

抽象代数教学方法的探索和实践

雷 鹏, 张文婷*

兰州大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2025年6月2日; 录用日期: 2025年7月3日; 发布日期: 2025年7月10日

摘 要

抽象代数是数学专业的重要基础课程, 现已渗透到各个学科领域, 尤其是在数据结构的设计及优化、密码学等方面应用十分广泛。本文主要探讨抽象代数课程中一些教学改革的方法和实践, 以此提高学生的学习积极性, 从而全面提升抽象代数的教学质量与效果。

关键词

教学方法, 抽象代数, 群, 环

Exploration and Practice on Teaching Method of Abstract Algebra

Peng Lei, Wenting Zhang*

School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou Gansu

Received: Jun. 2nd, 2025; accepted: Jul. 3rd, 2025; published: Jul. 10th, 2025

Abstract

Abstract algebra is an important basic course of mathematics, which has penetrated into various disciplines, especially in design and optimization of data structures, cryptography and other aspects. This paper mainly discusses some teaching reform methods and practices in abstract algebra course, so as to improve students' learning enthusiasm and comprehensively improve the teaching quality and effect of abstract algebra.

Keywords

Teaching Method, Abstract Algebra, Group, Ring

*通讯作者。



1. 引言

数学是自然科学的基础,也是重大技术创新发展的基础。数学实力往往影响着国家实力,几乎所有的重大发现都与数学的发展与进步密切相关,数学已成为航空航天、国防安全、人工智能、生物医药、信息、能源等领域不可或缺的重要支撑。因此数学学科越来越受到重视,而抽象代数作为数学的一个核心分支,其理论基础深厚且广泛,涉及群论、环论、域论等多个领域[1]。它在计算机科学领域的应用体现在数据结构的设计、算法的优化等方面,而在密码学领域,抽象代数更是构建现代加密技术如公钥密码体系、数字签名等不可或缺的理论基石。因此,掌握好抽象代数对于理解和应用这些前沿科技至关重要。

然而,抽象代数所特有的高度抽象性和严密的逻辑推理体系使得它在教学中成为一个挑战。传统的讲授方式往往过于注重理论框架的搭建和定理证明的灌输,容易导致学生感到枯燥乏味,难以真正理解和消化知识,更难灵活运用到实际问题解决中。因此,对于广大数学教学工作来说,如何有效地提高这门课程的教学质量,探索和实践有效激发学生兴趣、降低学习难度的教学策略和方法显得尤为关键。目前有不少关于抽象代数课程的教学研究[2]-[5],但这些研究大多都是从教师的角度出发探讨如何提高教学质量,忽视了从教学主体学生出发来研究如何提高教学效果,虽然也有以学生主体、激发学生兴趣为目的的教学方法研究[6],但方法相对比较单一。本文旨在深入剖析并总结一些新的教学方法,这些方法旨在激发学生对抽象代数课程的兴趣,培养他们的逻辑思维能力,以及提升他们解决实际问题的能力。通过精心设计的案例分析、互动式课堂活动、研究性教学模式等教学方法及教学手段上的探索和实践,期望能够帮助学生在学习抽象代数的过程中实现从被动接受到主动探索、从机械记忆到深度理解的转变,从而全面提升抽象代数的教学质量与效果。

2. 教学方法的探索与实践

2.1. 数学史的引入

由于抽象代数比较侧重于理论研究,内容相对枯燥,学生的积极性不高。在抽象代数教学中融入数学史,能有效增强学生对课程的兴趣和理解[7]。通过讲述群论的起源,从古巴比伦时期解二次方程开始,到19世纪阿贝尔和伽罗瓦解决五次方程问题创立群论,展现了数学发展的曲折历程。这不仅使学生了解数学家的生平与贡献,更让他们明白数学知识的产生源于实际需求,是众多数学家长期努力的结晶。通过介绍阿贝尔证明一般五次方程无根式解以及伽罗瓦创立群论的工作,帮助学生理解群论核心概念和意义,感受数学家严谨治学与勇于创新的精神,从而激发学习热情和探索欲望,为深入学习抽象代数奠定良好基础。这种教学方式不仅能够激发学生的学习兴趣,还能帮助他们更好地理解抽象概念背后的直观意义。通过实践表明,在课堂上融入一些数学家与数学历史等故事,可以极大地提升学生学习抽象代数的兴趣,同时对数学素养的提高也起到了很好的效果。

