Advances in Education 教育进展, 2025, 15(7), 1446-1459
Published Online July 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2025.1571374

Hans汉斯

基于矩阵理论的高考立体几何法向量求解与教学启示

张栩萤

黄冈师范学院数学与统计学院，湖北 黄冈

收稿日期：2025年6月25日；录用日期：2025年7月23日；发布日期：2025年7月30日

摘 要

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》强调“立体几何与空间向量”对培养学生核心素养的重要性。针对学生备考中机械套用向量公式求解法向量、缺乏本质理解的问题，文章对比传统坐标法与矩阵理论法，发现传统方法依赖特殊坐标系且计算繁琐。引入矩阵理论，通过二阶、三阶行列式及向量叉乘解析法向量求解逻辑，以多道高考题验证其适用性，总结“建系－定向量－算法向量－应用”的解题步骤。教学启示部分提出，教师需融合高等数学原理构建完整思维链，结合矩阵运算与几何直观突破公式记忆瓶颈，从高阶视角培养学生抽象建模能力，落实核心素养。

关键词

立体几何，法向量，空间直角坐标系，矩阵

Solution of Normal Vectors in Solid Geometry for College Entrance Examination Based on Matrix Theory and Teaching Implications

Xuying Zhang

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Jun. 25th, 2025; accepted: Jul. 23rd, 2025; published: Jul. 30th, 2025

Abstract

The “General Senior High School Mathematics Curriculum Standards (2017 Edition, Revised in 2020)” emphasizes the significance of “solid geometry and spatial vectors” in cultivating students’

文章引用: 张栩萤. 基于矩阵理论的高考立体几何法向量求解与教学启示[J]. 教育进展, 2025, 15(7): 1446-1459.
DOI: 10.12677/ae.2025.1571374

core literacy. Aiming at the problem that students mechanically apply vector formulas to solve normal vectors during exam preparation and lack essential understanding, this article compares the traditional coordinate method with the matrix theory method and finds that the traditional method relies on special coordinate systems and is computationally cumbersome. The matrix theory is introduced. The solution logic of normal vectors is analyzed through second-order and third-order determinants and vector cross products. Its applicability is verified by multiple college entrance examination questions. The solution steps of "establishing the system—determining the vector—algorithm vector—application" are summarized. The teaching enlightenment section proposes that teachers need to integrate the principles of advanced mathematics to construct a complete thinking chain, combine matrix operations and geometric intuition to break through the bottleneck of formula memory, cultivate students' abstract modeling ability from a higher-order perspective, and implement core literacy.

Keywords

Solid Geometry, Normal Vector, Spatial Rectangular Coordinate System, Matrix

1. 问题提出

《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》强调立体几何与空间向量对培养学生核心素养的重要性[1]，要求学生借助空间向量解决复杂几何问题。然而在高考备考中，学生常机械套用向量公式求法向量，却难以理解几何本质与代数运算的深层关联。例如在处理二面角、线面角时，学生虽能通过坐标建立方程组算得法向量，但对“法向量表征平面方向的原理”“矩阵工具系统化求解法向量的逻辑”等高等数学背景知识理解不足，导致在非正交坐标系棱锥、曲面截交等复杂几何体问题中难以迁移应用。

从“高观点”视角审视，中学向量法是高等数学向量空间理论的初等化，法向量求解与矩阵行列式运算密切相关，但当前教学对这一关联挖掘不足，学生未建立“几何对象代数化－矩阵运算系统化－结果几何解释”的完整思维链。高考命题常以泰勒展开式、黎曼函数等高等数学元素衔接中学知识，而法向量求解正是高等数学背景初等化的典型场景——其本质是线性代数中齐次线性方程组求解的具体应用。

在此背景下，如何依托课程标准提升代数视角研究几何问题能力的要求，通过揭示矩阵的秩、向量正交性等高等数学原理，帮助学生构建“几何直观－代数运算－原理迁移”的解题框架，成为教学关键。具体问题包括：如何用矩阵方法优化法向量求解认知，突破传统坐标法依赖特殊坐标系的局限？如何结合矩阵运算与几何直观，让学生理解法向量夹角与二面角关系的本质？如何通过高观点教学落实数学抽象、数学建模素养，提升学生在新定义几何体、动态几何等复杂情境中的问题转化能力？

这些探究不仅能填补学生知其然不知其所以然的认知缺口，更能为高考备考提供新路径——从机械运算转向原理理解，从孤立解题转向思维建模，实现用高等数学思维审视初等问题，以初等知识载体落实核心素养的教学目标。

