47-49.
- [5] 张所娟, 廖湘琳, 余晓晗, 等. BOPPS 模型框架下的翻转课堂教学设计[J]. 计算机教育, 2017, 15(1): 18-22.
- [6] Fenrich, P. and Johnson, R. (2016) Instructional Skills Workshops: A Model for Training Professors How to Teach. *Research Highlights in Education and Science*, 8, 9-20.
- [7] 张亚彤, 史骏, 张秀红, 等. BOPPPS 教学模式下的教学实践初探[J]. 时代汽车, 2025(11): 100-102.
- [8] 王姝锐. 课程思政背景下 BOPPPS 教学模式在大学生心理健康教育课程中的实践研究[J]. 公关世界, 2025(10): 27-29.
- [9] 陈璞, 邓清. 基于知识图谱 + BOPPPS 教学模式的“汽车车载网络控制技术”课程混合式教学创新与实践[J]. 汽车维修技师, 2025(10): 67-68.
- [10] 安凤娇, 蔡小娜, 赵月. BOPPPS 模式下概率论与数理统计课程思政教学设计[J]. 现代商贸工业, 2025(12): 177-180.
- [11] 谢加良, 朱荣坤, 宾红华. 新工科理念下线性代数课程教学设计探索[J]. 长春师范大学学报, 2018, 37(2): 133-138.
- [12] 黄影, 张丽华. 基于“新工科”的线性代数案例式教学模式的研究与实践[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版), 2019, 37(5): 467-470.

-
- [13] 郑玉军, 汤琼. 基于案例与问题驱动的线性代数教学[J]. 湖南科技学院, 2019, 40(5): 5-6.
 - [14] 王云杰, 吴翠兰. 浅谈案例教学法在线性代数中的应用[J]. 中国新通信, 2021, 23(6): 206-207.
 - [15] 范莉霞, 陈明. 线性代数课程思政教学的案例探索与实施[J]. 嘉庆学院学报, 2022, 34(6): 125-127.
 - [16] 何薇, 陈建龙. 线性代数课程思政教学案例的设计与实践[J]. 大学数学, 2021, 37(5): 47-51.