2.2. 抽象问题具体化

抽象代数中的许多概念,如群、环、域等,都具有较高的抽象性。为了帮助学生更好地理解和掌握这些概念,教师可以采用抽象概念具体化的教学策略。具体化原理是心理学中的一个重要概念,强调了信息的具体性和详细性对理解、记忆和应用的影响。这一原理认为,具体的信息比抽象的信息更容易被

人们理解、记住和使用。具体化原理在多个心理学领域都有应用,包括教育、认知心理学、记忆研究和行为改变等。在教学中,教师使用具体的例子和案例来解释复杂的概念,可以帮助学生更好地理解 and 掌握知识。特别是在数学教学中,使用现实生活中的应用题可以帮助学生更好地理解抽象的数学概念和公式。在抽象代数的教学中,可将一些不易理解的概念和结论具体化(见表 1),这样的教学方式可利用具体例子帮助学生理解抽象的定义和定理,将抽象问题转化为具体可解的数学问题,也是提高学生理解能力的有效途径。

Table 1. Application cases of abstract problem concretization
表 1. 抽象问题具体化的应用案例

应用案例	过程描述	具体例子	教学效果
群论概念	由对称到对称变换群	根据对称变换群(保持正三角形不变的全体对称变换)抽象出一般的群的定义	帮助学生更好地理解群的定义及相关结构和性质
群对集合的作用	如轨道及群作用等	具体实际生活中的项链问题,化学中分子结构计数问题	使学生直观感受到群对集合应用理论,提高理解和掌握能力
群的凯莱定理	一般的抽象群的结构问题	给出与 Klein 四元群和四阶循环群同构的置换群的构造	通过与之同构的置换群的构造,深化对此定理的理解
环论概念	两种代数运算做成的代数系统	由环中加法群和乘法半群将问题具体化,譬如模 n 的剩余类环	对环的两种运算所各成的加群和乘法半群有更好地理解

2.3. 研究性课堂教学

研究性教学模式的教学是围绕课程中的某个知识点而展开,是由教师根据教学目标和教学的进度来确定这个知识点,通过问题、任务等多种形式,使用适宜的教学手段来创设与此学习对象相关的学习情境,引导学生进入目标知识点的学习。在实际教学过程中,以课程内容中的一些难点、重点或者跟学科前沿问题为目标任务,通过提出问题、分析思考、课堂讨论、撰写研究报告以使学生最终深入理解和熟练掌握相应的知识点,同时提高学生的自主探究和独立思考的能力。

案例 1: 在学习群的 Cayley 定理时,可以让学生考虑右平移情况下结论是什么?相应地对于一般的半群是不是也有相似的结论?对于一般的环,是不是也可以得到类似的结论?如果不成立,怎么修正条件?通过这一系列问题的提出,让学生可深入理解同构和反同构的相关理论,也提升了他们独立解决问题的能力,相应结论见参考文献[8]。

案例 2: 学习完 Sylow 定理后,将课程内容设计成研究项目,如研究有限群特别是低阶群的分类问题,先介绍有限群基本概念和重要定理,再分组让学生查阅文献、讨论分析,探索有限群分类方法和结果,学生在研究过程中相互交流、合作,培养了自主学习、团队协作及创新能力,提高数学素养和综合能力。

案例 3: 在学习同态和同构相关定理时,如何建立适当的同态和同构映射是最关键的问题,譬如第二同构定理中,已知 G 的子群 K 和正规子群 H ,要证明 $KH/H \cong K/(K \cap H)$,一般是建立两个商群间的同构映射直接证明,让学生考虑如果建立从 $K \rightarrow KH/H$ 的同态映射是否可证明结论?进一步若建立从 $KH \rightarrow K/(K \cap H)$ 同态映射是否同样可以证明?不同的方法,会产生什么不同的问题?哪种更简洁?进一步,如果是商群同构定理 $G/H \cong (G/K)/(H/K)$,如何证明?还对应着与之平行的环的第二同构定理及商环同构定理的证明,情况又如何?

