

学习进阶理论嵌入线性方程组课程的教学探究 ——以昌吉学院为例

马婷婷*

昌吉学院数学与数据科学学院, 新疆 昌吉

收稿日期: 2025年7月4日; 录用日期: 2025年8月2日; 发布日期: 2025年8月11日

摘 要

学习进阶是学生的认知发展从低级到高级的发展过程。某一主题的学习进阶模型对有效开展该主题的教、学、评具有重要的指导价值。学习进阶是对学生各学段学习同一主题的概念时所遵循的连贯的、典型的学习路径的描述, 一般呈现为围绕核心概念展开的一系列由简单到复杂、相互关联的概念序列。本文要研究的主要问题为构建线性方程组内容的学习进阶模型, 由模型可得出学生在线性方程组的每一个成就水平中, 具体的学习表现。本研究构建了解线性方程组的三维度, 每个维度又分为3个不同的层级, 揭示了数学抽象、逻辑推理、数学建模三个维度的递进式认知路径。九个能力层级呈现“具体-抽象-应用”的循环递进, 既体现知识掌握的纵向深入, 又实现核心素养的横向贯通。本研究结果了解线性方程组内容的课程设计提供了理论框架, 为教师评价学生的核心素养提供了层级化标准, 为学生提供层次化的学习模型, 具有一定的实际意义。

关键词

线性方程组, 学习进阶, 教学探究

Teaching Exploration of Embedding Advanced Theory into Linear Equation Systems Course

—A Case Study of Changji College

Tingting Ma*

College of Mathematics and Data Science, Changji University, Changji Xinjiang

Received: Jul. 4th, 2025; accepted: Aug. 2nd, 2025; published: Aug. 11th, 2025

*通讯作者。(电话: 13579253583, 邮箱: 1837019610@qq.com)

文章引用: 马婷婷. 学习进阶理论嵌入线性方程组课程的教学探究[J]. 教育进展, 2025, 15(8): 568-578.
DOI: 10.12677/ae.2025.1581476

Abstract

Advanced learning is the process of cognitive development of students from lower to higher levels. The advanced learning model of a certain topic has important guiding value for effectively carrying out teaching, learning, and evaluation of that topic. Advanced learning is a description of the coherent and typical learning path that students follow when learning concepts related to the same theme at different stages of their studies. It generally presents as a series of interrelated concept sequences, starting from simple to complex, centered around core concepts. The main problem to be studied in this article is to construct an advanced learning model for the content of linear equation systems. The model can be used to obtain the specific learning performance of students at each achievement level of linear equation systems. This study constructs a three-dimensional understanding of linear equation systems, with each dimension divided into three different levels, revealing a progressive cognitive path of mathematical abstraction, logical reasoning, and mathematical modeling. The nine levels of abilities present a cyclic progression of “concrete abstract application”, reflecting both the vertical depth of knowledge mastery and the horizontal integration of core competencies. The results of this study provide a theoretical framework for curriculum design of solving linear equation systems, hierarchical standards for teachers to evaluate students’ core competencies, and hierarchical learning models for students, which have certain practical significance.

Keywords

Linear Equation System, Advanced Learning, Teaching Exploration

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

国内主要对两种较为成熟的理论进行综述。关于“学习进阶”在数学学科领域方面的研究虽较生物、化学和物理领域稍有逊色，但近年研究已展现独特价值——通过融合“课程标准 - 学业质量 - 教学实践”三维度，构建出契合中国学生数学核心素养发展的进阶路径。基于 APOS 理论进行的学习进阶的研究，徐娜在 2019 年根据，建立了以“一次函数”为核心概念学习进阶模型，得出了学生在学习一次函数时学习进阶的具体表现[1]。赵安慧主要讨论了基于 APOS 理论中学函数概念的学习进阶研究[2]；戚艳兴和张妍在 2020 年构建了函数概念的学习进阶模型，她们都是以“函数”为核心概念，前者提出教学建议来指导教师教学，后者初步确定了函数概念的学习进阶预期水平表[3]。刘洋以平面向量数量积运算为例探讨了高中数学运算素养的学习进阶研究[4]。常宁，胡典顺以函数概念为例给出了数学概念学习进阶的路径探索[5]。刘春雪在 2023 年通过分析新课标，基于 APOS 概念理论，构建了高中指数函数概念的学习进阶模型，旨在帮助学生更好地理解和掌握指数函数的核心内容[6]。该模型包括操作、过程、对象和图式四个学习阶段，每个阶段又细分为两个水平，共计八个进阶水平。这些阶段不仅关注学生的指数函数意识和性质，还强调指数函数与其他数学知识之间的联系。通过这样的学习进阶模型，教师可以更有针对性地设计教学活动，以满足不同学生的学习需求。针对每个阶段也提出了相应的教学建议，以促进学生在理解指数函数时的思维发展和能力提升。

