

# 线性代数课程思政元素的挖掘与教学实施

覃利华, 刘忠慧\*

广西民族师范学院数学与计算机科学学院, 广西 崇左

收稿日期: 2025年7月5日; 录用日期: 2025年8月3日; 发布日期: 2025年8月13日

## 摘要

以线性代数课程为例, 结合线性代数的课程地位及特点, 从数学史、哲学思想、数学思维、科技领域及建模意识五个方面挖掘线性代数课程思政元素与实施, 实现课程思政的教学目标。

## 关键词

线性代数, 课程思政, 思政元素, 教学实施

# Exploration and Teaching Implementation of Ideological and Political Elements in Linear Algebra Course

Lihua Qin, Zhonghui Liu\*

School of Mathematics and Computer Science, Guangxi Minzu Normal University, Chongzuo Guangxi

Received: Jul. 5<sup>th</sup>, 2025; accepted: Aug. 3<sup>rd</sup>, 2025; published: Aug. 13<sup>th</sup>, 2025

## Abstract

Taking linear algebra as an example, combining with status and characteristics of linear algebra, explores the political elements and implementation of linear algebra from five aspects: mathematical history, philosophical thought, mathematical thinking, scientific and technological fields, and modeling awareness, to achieve the teaching objectives of ideological and political education in the curriculum.

## Keywords

Linear Algebra, Course Ideological and Political, Political Elements, Teaching Implementation

\*通讯作者。



## 1. 引言

2020年6月教育部印发《高等学校课程思政建设指导纲要》[1]指导性给出了各类课程开展课程思政的设计指导,公共基础课“注重在潜移默化中坚定学生理想信念、厚植爱国主义情怀、加强品德修养、增长知识见识、培养奋斗精神,提升学生综合素质。”线性代数是我校理、工、经管类的公共基础数学课程,该课程具有涉及面广、课时较多、重视度高的特点,对该课程开展课程思政工作是高校课程思政建设实现全覆盖、高质量的应有之义和必然要求,解决好数学知识传授和价值引领的融合问题,对高校课程思政建设具有重要的示范作用。但是极强的专业性,其内容多、难度高、较抽象的特点给教学带来相当程度的困难和挑战,课程思政工作还存在着一些亟待解决的问题。比如学生普遍有抵触情绪,课时紧张,教师课程思政能力不足等。因此,如何在知识传授过程中,融入课程思政元素,值得教育工作者深入思考和研究。近年来,课程思政背景下线性代数教学改革取得很大的成绩[2]-[11]。

结合前人的基础及我校教学理念和人才培养模式,参考《纲要》的指导性建议,依据线性代数课程教学目标,深度挖掘提炼课程知识体系中所蕴含的思想价值和精神内涵,注重学思结合、知行统一,从下面五个方面对线性代数课程思政教育进行了顶层指导性设计。

第一,通过线性代数发展史、数学家事迹等数学文化的介绍和学习,发掘文化自信、民族自豪感、使命担当和家国情怀等的课程思政点。

第二,发掘线性代数知识中蕴含的辩证思想和方法,引导学生理解这些辩证思想的本质和内涵,并将其迁移到日常为人处世的思考上来。

第三,引导学生发掘线性代数知识及知识发展中蕴含的数学创新思维,如归纳思维、逆向思维、类比思维、猜想思维等,引导学生感受这些数学创新思维运用方法和运用过程,感悟不同思维的真谛,分析其应用场景,训练学生运用合适的数学创新思维解决问题。

第四,结合线性代数知识在相关领域的应用案例,介绍我国相关领域科技发展历程,提升学生数学知识的应用意识,感受知识应用对科技发展的重要性,培养学生学以致用、勇于创新的科学意识和精益求精的工匠精神,激发学生时刻怀有一颗科技报国的家国情怀和使命担当的心。

第五,把数学建模的思想与方法渗透到教学内容中去,强调数学知识的应用。注重应用背景及应用实例的介绍,培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力。

## 2. 线性代数课程思政元素挖掘的路径

### 2.1. 渗透数学文化,实现文化育人

了解数学家的生平事迹及其数学思想,掌握数学发展的历史及其基本规律是必不可少的。汲取数学方法论知识,从中吸取经验和教训,将它们有效运用到以后的数学教育教学和数学科学研究中,从整体认识数学思想体系、文化内涵和美学价值,实现文化育人。因此在讲解数学概念、定理之前,可以借助古今中外相关数学家的生平事迹及伟大贡献,勉励学生正确面对挫折和失败,提高学习兴趣与积极性,给枯燥的数学公式推导增添一些乐趣,活跃课堂气氛,让学生明白教材上的每一个内容都是几代数学家智慧的结晶。例如,线性方程组的研究历史可以追溯到东汉时期的《九章算术》,书中首次采用分离系数的方法表示线性方程组。在国外,德国数学家莱布尼茨约在十七世纪首次开始研究线性方程组。通过