2. 研究现状

在高中数学立体几何的研究与教学中，空间向量法与传统综合法的对比应用始终是核心议题。刘莹蕊实证研究表明，向量法在解决二面角、线面角等度量问题时具程序化优势，但依赖坐标系可能弱化几

何直观，而综合法在逻辑推理与空间想象培养上不可替代，二者在高考考查中形成互补[2]。杨佳冬、王圳炜等通过案例阐释向量法将几何问题转化为向量运算的核心思路[3] [4]，而靖明星则揭示高考命题中“高观点、低起点”策略，以高等数学背景考查学生对向量法的迁移能力[5]。

教学实践中，张天雄提出借助 Geogebra 动态演示弥补向量法直观理解不足，融合直观想象与数学运算素养[6]。王波通过教材例题变式深化学生对核心概念的理解[7]。周晓琴强调夯实向量法基础，关注运算失误与建系问题[8]。值得注意的是，李萌李萌提出通过矩阵、行列式等工具搭建初高等数学桥梁[9]，而康兴良指出高考命题中几何问题的代数化趋势，矩阵法求解法向量呼应新课标数学建模要求[10]。整体而言，当前研究与教学既重视向量法的工具价值，也强调几何直观与代数运算的平衡，为矩阵法等新视角的引入奠定了方法论基础。

在立体几何中，法向量的求解是解决空间角、距离及垂直关系的核心问题，而矩阵方法的引入为这一过程提供了系统化的代数工具。吴应富指出了矩阵行列式与向量叉乘的本质关联，使得法向量的计算可通过结构化的代数运算实现[11]。康兴良等强调矩阵法在高考中以“高等数学背景初等化”形式考查迁移能力与几何本质理解[10]。

从教学实践来看，矩阵法求解法向量不仅是解题技巧的优化，更是高等数学思想在中学课堂的“低起点”渗透。李萌提出通过行列式解二元一次方程组直观呈现矩阵特征，为高中学习奠基[9]。李云鹏李云鹏以高考题为例，说明矩阵法通过“构造矩阵－展开运算－几何解释”转化复杂几何问题[12]。辛志立从 HPM 视角强调矩阵历史可帮助学生理解法向量逻辑起点[13]。矩阵法贴近中学知识体系，操作步骤结构化，处理复杂几何体法向量更高效[14]。现有研究虽未直接聚焦矩阵法在法向量求解中的具体应用，但通过矩阵理论与几何问题的关联性分析，可明确其作为衔接工具的重要价值——既符合中学数学对通性通法的要求，又为学有余力的学生提供了通向高等数学的认知路径，体现了“低阶问题高阶化思考”的教学理念。

3. 高考立体几何研究

3.1. 历年高考立体几何题型分布与分值占比

Table 1. Distribution of geometry question types and scores in the previous years’ college entrance exams
表 1. 历年高考几何题型与分值分布

试卷/年份	题型分布	分值
2022 年全国新I卷	选择题 4、8 题、多选题 9 题、解答题 19 题	27
2022 年全国新 II 卷	选择题 7 题、多选题 11 题、解答题 20 题	22
2023 年全国新I卷	多选题 12 题、填空题 14 题、解答题 18 题	22
2023 年全国新 II 卷	多选题 9 题、多选题 14、解答题 20 题	22
2024 年全国新I卷	选择题 5 题、解答题 17 题	20
2024 年全国新 II 卷	选择题 7 题、解答题 17 题	20

整体来看，立体几何在全国新I卷高考中始终占据一定比重，题型分布虽有调整，但解答题基本每年都有涉及，是考查的重点题型，选择题也较为稳定地出现，反映出对立体几何基础知识和基本技能的持续关注，同时随着年份变化，在题型布局和分值上进行动态调整，以便更好地考查学生的立体几何综合素养。

3.2. 高考立体几何解题方法研究

例 1 (2023 年全国新高考I卷第 18 题)如图 1 所示，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2, AA_1=4$，

点 A_2, B_2, C_2, C_2 分别在棱 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 上，$AA_2 = 1, BB_2 = DD_2 = 2, CC_2 = 3$。