通过这种教学方式,能够激发学生的求知欲和探索精神,使他们在解决问题的过程中逐步掌握抽象代数的核心知识和技能。

2.4. 一题多解与发散性思维的培养

发散思维, 又称辐射思维、放射思维、扩散思维或求异思维, 是指大脑在思维时呈现的一种扩散状态的思维模式, 它表现为思维视野广阔, 思维呈现出多维发散状。不少心理学家认为, 发散思维是创造性思维最主要的特点, 是测定创造力的主要标志之一。美国著名心理学家、心理物理学家 J. P. Guilford [9] 在研究智力的三维结构模型时, 对创造力所涉及的思维能力进行了实证研究, 指出训练人的发散思维能力是培养创造力的一种非常有效的方法。一题多解, 就是让学生从不同的角度、用不同的方法和不同的运算过程去解答同一道题。解题时, 教师可引导学生从一个问题出发, 根据所给条件, 突破固有的解题思路和思维定势, 去寻找不同的解题方法, 切实解决学生学习中“只见树木, 不见森林”的问题。在实践教学中, 教师精心挑选具有多种解法的习题, 引导学生从不同角度思考, 探索多种解题途径。这种一题多解的训练不仅可以让学生理解和掌握抽象代数的基本知识, 更重要的是可以培养他们灵活运用这些知识的能力。通过尝试多种解法, 学生可以更加熟悉和了解知识的内在联系, 从而在实际应用中更加得心应手。

案例 1: 在群论教学中对于证明某个集合在特定运算下构成群的问题, 可引导学生运用定义、子群判定定理或利用同构定理等多种方法解决。

案例 2: 在考虑素数阶群必为循环群的结论证明时, 可以利用 Lagrange 定理分析元素阶数, 也可以通过 Sylow 定理研究子群的结构来解决, 以及构造生成元与整数加群的同态映射也可证明结论。

案例 3: 在环论讲授中, 对于交换幺环中全部幂零元构成的集合为素理想的问题, 既可以用定义证明, 也可以用全部素理想的交即为诣零理想来证明。

案例 4: 关于环论中一些理想的极大性以及素理想的证明, 除了一般的定义证明, 也可引导学生考虑环的同构定理中商环为整环或域进而推出核相关的性质来证明。

通过这种教学方式, 鼓励学生积极思考、勇于创新, 营造开放活跃的课堂氛围, 提升学生的思维能力和解决问题的灵活性。

2.5. 线上线下混合式教学

随着信息技术的不断发展, 线上线下混合式教学已成为一种新兴的教学模式。线上线下混合式教学结合线上资源丰富、线下课堂互动强的优势, 为学生提供更全面的学习体验。教师可利用网络教学平台, 如学习通、慕课等, 上传抽象代数相关教学视频、课件、习题等资源供学生预习复习, 课堂上分组讨论视频中的难点问题, 教师答疑后进行习题练习巩固知识。这样可以提供更加灵活多样的学习途径。线下课堂则侧重于面对面的交流和指导, 通过小组讨论、结果展示等方式深化学生对抽象概念的理解。这种线上线下相结合的方式能够充分利用信息技术的优势, 提高教学效果和学习体验。

我们选取置换群和对称群这一节作教学案例设计:

课前准备: 会在学习通上传关于“由对称到对称变换群”的课件, 课件涉及到生活中的一些常见的对称的例子, 然后过渡到保持正多边形不变的对称变换的全体, 特别是正三角形的对称变换的元素个数及置换表示, 最后给出保持多项式不变的对称变换的全体。让学生提前预习, 做好课前准备, 发布任务点, 确认学生看完课件完成任务点后完成线上预习, 为了确认学生的预习情况, 我们会发布一个作业题, 让计算正三角形两个变换复合的结果, 根据学生的预习情况教师会记录下出现的问题。

课堂教学: 根据学生的预习情况, 教师可适当的调整教学进度, 在讲授环节, 按照学生课堂反应可线上随机选择点名提问, 这样可提高学生的参与度, 增强学习效果, 讲完置换群的定义及置换的逆、复合、奇偶性、轮换分解等相关概念和结论后同时会设置随堂练习, 即多个置换的复合运算以及奇偶性的

判断，让学生课堂限时间完成，根据完成的情况，对其中的比较容易出问题的地方给出解惑答疑，譬如多个置换复合时左右顺序关系容易出错，根据轮换的长度来判断奇偶性等。

课后巩固：课后，会在学习通线上发布作业，等学生线上提交的作业批阅完成后，会把作业中集中出现的问题在学习通班级空间里给全部学生都反馈到，学生根据老师反馈的结果再加强学习中的弱点，即容易出问题的地方，这样可更好地提升教学效果。

3. 教学效果分析

近年来，课程组在抽象代数课程中进行了一系列的教学改革和实践，在教学中积极尝试如上不同的教学方式和教学手段。每学期教学实践结束后，课程组都会对学生进行问卷调查，内容主要涉及对课程教学方法和手段、课程内容理解情况和整体课堂效果的满意度，以及独立完成作业的情况和选修后续课程意向。下表 2 给出了对兰州大学数学与统计学院 2020 级、2021 级以及 2022 级基地班学生开展如上教学方法实践后的问卷调查的反馈汇总表，其中满意比为满意人数/选课人数 $\times 100\%$ ，独立完成作业的情况比为独立完成作业人数/选课人数 $\times 100\%$ ，继续选修后续课程的意向比为愿意选修后续课程人数/选课人数 $\times 100\%$ 。