简单介绍线性方程组的历史, 让学生了解中国古代的数学文明, 树立学生的文化自信, 厚植爱国主义情怀, 要有勇攀科学高峰的责任感和使命感。到十七世纪, 为了便于解线性方程组, 行列式诞生了。在讲行列式的定义之前, 可以先讲行列式的发展历程, 借助关孝和、莱布尼茨、克莱姆等数学家们耳熟能详的故事, 让学生明白数学概念的形成是一个曲折而漫长的过程, 背后都蕴含着无数个数学家的付出与智慧, 从而激励学生奋勇拼搏, 培养刻苦钻研、科学严谨、不畏艰险、勇于探索的品质和一丝不苟做事态度。再如, 在讲解柯西施瓦茨不等式时, 可以介绍柯西、施瓦茨、布涅科夫斯基等伟大科学家的重要贡献, 揭示人类对数学科学的不断追求, 培养学生的科学精神, 提高学生的数学文化素养。

## 2.2. 通过数学概念与方法引入哲学思想

数学曾经是哲学的一个研究对象, 充满了丰富的哲学思想, 如由易到难、特殊到一般、化难为易、化繁为简、化抽象为具体等化归思想、量变引质变思想、形变质不变、矛盾对立统一等思想无一不是辩证法在自然科学的具体体现。例如, 通过二三阶行列式定义引出  $n$  阶行列式的定义; 证明行列式展开定理时, 先把三阶行列式的表达式提公因式后转化为第一行和二阶行列式来计算, 达到了降阶的目的, 然后从特殊的三阶行列式推广到了  $n$  阶行列式, 均体现了“先特殊后一般”的数学思想。对于计算一般的行列式时, 通常利用行列式的性质把一般的行列式转化为上三角行列式来计算, 体现了“一般到特殊”的数学思想。再比如, 在推导行列式其他等价定义形式时, 交换两元素的位置, 其蕴含着乘积不变但元素下标发生变化, 即“不变中有变”, 同时虽然下标逆序数改变, 但行标列标逆序数之和的奇偶性不变, 即“变中有不变”; 行列式和它的转置行列式相等; 把行列式一行(列)的倍数加到另一行(列), 行列式的值不变; “变”指的是行列式的形式, “不变”指的是行列式的值; 初等变换法解线性方程组保持方程组的解不变; 非退化线性替换保持二次型的正定性不变; 矩阵的初等行变换不改变矩阵的秩; 相似变换保持方阵的特征多项式、特征值、迹、秩、行列式不变等内容, 这些都体现“变与不变”的马克思主义辩证思想。对于高阶矩阵的运算采用矩阵分块法, 使大矩阵的运算转化为小矩阵的运算, 以及计算高阶行列式利用按行按列展开计算方法, 实现高阶转化为低阶从而简化运算, 体现了“化整为零”, “化繁为简”的辩证思想。

## 2.3. 从定义背后的异同点挖掘思政元素

案例 1 行列式是由  $n^2$  个数  $a_{ij}$  构成的数值, 用 “ $|$ ” 表示,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

矩阵是由  $m \times n$  个数  $a_{ij}$  构成的数表, 用 “ $[ ]$ ” 表示,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

形式与内容、现象与本质是联系紧密又不尽相同的哲学范畴, 行列式与矩阵两者虽然形式上相同, 但是本质上却有非常大的区别。例如, 行列式的行数等于列数, 共  $n^2$  个数, 用两竖  $|$  表示, 本质上是一个数; 而矩阵的行数不一定等于列数, 共有  $m \times n$  个数, 用小括号  $( )$  或者中括号  $[ ]$  表示, 本质上是一个

数表, 所以  $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ , 但  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1+0=1$  是可以运算, 但

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  是不可以运算, 因为只有同型矩阵才能相加。当矩阵的行数等于列数, 矩阵就称为方

阵, 此时行列式和方阵形式一样,  $||$  和  $()$  只是记号, 这就是说明了行列式和矩阵表象貌似相同, 但本质是不同的, 通过分析矩阵与行列式的本质区别, 教会学生看事物必须要看它的本质, 而把它的现象只看作入门的向导, 一进门就要抓住它的本质, 这才是可靠的科学的分析方法, 提升学生在不断实践和探索中透过现象看本质的能力, 从而培养学生对现象进行系统分析、总结研究的科学能力和积极思考、不断探索的科学精神。