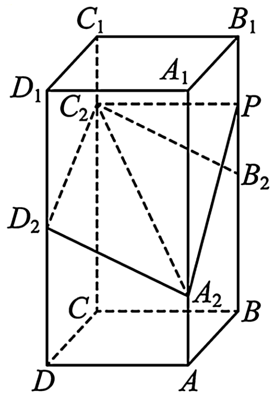

Figure 1. Picture to accompany a high school exam question
图 1. 高考题配图

(1) 证明：$B_2C_2 \parallel A_2D_2$；

(2) 点在棱 BB_1 上，当二面角 $P - A_2C_2 - D_2$ 为 150°时，求 B_2P。

上题为 2023 年全国新高考I卷第 18 题，分值为 15 分。文章以此题为例展示高考立体几何解答题的两种常见解题方法。

1. 普通几何解法

第一问考查空间中线线平行的证明。第二问考查学生将几何问题转化为代数问题的能力，通过建立方程来求解未知量，这体现了代数与几何结合的能力。

在平面 $D_2A_2C_2$ 上，找到垂直于 A_2C_2 的线段 D_2E，其中 E 是 A_2C_2 的中点；

在平面 PA_2C_2 上，找到垂直于 A_2C_2 的线段。

二面角 $P - A_2C_2 - D_2$ 的平面角即为 $\angle PED_2 = 150^\circ$。

D_2E 的长度可以通过勾股定理计算：

$$D_2E = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

PE 的长度与 D_2E 的长度相等，因为他们都是垂直于 A_2C_2 的线段。

在 ΔPED_2 中，利用余弦定理即可求得的长度：

$$PD_2^2 = PE^2 + D_2E^2 - 2 \cdot PE \cdot D_2E \cdot \cos 150^\circ$$

解得 $PE = 2$

$$\therefore \left| PB_2 \right| = 1$$

2. 建立坐标系法

该几何图形为一个正四棱柱，以点 C 为原点建立空间直角坐标系，CD 为 y 轴，CB 为 x 轴，CC_1 为 z 轴。

由此根据题意可以得到各点坐标：

$$A(2,2,0), B(2,0,0), C(0,0,0), D(0,2,0)$$

$$A_1(2,2,4), B_1(2,0,4), C_1(0,0,4), D_1(0,2,4)$$

$$A_2(2,2,1), B_2(2,0,2), C_2(0,0,3), D_2(0,2,2)$$

(1)

$$\boldsymbol{B_2C_2}=(-2,0,1),\boldsymbol{A_2D_2}=(-2,0,1)$$

$$\therefore \boldsymbol{B_2C_2}=\boldsymbol{A_2D_2}$$

$$\therefore B_2C_2 /\!/ A_2D_2$$

(2)

$\because$ 点 P 在棱 BB_1 上，所以设点 P 坐标为：

$$P(2,0,h)$$

设平面 PA_2C_2 的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$$

则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{A_2C_2}=-2x-2y+2z=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{PC_2}=-2x+(3-h)z=0\end{cases}$$

令 $z=2$，得

$$x=3-h,y=h-1$$

$$\therefore \boldsymbol{n}_1=(3-h,h-1,2)$$

设平面 $A_2C_2D_2$ 的法向量为

$$\boldsymbol{n}_2=(a,b,c)$$

则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{A_2C_2}=-2a-2b+2c=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{D_2C_2}=-2b+c=0\end{cases}$$

令 $a=1$，得

$$b=1,c=2,$$

$$\therefore \boldsymbol{n}_2=(1,1,2)$$

$$\therefore \left|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle\right|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{4+(n-1)^2+(3-h)^2}}=\left|\cos150^{\circ}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

化简可得：

$$h^2-4h+3=0$$

解得：

$$h=1 \text{ 或 } h=3$$

$$\therefore P(0,2,1) \text{ 或 } P(0,2,3)$$

$$\therefore |PB_2|=1$$

以上为高考立体几何解答题的两种常见解题方法，普通几何解法计算量小，适用范围广，但对学生的空间想象能力要求比较高，解题思路也不固定，还容易因辅助线的错误添加或几何关系的误判导致解

题失败。

建立坐标系法解题思路明确，使用人数较多，计算过程标准化，但计算量比较大，尤其是在法向量的计算中，坐标系中存在未知坐标的点的平面法向量求解在计算时会更加繁琐，本文将以此解法为主，引入矩阵的行列式运算来降低法向量的计算难度来解决这个问题。

4. 矩阵理论在立体几何中的应用

在高等代数中，线性变换是线性空间到自身的线性映射。矩阵是线性变换的代数表示。对于有限维线性空间V和W，一个线性变换T：$V \to W$，在给定基的情况下，可以用矩阵来表示[15]。

