Advances in Education 教育进展, 2025, 15(7), 672-677
Published Online July 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2025.1571269

多种方法求解一维波动方程的教学探讨与实践

杨文彬

西安邮电大学理学院，陕西 西安

收稿日期：2025年6月12日；录用日期：2025年7月11日；发布日期：2025年7月21日

摘 要

探讨了四种求解一维波动方程的方法，包括达朗贝尔法、傅里叶变换法、拉普拉斯变换法和格林函数法，分析了它们在无界空间上的适用性和物理意义。通过对解法的逐步剖析和案例教学应用的展示，本文旨在帮助学生更好地理解不同方法的原理及其应用场景，提升在不同物理背景下求解偏微分方程的能力。本研究提出的教学策略旨在引导学生掌握多种解法的基本原理与优劣，并在工程与物理实际问题中选择合适的方法。

关键词

一维波动方程，求解方法对比，教学应用

Teaching Exploration and Practice of Solving One-Dimensional Wave Equations with Multiple Methods

Wenbin Yang

School of Science, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an Shaanxi

Received: Jun. 12th, 2025; accepted: Jul. 11th, 2025; published: Jul. 21st, 2025

Abstract

This paper systematically discusses four methods for solving the one-dimensional wave equation, including d'Alembert's method, Fourier transform method, Laplace transform method, and Green's function method. It analyzes their applicability and physical significance in unbounded space. Through step-by-step analysis of the solutions and the presentation of case study applications, this paper aims to help students better understand the principles and application scenarios of different methods, and enhance their ability to solve partial differential equations in different physical

文章引用: 杨文彬. 多种方法求解一维波动方程的教学探讨与实践[J]. 教育进展, 2025, 15(7): 672-677.
DOI: 10.12677/ae.2025.1571269

contexts. The teaching strategies proposed in this study aim to guide students in mastering the basic principles, advantages, and disadvantages of multiple solution methods, and in selecting appropriate methods for solving practical engineering and physical problems.

Keywords

One-Dimensional Wave Equation, Comparison of Solution Methods, Teaching Application

1. 引言

一维波动方程在描述物理和工程中的波动现象(如声波、电磁波等)时具有重要应用[1] [2]。求解此类方程的方法多种多样，不同方法有其独特的适用性和物理意义。如何在教学中合理选择和对比这些解法，以帮助学生理解并掌握偏微分方程的多种解法，是当前教学改革的一个重要议题。本文选择达朗贝尔法、傅里叶变换法、拉普拉斯变换法和格林函数法四种常见解法，通过系统的对比和案例分析，探讨在一维波动方程教学中的应用策略。

2. 一维波动方程的求解方法

本文分析了一维波动方程在无界空间上的边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & \end{cases} \tag{1}$$

假设初始波形为高斯脉冲 $u(x,0) = \exp(-\alpha x^2)$，其中 α 是控制脉冲宽度的参数；初速度设置为零 $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$。上述一维波动方程在无界空间上的边值问题数值解模拟图如图 1 所示，具体 Matlab 程序代码如表 1 所示。