Table 2. Summary of feedback from the questionnaire on undergraduate students' learning of abstract algebra in the School of Mathematics and Statistics

表 2. 数学与统计学院本科生抽象代数学习情况调查问卷的反馈汇总表

	2020 级	2021 级	2022 级
课程教学方法满意比	91%	93%	95%
课程内容理解的满意比	88%	92%	94%
整体课堂效果满意比	87%	91%	92%
独立完成作业的情况比	87%	89%	91%
继续选修后续课程的意向比	88%	91%	94%

从反馈结果可以看出，随着这些教学设计和方法以及教学手段的不断尝试，相比 2020 级，2021 级和 2022 级在教学过程中采用的这种教学设计案例也在逐步加多加深，学生对抽象代数课程中的教学方法满意比也在逐步提高，并且大部分学生普遍反映他们不仅深刻理解了抽象代数的思想原理，了解了抽象代数的发展前沿，课后习题做起来也比较得心应手，从而也激发了他们对后续课程的学习兴趣，从统计的结果来看，学生对继续选修后续课程的意向比也是逐年增加的。由此看出在抽象代数的课堂教学中，创新教学方法和教学手段可极大地促进学生自主学习意识，且对激发和培养大学生创新意识也有很好的促进作用。

4. 结论

通过对抽象代数教学方法的深度探索与实践，我们充分认识到创新教学手段对于提升教学效果和激发学生兴趣的重要性。在具体实践中，引入数学史的元素，将抽象代数的发展历程和实际应用背景融入教学，使学生能更直观地理解抽象概念，并体会到其在实际生活和科学计算中的深远意义；同时，针对抽象问题具体化的需求，尝试采用多种途径将复杂的理论转化为易于理解的具体实例，极大地增强了学生对抽象概念的理解力和应用能力；研究性课堂教学模式的实施，鼓励学生积极参与讨论，主动探索未知领域，进一步锻炼了他们独立解决问题的能力；在一题多解的练习中，倡导发散性思维的培养，引导学生从不同角度审视问题，探索多种解决方案，这不仅丰富了他们的解题思路，也提升了他们的创新意

识和实践能力; 顺应时代发展潮流, 积极探索线上线下混合式教学模式, 借助数字化教育工具开展翻转课堂、在线互动等活动, 使抽象代数课堂变得更加生动活泼, 满足了不同学生的学习需求和节奏。

综上所述, 这些教学方法在提高抽象代数教学质量上起到了显著效果。在今后的教学中, 教师应不断探索和完善这些教学方法, 结合教学实际情况进行调整和创新, 以更好地培养学生的数学素养和综合能力, 适应现代数学教育的发展需求。

基金项目

由兰州大学 2024 年度研究生教育教学改革研究项目(YJSXM202413), 兰州大学教育教学改革研究项目(JYXM-2020-20252), 兰州大学教学改革示范课程(PX-5121979)及甘肃省自然科学基金项目(23JRRA1055)资助。

参考文献

- [1] 郭丰琦, 冯爱芳, 雷鹏. 抽象代数基础[M]. 北京: 科学出版社, 2019.
- [2] 李平. 新型教学模式在近世代数教学中的交互运用[J]. 教育教学论坛, 2016(46): 154-155.
- [3] 王芮婕. 提高近世代数教学质量策略研究[J]. 数学研究, 2021, 15(2): 219-220.
- [4] 沈金荣, 刘巍, 王博育. 抽象代数教学改革的探索[J]. 教育教学论坛, 2017(30): 119-120.
- [5] 王羨, 王志俊, 董红昌, 刘琼玲. 浅谈抽象代数教学改革[J]. 大学数学, 2015, 31(4): 41-47.
- [6] 胡晓莉. 关于《抽象代数》课程教学改革的思索[J]. 大学数学, 2019, 35(5): 61-65.
- [7] 刘伟丽. 浅析数学史与数学教育相结合的意义与作用[J]. 产业与科技论坛, 2021, 20(14): 155-156.
- [8] 张文婷, 雷鹏. 如何培养学生的发散性思维——以群的“Cayley”定理为例[J]. 大学数学, 2025, 41(1): 50-54.
- [9] Guilford, J. P. 创造性才能[M]. 北京: 人民教育出版社, 2006.