4.1. 三阶行列式

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

称代数式

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

为三阶行列式，用符号表示为

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

我们有：当三阶行列式

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，上述三元线性方程组有唯一解，解为

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, x_2 = \frac{d_2}{d}, x_3 = \frac{d_3}{d}$$

其中

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

余子式：在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列，剩下的 $(n-1)^1$ 个元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1.j-1} & a_{1.j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1.1} & \cdots & a_{i-1.j-1} & a_{i-1.j+1} & \cdots & a_{i-1.n} \\ a_{i+1.1} & \cdots & a_{i+1.j-1} & a_{i+1.j+1} & \cdots & a_{i+1.n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n.j-1} & a_{n.j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}。

代数余子式：若子式取自第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行和第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列，则其代数余子式为：

$$A_{ij}=-1^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M_{ij}。$$

我们知道，三阶行列式可以通过二阶行列式表示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

其中的 $(-1)^{1+1}$、$(-1)^{1+2}$、$(-1)^{1+3}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，写为 A_{ij}。

4.2. 向量的叉乘与法向量

1. 向量的叉乘

在三维空间中，向量的叉乘是一种重要的向量运算，其结果是一个与原向量都垂直的向量。

定义：设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，它们的叉乘 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，满足以下条件：

(1) 方向：垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面，方向由右手定则确定：右手四指从 $\boldsymbol{a}$ 指向 $\boldsymbol{b}$ (绕小于 180°的角)，拇指方向即为叉乘结果的方向，如图 2 所示。

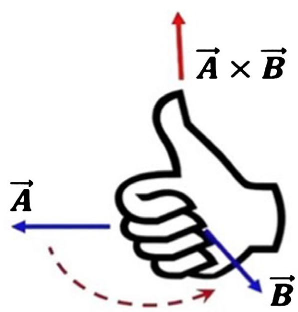

Figure 2. Schematic diagram of the right-hand rule
图 2. 右手定则示意图

(2) 模长：等于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 张成的平行四边形的面积，即 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $(0\le\theta\le\pi)$。

2. 法向量

法向量是求解立体几何问题时非常重要的条件，如图 3 所示是人教 A 版选择性必修一课本中法向量的定义。叉乘的几何特性使其能够成为求解平面法向量的基本工具，只要平面内存在两个不共线向量，即可以通过叉乘唯一确定法向量的方向。

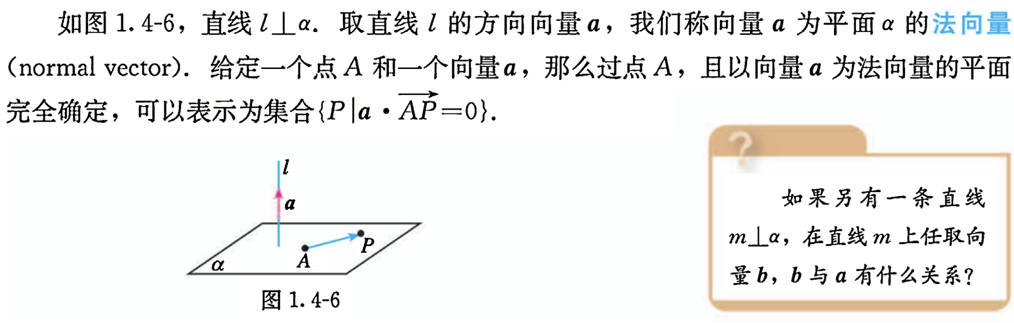
如图 1.4-6，直线 $l \perp \alpha$. 取直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{a}$，我们称向量 $\boldsymbol{a}$ 为平面 α 的法向量 (normal vector). 给定一个点 A 和一个向量 $\boldsymbol{a}$，那么过点 A，且以向量 $\boldsymbol{a}$ 为法向量的平面完全确定，可以表示为集合 $\{P \mid \boldsymbol{a} \cdot \overrightarrow{AP} = 0\}$.