2.1. 解法一：达朗贝尔法

达朗贝尔法是一种直观的解析法，适合无界空间的波动问题[3]。其基本思想是引入特征变量，将波动方程转化为特征线下的简单函数形式。具体求解过程如下：

(1) 通解的形式：通过作特征变换 $\xi = x - ct$ 和 $\eta = x + ct$，通解可写为：

$$u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

(2) 利用初始条件：代入初始条件求解 F 和 G，得到波动方程的最终解：

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

该方法直观性强，能清晰展示波的传播特性，适合用于帮助学生理解波的双向传播和初始条件的影响。达朗贝尔法适合作为波动方程求解的入门方法，使学生建立直观的波传播图像。

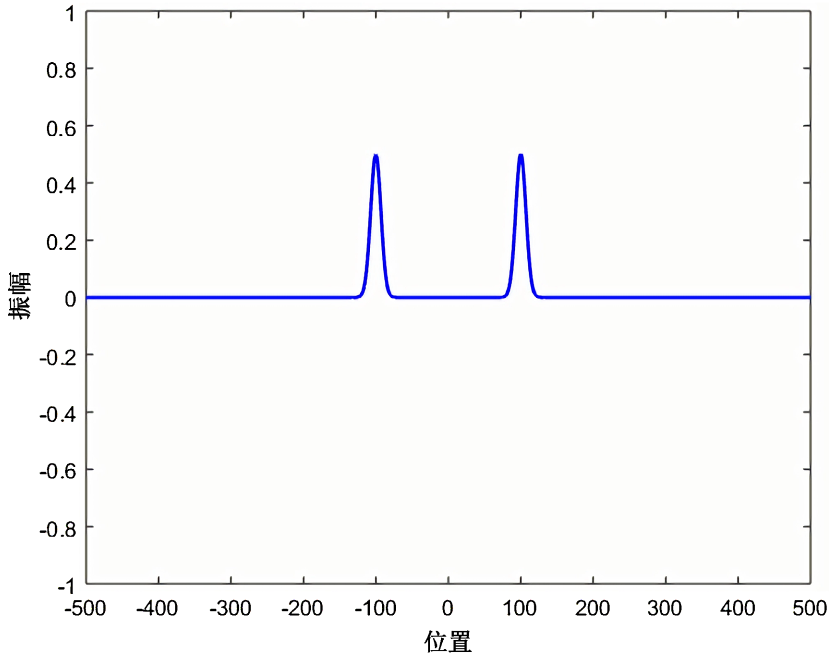

Figure 1. Schematic diagram of the one-dimensional wave equation in unbounded space
图 1. 无界空间中的一维波动方程示意图

Table 1. Matlab codes for the numerical solution of the one-dimensional wave equation in unbounded space
表 1. 无界空间中的一维波动方程数值解 Matlab 代码

```
% 模拟参数
L = 1000;
dx = 0.5;
dt = 0.25;
c = 1.0;
time_steps = 400;

% 初始化空间域和初始条件
x = -L/2:dx:L/2;
u = exp(-0.01 * x.^2);
u_new = zeros(size(u));
u_old = u;

% 创建动画图形
figure;
h = plot(x, u, 'b', 'LineWidth', 1.5);
xlim([-L/2, L/2]);
ylim([-1, 1]);
xlabel('位置');
ylabel('振幅');

% 创建视频对象
v = VideoWriter('wave_equation_simulation.avi');
v.FrameRate = 30;
open(v);

% 时间步进循环
for t = 1:time_steps
    % 使用有限差分法更新
    u_new(2:end-1) = 2 * u(2:end-1) - u_old(2:end-1) + (c * dt / dx)^2 * (u(3:end) - 2 * u(2:end-1) + u(1:end-2));

    % 吸收边界条件
    u_new(1) = 0;
    u_new(end) = 0;

    % 更新下一次迭代的值
    u_old = u;
    u = u_new;

    % 更新图形
    set(h, 'YData', u);
    drawnow;

    % 将当前帧写入视频
    frame = getframe(gcf);
    writeVideo(v, frame);
end

% 关闭视频文件
close(v);
```

2.2. 解法二：傅里叶变换法

傅里叶变换法利用频域分析，将空间无界的波动问题转化为代数方程求解[4]。具体求解过程如下：

(1) 对 $u(x,t)$ 关于 x 做傅里叶变换，原始定解问题转化为：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2U(\omega,t)}{\mathrm{d}t^2} = -a^2\omega^2U(\omega,t), & t>0 \\ U(\omega,0)=\Phi(\omega), \dfrac{\mathrm{d}U(\omega,0)}{\mathrm{d}t}=\Psi(\omega) \end{cases} \tag{2}$$

(2) 求解定解问题(2)，其通解为：

$$U(\omega,t)=\Phi(\omega)\cos a\omega t+\frac{\Psi(\omega)}{a\omega}\sin a\omega t$$