案例 2 分类是一种重要的数学思想和数学逻辑方法, 在现实生活中有着广泛应用, 例如新冠肺炎疫情精准防控的关键是“分级分类”, 低风险是外防输入, 中风险是外防输入、内防扩散, 高风险是内防扩散、外防输出、严格管控, 再如动植物分类、垃圾分类等等。数学中的定义也要进行分类, 分类要有目的的分类, 不能为分类而分类, 要分而治之。如: 设  $A, B$  为  $n \times m$  矩阵, 若存在可逆矩阵  $P$  与  $Q$ , 使得  $B = PAQ$ , 则称  $A$  与  $B$  等价; 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 若存在可逆矩阵  $C$ , 使得  $B = C^T AC$ , 则称  $A$  与  $B$  合同; 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 若存在可逆矩阵  $C$ , 使得  $B = C^{-1}AC$ , 则称  $A$  与  $B$  相似。矩阵的等价、合同、相似三个定义非常相似, 在学习过程中学生容易混淆。因此, 通过对这三个概念的对比分析, 不仅能帮助学生厘清概念, 掌握三者之间的联系和区别, 也有助于学生对相关知识点的理解和课程脉络的梳理, 同时又展示了对比、分析、综合、分类等数学方法和概念判定中从抽象到具体的思维活动方式。此外, 在介绍分类思想时, 让学生树立分类的意识, 掌握分类的方法, 增强学生思维的缜密性和逻辑性, 提高分析问题、解决问题的能力, 可以根据实际情况融入爱国主义、政治教育、生态环境、时代精神等各种思政元素。

## 2.4. 培养爱国主义情怀, 增强科技兴国的责任感

线性代数课程概念多, 理论性强, 逻辑推理严谨, 对培养学生的逻辑推理能力、思维品质、创新能力等有着重要的作用; 另一方面该课程的许多概念和理论, 起源于生活生产实践, 具有广泛的应用性, 渗透到人们的实际生活、经济、军事等方面, 教学中, 让学生感受数学在生活中的应用, 提高学生的学习兴趣, 增强其热爱科学, 勤奋学习的责任感和自觉性。

该案例线性代数中矩阵的逆为教学内容, 从理想信念、爱国主义、科技报国、社会责任感等方面挖掘概念、定理中的思政元素, 将专业知识与思政元素有机融合。教学过程中, 播放以原型人物改编的电视剧《永不消逝的电波》, 介绍矩阵的逆在密码通讯中的应用, 感受密码通讯在战争成败中的关键作用, 培养学生的爱国主义情怀和理想信念; 通过对概念的引入和性质的讲解, 培养学生从特殊到一般, 从具体到抽象的解决问题的能力, 以及严谨的科学态度; 结合学生日常生活和国际形势, 进一步强调密码通讯在当今社会的重要性, 增强学生热爱科学, 科技兴国的激情和保家卫国的责任感, 最终实现价值引领与知识传授相结合的教学目标。

## 2.5. 数学建模应用意识

了解线性代数在数学建模中的应用, 对于提高学生学习线性代数的兴趣, 提升学生应用代数方法解决复杂问题的综合能力具有关键作用。

案例 3 某企业一年出口到美国、德国、日本两种货物  $A_1, A_2$  的数量、单位价格、单位质量及单位体积如表 1 所示。利用矩阵的乘法计算这一年该企业出口到美国、德国、日本的货物的总价值、总质量和总体积。

Table 1. Case 3

表 1. 案例 3

| 货物    | 数量/单位 |      |      | 单位价格/万元 | 单位质量/吨 | 单位体积/ $\text{m}^3$ |
|-------|-------|------|------|---------|--------|--------------------|
|       | 美国    | 德国   | 日本   |         |        |                    |
| $A_1$ | 3000  | 1500 | 2000 | 0.5     | 0.04   | 0.2                |
| $A_2$ | 1400  | 1300 | 800  | 0.4     | 0.06   | 0.4                |

$$\text{解} \begin{bmatrix} 3000 & 1400 \\ 1500 & 1300 \\ 2000 & 800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.04 & 0.2 \\ 0.4 & 0.06 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2060 & 204 & 1160 \\ 1270 & 138 & 820 \\ 1320 & 128 & 720 \end{bmatrix}$$

故总价值为 4650 万元, 总质量为 470 吨, 总体积为  $2700 \text{ m}^3$

由此得出的思政教育要素为:

1) 感受课程理论的简洁美、对称美、形式美:

矩阵是用来表示离散数据的重要工具, 使用矩阵运算解决问题, 具有清晰、简洁、严谨之美; 工欲善其事, 必先利其器。矩阵和矩阵乘法的引入能使计算清晰, 结果现实方便易懂。同学们做事之前要先想清楚方式和方法, 做好规划。

2) 培养团队协作精神:

矩阵和其元素的关系, 就如集体与个人的关系, 团结力量大。正如矩阵运算大大提高了单个数解决问题的能力。失之毫厘, 谬以千里。每个人要各司其职完成本职工作, 养成严谨、认真的好习惯。正如矩阵乘法运算中一个数字算错, 则整个矩阵出错。

案例 4 实物交换系统 假设一个原始社会的部落中主要有三种分工: 种植、狩猎、手工, 并且所有的商品实行物物交换。种植者通常把收获的粮食一半留给自己, 另一半均分给狩猎者和手工者; 狩猎者则把猎物留一半给自己,  $1/3$  给种植者,  $1/6$  给手工者; 手工者把制品平均分给三家; 这样就得到了一个实物交易系统。随着部落规模不断增大, 实物交易系统如何实现呢?

假设这个经济体系没有积累和负债, 再设粮食总价值为  $x_1$ , 猎物的总价值为  $x_2$ , 制品的总价值为  $x_3$ , 为公平体现部落的实物交易系统, 就得到以下线性方程组:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{cases}$$

此案例中, 介绍简单的商品经济模型, 通过公平定价商品价值引入线性方程组, 从而让学生了解线性方程组的实际应用价值, 提升对知识点的认可度和学习的兴趣, 并向学生传递了公平处事的人生态度, 培养了学生数学建模能力和创新精神。

案例 5 一个地区的总人口保持相对固定, 其中每年乡村中有 14% 的人搬到城镇, 城镇中有 6% 的人

搬到乡村。如果初始有 40% 的人生活在城镇, 60% 的人生活在乡村, 那么 10 年后人口比例会发生什么变化?

解 设  $x_0 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$  为该地区人口比例的初始状态, 则 10 年后的人口比例为  $x_{10} = A^{10}x_0$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 0.94 & 0.14 \\ 0.06 & 0.86 \end{pmatrix}$ , 令  $v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , 则  $Av_1 = v_1, Av_2 = 0.8v_2$ , 且  $x_0 = 0.1v_1 - 0.3v_2$ , 故  $x_{10} = A^{10}(0.1v_1 - 0.3v_2) = 0.1v_1 - 0.3(0.8)^{10}v_2$ , 因此 10 年后, 该地区城镇和乡村人口比例接近与 7:3。

案例 6 校园内共享单车的规范使用, 能极大地方便同学们的学习和证假设我 c. 校南湖校区的共享单车按规定只能停在特定的三个集中片区: 宿舍、食堂和教学楼, 在一个片区的单车可以在任意一个片区归还。每天从宿舍开启的自行车, 在三个片区归还的比例分别为 0.6, 0.3, 0.1; 从食堂开启的在三个片区归还的比例分别为 0.2, 0.7, 0.1; 从教学楼开启的在三个片区归还的比例分别为 0.1, 0.3, 0.6。假设一个学期的初始投放量固定为 600 辆, 请建立运营中单车数量在 3 个片区之间的转移的模型, 并讨论时间充分长以后的变化趋势。

解: 这是一个经典的状态转移问题。共享单车异地存放可行吗? 随着时间的推移, 这些单车的分布会发生怎样的变化, 能稳定运行下去吗? 设  $x_1(k), x_2(k), x_3(k)$  为第  $k$  个周期在三个片区的单车数量, 则可建立模型

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 0.6x_1(k) + 0.2x_2(k) + 0.1x_3(k) \\ x_2(k+1) &= 0.3x_1(k) + 0.7x_2(k) + 0.3x_3(k) \\ x_3(k+1) &= 0.1x_1(k) + 0.1x_2(k) + 0.6x_3(k) \end{aligned}$$

$$x = (x_1(k), x_2(k), x_3(k))^T, A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}, \text{ 则有 } x(k+1) = Ax(k)$$

由于矩阵  $A$  每列元素之和为 1, 则  $A^T$  必有特征值为 1, 因此  $A$  的特征值也为 1, 于是存在稳定解  $x$ , 有  $Ax = x$ , 当特征值为 1 时, 可求出属于 1 的特征向量为  $x = c(3, 5, 2)^T, c \in R$ , 根据题意, 有  $x_1 + x_2 + x_3 = 600$ , 所以  $x_1 = 180, x_2 = 300, x_3 = 120$

课程思政教育:

通过对该问题的分析与求解。学生除加深了对特征值和特征向量的性质的理解, 并可获得如下感悟:

1) 个人修养: 学习了共享单车稳定运行背后的数学原理后, 请反思自己在使用共享单车过程中应注意的文明规范举止。

2) 勇于创新: 做学问要勤学多思, 学以致用。同学们学会将实际问题用矩阵语言和矩阵运算去表示与求解。

3) 团队合作: 从提交的预习报告和课堂发言可见, 同学们集体讨论智慧大, 多交流多合作能碰撞出智慧的火花。

4) 文化自信: 共享单车作为我国“新四大发明”, 我们应增强文化自信和民族自豪感, 锐意进取。

5) 家国情怀: 共享单车的设计初衷是为方便人民的短途出行, 体现出科技为人民幸福生活服务的初心。同学们更应树立为人民服务的理念, 为中华之崛起而读书, 创新是学术发展和科技进步的源泉, 在当下国际大环境下更具深远的意义。

特征值和特征向量不仅是数学、物理等基础理论研究中的重要工具, 而且在工程、经济、信息等应

用领域也有重要作用。基于 2020 年第七次全国人口普查的背景, 本案例选择特征值在人口迁徙中的一个应用。通过此应用激发学生主动了解人口数量、结构、分布等对政策体系、经济发展、生态环境等的影响, 让学生树立大局意识和责任意识。同时选择时事作为应用案例可提升学生对课程学习的兴趣, 并有效培养学生的数学建模能力。

### 3. 结论

为了实现课程思政与思政课程的有机结合, 将“立德树人”融入到线性代数的教学课堂中, 深度挖掘梳理线性代数专业知识中蕴含的思政元素, 以马克思主义基本原理指导本课程的教与学。以辩证唯物主义方法阐释线性代数理论知识与研究方法, 提高学术水平和创新能力; 以历史唯物主义观点理解线性代数发展, 实现思想引领和价值引导。注重借助思政元素化解教学难点、提升专业知识理解能力。有机融入思政元素, 调动学生学习积极性, 开拓学生的视野。不断探索思政元素有机融入课堂教学的方式方法, 力求润物细无声。

### 基金项目

教育部产学合作协同育人项目 - 师范认证和课程思政背景下高等代数课程教学改革的探索(项目编号: 230905876255801); 广西民族师范学院课程思政教学改革项目 - 线性代数(项目编号: KCSZ202203)广西民族师范学院教学改革项目(项目编号: JGZD202201)。

### 参考文献

- [1] 中华人民共和国中央人民政府. 高等学校课程思政建设指导纲要[EB/OL]. 2020-5-28. [http://www.gov.cn/zhengce/zhengceku/202006/06/content\\_5517606.htm](http://www.gov.cn/zhengce/zhengceku/202006/06/content_5517606.htm), 2022-11-12.
- [2] 李国慧. 线性代数课程思政: 内容体系、挖掘途径及实施形式研究[J]. 潍坊学院学报, 2023, 23(5): 23-27.
- [3] 林丽芳, 曾月迪, 陈梅香. “线性代数”课程思政元素的挖掘——以线性方程组与高斯消元法为例[J]. 科学咨询(教育科研), 2023(9): 71-73.
- [4] 高月凤, 刘锡平. 线性代数课程思政教学方案设计与实践[J]. 大学数学, 2023, 39(3): 20-24.
- [5] 孟凡云, 陈伟. 一个都不能少——基于课程思政的“向量组极大线性无关组概念”教学设计[J]. 大学数学, 2023, 39(3): 107-112.
- [6] 赵燕, 胡京亭, 刘春燕. 线性代数课程思政的具体案例设计与思考[J]. 产业与科技论坛, 2023, 22(7): 198-199.
- [7] 孙娜, 张娟娟, 李巧艳. 线性代数课程思政建设——以矩阵及其运算的教学为例[J]. 学园, 2023, 16(4): 14-16.
- [8] 武慧虹, 钱淑渠, 黄宝勤, 等. 线性代数课程思政元素的挖掘及教学改革实践[J]. 安顺学院学报, 2022, 24(6): 108-112.
- [9] 卓玛吉, 刘秀丽. 课程思政在“线性代数”课程教学改革中的实践分析[J]. 大学, 2022(33): 95-98.
- [10] 范莉霞, 陈明. 线性代数课程思政教学的案例探索与实施[J]. 嘉兴学院学报, 2022, 34(6): 125-129+140.
- [11] 马巧云, 曹洁, 苏克勤, 等. 线性代数教学中的课程思政实践路径[J]. 黑龙江科学, 2022, 13(17): 126-128.