图 1.4-6

如果另有一条直线 $m \perp \alpha$，在直线 m 上任取向量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 有什么关系？

Figure 3. Definition of normal vectors in the compulsory version of Humanities A
图 3. 人教 A 版选择性必修一法向量的定义

若平面内有两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，则它们的叉乘 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 即为该平面的一个法向量。

(1) 在平面内选取两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ (通常可取平面上的三点)。

(2) 计算叉乘 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$，所得向量 $\boldsymbol{n}$ 即为平面的法向量。

4.3. 叉乘坐标的计算：利用矩阵与行列式

叉乘的坐标公式可通过上文提到的三阶行列式简洁表示，这也是高等代数中矩阵工具的典型应用。

利用(二)中定义里的向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 和 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 进行计算，叉乘的坐标公式可以通过三阶行列式表示为：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

其中：

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是三维空间直角坐标系的单位正交基向量，分别对应 x, y, z 轴方向；

行列式按第一行展开计算，结果为一个向量，其坐标即为平面法向量的坐标。

拉普拉斯定理： 设在行列式 D 中任意取定了 $k(1 \le k \le n-1)$ 个行，由这 k 行元素所组成的一切 k 阶子式与他们的代数余子式的乘积和等于行列式 D 。即：

$$\det(A) = \sum_{t=1}^{C} M_t \cdot A_t$$

其中，$C = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ 是 k 阶子式的个数，M_t 是第 t 个 k 阶子式，A_t 是其对应的代数余子式。

所以将上述行列式按拉普拉斯定理展开的公式为：

$$\boldsymbol{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

得到的叉乘结果的坐标为：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

假设该平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$，则：

$$\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z): \begin{cases} n_x = a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ n_y = a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ n_z = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{cases}$$

5. 法向量

5.1. 法向量在求解立体几何中的本质

1. 利用法向量求解线面角与二面角

法向量是垂直于平面的非零向量，它能代表平面的方向特性。在三维空间中，给定一个平面，有无数个与之垂直的法向量，它们相互平行。因为平面可由其法向量定向，所以研究两个平面的夹角，就可转化为研究它们法向量的夹角。图 4 是人教 A 版必修二对二面角的定义。

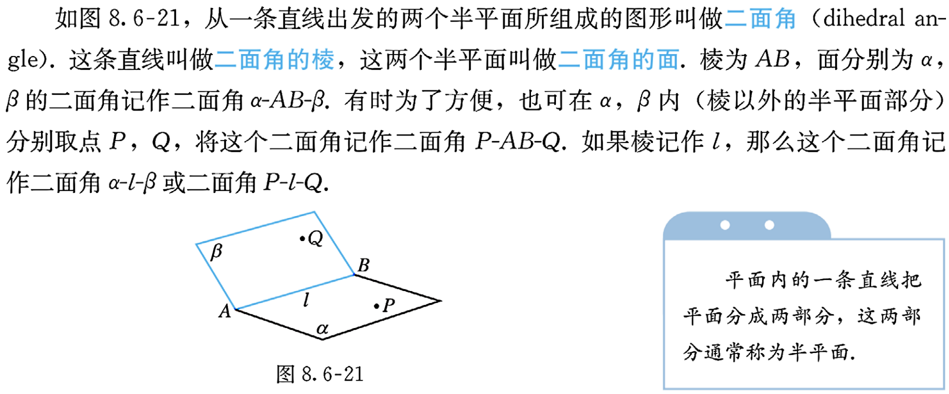
如图 8.6-21，从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角（dihedral angle）. 这条直线叫做二面角的棱，这两个半平面叫做二面角的面. 棱为 AB，面分别为 α，β 的二面角记作二面角 α-AB-β. 有时为了方便，也可在 α，β 内（棱以外的半平面部分）分别取点 P，Q，将这个二面角记作二面角 P-AB-Q. 如果棱记作 l，那么这个二面角记作二面角 α-l-β 或二面角 P-l-Q.

图 8.6-21

平面内的一条直线把平面分成两部分，这两部分通常称为半平面.

Figure 4. Definition of dihedral angles in Compulsory Education for Humanities, Version A
图 4. 人教 A 版必修二二面角的定义

线面角是直线与它在平面上的射影所成的角。直线有方向向量，平面有法向量，直线与平面所成角 θ 和直线方向向量与平面法向量的夹角 α 互余($\theta = 90^\circ - \alpha$)。通过求出直线方向向量与平面法向量的夹角 α，利用三角函数关系就能得到线面角 θ。图 5 是人教 A 版必修二对线面角的定义。