它可以转化为：

$$U(\omega,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi(\omega)\mathrm{e}^{ia\omega t}+\Phi(\omega)\mathrm{e}^{-ia\omega t}\right]+\frac{1}{2a}\left[\frac{\Psi(\omega)}{i\omega}\mathrm{e}^{ia\omega t}-\frac{\Psi(\omega)}{i\omega}\mathrm{e}^{-ia\omega t}\right]$$

(3) 通过傅里叶逆变换恢复到原空间，得到 $u(x,t)$ 的解：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

傅里叶变换法适合处理复杂初始条件，有助于学生理解频域和时域之间的关系。通过频率分量的叠加分析波的传播特性，能提升学生对频率特性的理解。

2.3. 解法三：拉普拉斯变换法

拉普拉斯变换法特别适用于半无界或有限域上的波动问题[5]，也能解决瞬态问题。具体求解过程如下：

(1) 对 $u(x,t)$ 关于 t 进行拉普拉斯变换，原始定解问题转化为：

$$\frac{\mathrm{d}^2U(x,s)}{\mathrm{d}x^2}-\frac{s^2}{c^2}U(x,s)=-\frac{sf(x)+g(x)}{c^2}$$

(2) 假设 $U_p(x,s)$ 是上述方程的特解，则其通解一般形式为：

$$U(x,s)=A(s)\mathrm{e}^{\frac{s}{c}x}+B(s)\mathrm{e}^{-\frac{s}{c}x}+U_p(x,s)$$

需要注意的是，拉普拉斯变换下的特解往往难以直接求得(比如 $U_p(x,s)$)，尤其是在复杂边界条件或源项的情况下。此外，如果问题中缺乏足够的边界条件，有可能导致我们无法确定 $A(s)$ 和 $B(s)$ 的具体值。因此，下述第(3)步一般无法得到。

(3) 确定了 $U(x,s)$ 之后，通过拉普拉斯逆变换回到时间域，可以得到最终的解 $u(x,t)$。然而，由于 $U(x,s)$ 的形式往往较为复杂，逆变换的积分可能难以解析计算，因此在实际求解中可能需要数值计算或查表法辅助完成。

拉普拉斯变换法可以帮助学生处理瞬态波动问题，对边界复杂的情境也适用。这种方法尽管计算较为复杂，但能为学生展示更广泛的解法适用性。

2.4. 解法四：格林函数法

格林函数法通过构造特定边值条件下的格林函数[6]，使波动方程的解表示为初始条件的卷积积分。具体求解过程如下：

(1) 构造格林函数 $G(x,t;\xi)$ 满足波动方程及初始条件。在无界空间上，格林函数通常满足

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)G(x,\xi,t)=\delta(x-\xi)\delta(t)$$

其中 $\delta(\cdot)$ 是狄拉克函数。在无界空间上，格林函数的显示形式一般为：

$$G(x,t;\xi)=\frac{1}{2c}\left[\delta(x-\xi-ct)+\delta(x-\xi+ct)\right]$$

(2) 利用格林函数的卷积性质，以及初始条件 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积积分形式，方程(1)的解可以表示为：

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(\xi)\frac{\partial G}{\partial t}(x,t;\xi)+g(\xi)G(x,t;\xi)\right]\mathrm{d}\xi$$

(3) 由于格林函数中包含狄拉克函数，利用狄拉克函数的积分性质以及初始条件：

$$u_1(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\delta(x-\xi-ct)+\delta(x-\xi+ct)\right]f(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right]$$

$$u_2(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left[-c\delta(x-\xi-ct)+c\delta(x-\xi+ct)\right]g(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\xi)\mathrm{d}\xi$$

(4) 经过卷积积分以及狄拉克函数的简化，最终可以得到波动方程的解析解：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\xi)\mathrm{d}\xi$$

格林函数法能帮助学生理解波动方程在源项或复杂初始条件下的求解过程。通过卷积积分表示的求解过程，学生可以看到初始条件对解的全局影响。

3. 案例分析

3.1. 案例问题

问题情境：考虑一个无限长、均匀且各向同性的理想弹性钢丝，在初始时刻 $t=0$ 受到一个集中激励，激励形式可由脉冲函数(狄拉克 δ 函数)描述。分析冲击波(或应力波)沿钢丝的传播特性。