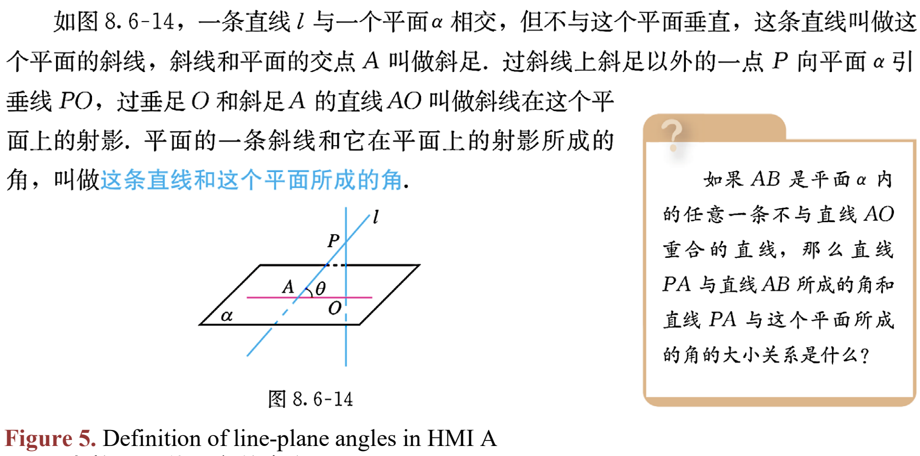
如图 8.6-14，一条直线 l 与一个平面 α 相交，但不与这个平面垂直，这条直线叫做这个平面的斜线，斜线和平面的交点 A 叫做斜足. 过斜线上斜足以外的一点 P 向平面 α 引垂线 PO，过垂足 O 和斜足 A 的直线 AO 叫做斜线在这个平面上的射影. 平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的角，叫做这条直线和这个平面所成的角.

图 8.6-14

如果 AB 是平面 α 内的任意一条不与直线 AO 重合的直线，那么直线 PA 与直线 AB 所成的角和直线 PA 与这个平面所成的角的大小关系是什么？

Figure 5. Definition of line-plane angles in HMI A
图 5. 人教 A 版线面角的定义

例如，已知直线方向向量 a 和平面法向量 $\boldsymbol{n}$，先由向量数量积公式算出

$$\cos\alpha = |a||\boldsymbol{n}| a \cdot \boldsymbol{n}$$

再根据

$$\sin\theta = |\cos\alpha|$$

求出线面角θ，实现了从向量夹角到线面角的转化求解。

2. 利用法向量判断线面垂直或平行

(1) 线面垂直

设直线l的方向向量为a，平面α的法向量为n_1。若$a\,/\!/\,n_1$，即存在非零实数λ，使得$a=\lambda n_1$，则直线l垂直于平面α，如图6所示。

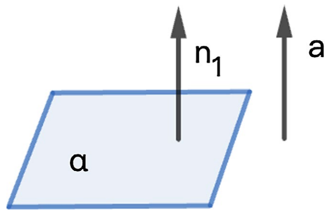

Figure 6. Line-plane perpendicularity
图6. 线面垂直

(2) 线面平行

设直线l的方向向量为a，平面α的法向量为n_1。若$a\cdot n_1=0$，则直线l平行于平面α，如图7所示。

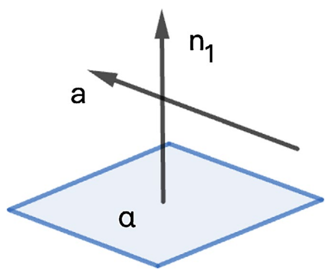

Figure 7. Parallelism of lines and surfaces
图7. 线面平行

3. 利用法向量判断面面垂直或平行

(1) 面面垂直

设平面α的法向量为n_1，平面β的法向量为n_2。若$n_1\cdot n_2=0$，则平面α垂直于平面β，如图8所示。

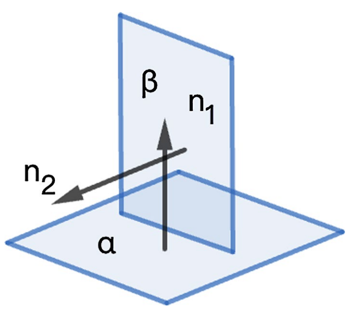

Figure 8. Face to face perpendicular
图8.面面垂直

(2) 面面平行

设平面α的法向量为n_1，平面β的法向量为n_2。若$n_1\,/\!/\,n_2$，即存在非零实数λ，使得$n_1=\lambda n_2$，则

平面 α 平行于平面 β，如图 9 所示。

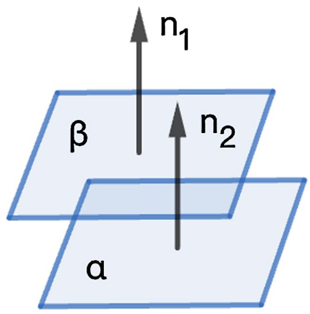

Figure 9. Parallel faces
图 9. 面面平行

基于向量运算的角度度量本质上是利用向量的运算体系来度量直线与平面的相对位置关系。这种方法将几何中复杂的线面位置关系判断和角度求解，转化为向量的代数运算，使问题更具规范性和可操作性，能有效解决各类线面角相关问题。

5.2. 解立体几何：法向量的计算

文章依然以 2023 年全国新高考I卷第 18 题第(2)问为例，使用行列式求法向量的方式进行求解，建系方式不变。

$\because$ 点 P 在棱 BB_1 上，所以设点 P 坐标为：

$$P(2,0,h)$$

设平面 PA_2C_2 的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$$

$$\boldsymbol{A_2C_2}=(-2,-2,2),\boldsymbol{PC_2}=(-2,0,3-h)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_1&=\begin{vmatrix}x & y & z\\ -2 & -2 & 2\\ -2 & 0 & 3-h\end{vmatrix}\\&=\left(-2(3-h)-2\cdot 0,-\left[-2(3-h)-(-2\cdot 2)\right],-2\cdot 0-\left[(-2)\cdot(-2)\right]\right)\\&=(2h-6,2-2h,-4)\end{aligned}$$

化简得：

$$\boldsymbol{n}_1=(h-3,1-h,-2)$$

设平面 $A_2C_2D_2$ 的法向量为

$$\boldsymbol{n}_2=(a,b,c)$$

同理可得：

$$\boldsymbol{n}_2=(1,1,2)$$

$$\therefore\left|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle\right|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{4+(n-1)^2+(3-h)^2}}=\left|\cos 150^\circ\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

化简可得：

$$h^2-4h+3=0$$

解得：

$$h=1 \text{ 或 } h=3$$

$$\therefore P(0,2,1) \text{ 或 } P(0,2,3)$$

$$\therefore \boldsymbol{B_2P}=1$$

若在建立坐标系的条件下用普通解法求解平面 PA_2C_2 法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 会得到：

$$\begin{cases}-2x-2y+2z=0\\-2x+(3-h)z=0\end{cases}$$

计算起来会比较繁琐。

5.3. 利用矩阵求解高考立体几何解答题的平面法向量

下面本文将继续以另一道立体几何解答题为例展示该方法求解的适用普遍性。

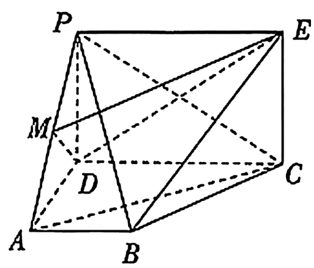

Figure 10. 立体几何解答题
图 10. Solutions to Solid Geometry Problems

例 5 如图 10 所示，四边行 $PDCE$ 为矩形，四边形 $ABCD$ 为梯形，直线 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，$\angle BAD=\angle ADC=90^\circ$，$AB=AD=\frac{1}{2}CD=1$，$PD=\sqrt{2}$。

(1) 若 M 为 PA 中点，求证：$AC\,/\!/$ 平面 MDE；

(2) 求直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值；

经过证明可以得到 DA,DP,DC 两两垂直，以 D 为原点，以 $\boldsymbol{DA}$ 的方向为 x 轴，以 $\boldsymbol{DC}$ 的方向为 y 轴，以 $\boldsymbol{DP}$ 的方向为 z 轴，建立空间直角坐标系。

可以得到各点坐标：

$$A(1,0,0),B(1,1,0),C(0,2,0)$$

$$D(0,0,0),E\left(0,2,\sqrt{2}\right),P\left(0,0,\sqrt{2}\right)$$

(1) 若 M 为 AP 中点，则点 M 坐标为：

$$M\left(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{AC}=(-1,2,0),\boldsymbol{DM}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\boldsymbol{DE}=\left(0,2,\sqrt{2}\right)$$

设平面 MDE 的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)=\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix}=\left(2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-0\cdot\sqrt{2},-\left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}-0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\frac{1}{2}\cdot 2-0\cdot 0\right)=\left(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$$

化简后得到

$$\boldsymbol{n}_1=\left(2\sqrt{2},\sqrt{2},2\right)$$

$$\therefore \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{AC}=0$$

$$\therefore \boldsymbol{AC}\perp\text{平面 } MDE$$

$$\therefore AC \,/\!/\, \text{平面 } MDE$$

(2) 设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(a,b,c)$

$$\boldsymbol{PB}=\left(1,1,-\sqrt{2}\right),\boldsymbol{BC}=(-1,1,0),\boldsymbol{PA}=\left(1,0,-\sqrt{2}\right)$$

$$\therefore \boldsymbol{n}_2=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},2\right)$$

$$\cos\langle\boldsymbol{PA},\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{|\boldsymbol{PA}\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{PA}||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