已知条件：无界空间 $-\infty<x<\infty$；初始位移 $u(x,0)=0$；初始速度 $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\delta(x)$。

3.2. 四种方法的应用

参照第 2 节进行。

3.3. 案例教学设计

(1) 课前准备：让学生预习四种方法的数学背景；设计简答题，写出各方法的主要思路及其适用条件。

(2) 课堂环节：逐步演示四种方法对该冲击问题的完整推导；讨论对比哪种方法最快速？哪种方法最直观？

(3) 课后思考题：如果将问题改为有界空间(如固定端点)，哪种方法更合适？

3.4. 总结

通过对该案例的深入剖析，学生能够达成以下目标：1) 熟练掌握一维波动方程的多元解法及其背后所依托的数学原理；2) 透彻理解每种解法所蕴含的物理意义以及其适用的具体条件；3) 显著增强运用数

学工具解决物理与工程实际问题的能力；4) 培养在实际问题情境中，能够灵活且精准地选择恰当求解方法的思维模式。

4. 结论与展望

本文系统展示了达朗贝尔法、傅里叶变换法、拉普拉斯变换法和格林函数法在一维波动方程教学中的应用。具体来说：

(1) 达朗贝尔法适合作为入门方法，帮助学生掌握波动传播的基本概念，尤其是双向传播特性。它在一维波动方程教学中的应用，为学生后续学习奠定了坚实基础。

(2) 傅里叶变换法便于学生理解频域分析的意义，适合处理无界空间上的复杂初始条件。该方法有助于学生掌握频率分量的叠加，进一步拓宽了波动方程求解的视角。

(3) 拉普拉斯变换法为学生提供了一种解决瞬态或边界复杂情境的有效工具。它拓展了学生在不同时间尺度和边界条件下的分析能力，使得波动方程的求解更加灵活多样。

(4) 格林函数法通过构造满足特定初始条件的卷积解，帮助学生理解源项对解的全局影响。该方法在源项或复杂初始条件下的应用中表现出色，为学生提供了全新的解题思路。

通过对这四种方法的对比分析(如表 2 所示)和应用案例示范，学生可以从不同角度理解波动方程的解法及其物理意义。每种方法的应用都展示了其独特的求解思路和优缺点，有助于学生根据具体问题选择合适的求解方法。

Table 2. Comparative analysis of four methods
表 2. 四种方法的对比分析

方法	适用性	优点	局限性
达朗贝尔法	全空间，简单初始条件	直观易懂，展示双向传播特性	不适合复杂边界或初始条件
傅里叶变换法	全空间，复杂初始条件	频域分析，便于频率分量分解	对于非周期边界需变换调整
拉普拉斯变换法	半无界或瞬态问题，复杂边界	适用于瞬态问题和边界复杂情况	计算步骤繁琐，不够直观
格林函数法	全空间，复杂源项或初始条件	适合源项问题，展示全局影响	需构造格林函数，计算复杂

基金项目

2024 年西安邮电大学教学改革研究专项项目“《数学物理方法》课程中思政教育改革的策略与实践研究”(JGSZB202419)。

参考文献

[1] 王元明. 数学物理方程与特殊函数[M]. 第六版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
[2] 方瑛, 黄毅. 数学物理方程与特殊函数[M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 2012.
[3] 祁玉海. 用行波法求解定解问题[J]. 青海师范大学民族师范学院学报, 2008(1): 64-65.
[4] 张礼涛. 傅里叶变换在求解微分方程中的应用[J]. 佳木斯教育学院学报, 2012(12): 198-199.
[5] 梁家辉. 重要的拉普拉斯变换公式及其应用[J]. 数学的实践与认识, 2023, 53(9): 230-256.
[6] 张子珍, 林海. 格林函数法求解偏微分方程[J]. 山西大同大学学报(自然科学版), 2015, 31(6): 1-2+16.