所以 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$。

6. 总结与启示

6.1. 方法总结

综上所述，利用矩阵的方法求解平面的法向量的方法不仅降低了计算的难度，还适用于具备建系条件的所有题型。下面总结了解题方法与技巧。

1. 建立空间直角坐标系

选择一个合适的坐标系，通常将所研究的几何体放置在坐标系中，以便于计算。确定几何体的关键点的坐标。

2. 寻找各点坐标，确定平面内的向量

确定构成平面的向量。对于平面，通常需要两个不共线的向量；对于直线，需要一个方向向量。这些向量可以通过坐标点的差来计算。

3. 计算平面法向量

使用向量叉积来计算法向量。对于平面，叉积的结果是垂直于该平面的向量，即平面的法向量。叉积可以通过行列式或矩阵来计算。

4. 简化并利用法向量解决问题

计算得到的法向量可能需要简化，如除以模长进行单位化。然后，法向量可以用于计算点到平面的距离、平面间的夹角、反射和折射等问题，同时也可以用于证明线面平行和线面垂直。

6.2. 教学启示

教师应挖掘高等数学原理，将矩阵的秩、向量正交性等概念与中学教学内容结合，帮助学生理解法向量与平面内向量的正交关系，构建“几何对象代数化–矩阵运算系统化–结果几何解释”的完整思维链条，避免机械套用公式，填补“知其然不知其所以然”的认知缺口。

教学中需注重矩阵运算与几何直观的结合，通过几何图形演示法向量方向与平面的关系，引导学生分析在二面角、线面角问题中法向量夹角与二面角的关系本质，让学生明白法向量夹角何时等于二面角、何时与二面角互补，而非仅记忆公式，提升对几何本质的理解。

从落实核心素养出发，教师应从高等数学视角引导学生将几何问题抽象为代数问题，运用矩阵工具建模求解并进行几何解释，尤其在面对新定义几何体、动态几何等复杂问题时，培养学生的问题转化能力和迁移应用能力，实现“用高等数学思维方法审视初等问题，以初等知识载体落实核心素养”的教学目标。

总之，通过在教学中合理渗透矩阵理论等高等数学知识，优化法向量求解的教学方法，不仅能够提升学生对立体几何问题的理解和解决能力，还能够有效促进学生数学核心素养的落实与提升。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[2] 刘莹蕊. 高中立体几何向量法和综合法的对比研究及教学启示[D]: [硕士学位论文]. 广州: 广州大学, 2024.

[3] 杨佳冬. 解答一道立体几何二面角问题的三种方法[J]. 数理天地(高中版), 2025(3): 44-45.

[4] 王圳炜. 巧用向量法解立体几何空间角问题[J]. 数理天地(高中版), 2025(3): 50-51.

[5] 靖明星. 空间向量法求角度问题探究[J]. 中学数学研究, 2025(3): 33-36.

[6] 张天雄. 立足问题导学提升核心素养——以“立体几何中的距离问题”为例[J]. 数学通讯, 2025(4): 18-21.

[7] 王波, 黄海波. 依托教材、指向育人的高中数学例题深度学习案例研究——以立体几何为例[J]. 中学教研(数学), 2025(4): 27-30.

[8] 周晓琴. 用向量法求解立体几何问题的解题策略与备考建议[J]. 数理天地(高中版), 2024(23): 86-87.

[9] 李萌. 高观点渗透下的初中数学拓展教学设计与实践[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2022.

[10] 康兴良, 黄立. 高等数学视角下的高中数学试题命题研究[J]. 中学数学, 2024(15): 82-84.

[11] 吴应富. 矩阵理论——在初等数学中的应用[J]. 数理化解题研究, 2023(9): 50-53.

[12] 李云鹏. 居高才能临下深入方可浅出——以 2022 年新高考I卷两题为例浅谈“高观点”下的教学[J]. 中学数学杂志, 2023(3): 33-36.

[13] 辛志立. HPM 视野下的高中矩阵教学[J]. 福建中学数学, 2019(1): 13-15.

[14] 林双. 例谈“高观点”下的高中数学课堂教学[J]. 读写算, 2021(28): 181-182.

[15] 张禾瑞, 郝鈵新. 高等代数[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.