学习进阶提供了一个发展视野，一个可以长期指导教学的愿景。学习是涌现式的，因此总是充满变

数, 是否对预期结果有所了解, 对于建设性地管理复杂性至关重要。学习进阶将会促进平等学习机会。要实现学习进展, 它们在很大程度上依赖于教学实践。更有效的教学实践旨在通过让学生参与各种实践活动来建立理解, 包括通过观察或实验收集数据、表达数据、自己与他人推理数据的含义, 并将关键理念应用于新情境中。学生在学习进阶过程中进行建构和详细阐述符合认识论和当前研究发现的, 即孩子们能够自我问答: “我已经知道了什么?”, “我接下来应该做什么?”, “我是如何知道这个知识的?”, “我为什么要这样做去知道它?” 这表明他们具有元认知反思的能力。虽然学习者在他们的学习过程中可以选择不同路径, 但基于学习进阶的教学可以引导他们随着时间的推移发展出有意义的学习。

2. 线性方程组的相关概念

2.1. 线性方程组的形式

线性方程组是高等代数中的一个核心概念, 其一般形式可以表示为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是未知数, $a_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 是方程组未知量的系数, m 表示方程的个数, n 表示未知数的个数。

若设系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

未知量构成的列向量

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

以及常数项向量

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (m \text{ 维列向量}).$$

根据矩阵乘法的规则, Ax 表示系数矩阵 A 与未知量向量 x 相乘, 那么上述线性方程组(1)就可以写成矩阵形式:

$$Ax = B$$

其中 A 是 $m \times n$ 矩阵, x 是 n 维列向量, B 是 m 维列向量。

若将矩阵形式再变换为向量形式, 则

$$\text{可令 } \alpha_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} (j=1, 2, \dots, n), \text{ 它们是 } m \text{ 维列向量},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ 是 } n \text{ 维列向量,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ (} m \text{ 维列向量).}$$

根据向量的线性运算(向量数乘与向量加法), 原线性方程组(1)可以写成向量形式 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=B$ 。

2.2. 线性方程组的有解的充分必要条件

本节将给出在高等代数课程中解线性方程组的充分必要条件,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \cdots & & \cdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \quad (1)$$

其中, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是未知数, $a_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 是方程组未知量的系数, m 表示方程的个数, n 表示未知数的个数。

系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

增广矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

当系数矩阵 A 的秩 $r(A)$ 等于增广矩阵 B 的秩 $r(B)$ 时, 方程组有解。

3. 学习进阶的相关理论

3.1. 学习进阶的内涵

学习进阶的启动和指导源于“不让一个孩子掉队法案”和“州科学评估系统”的愿景。西蒙从建构主义的视角出发,最先提出了“假设性学习轨迹”,其中包括“学习目标、学习活动以及学生可能参与的思考和学习”。学习进阶主要有方法说、过程说和本质说三大流派。

方法说认为学习进阶指“随着学生不断地学习，在同一个内容领域内，相继出现的更复杂的推理方法”，主要是 Smith 等学者对学习进阶进行统一、精确的定义，特别关注学生在认知发展阶段中学习行为的演变。

过程说,是将学习进阶描述为学生认知水平提升的一种过程,美国国家科学教师协会(NSTA)对学习进阶给出这样的界定:它是一种特定途径,用以衡量并阐述学生在某一特定主题上,趋近或达到标准水

准的情况,突出了学习进阶所具备的完整性、机动性以及动态变化特性[7][8]。美国国家研究委员会(NRC)于2007年发布的《把科学带到学校:K-8年级的科学学习与教学》报告里,对学习进阶有更为深入的阐释:在较长时间范围内,学习者针对特定学习主题展开学习、深化理解时,想法逐渐精致化的过程描述[9]。即利用已有的研究基础、科学能力的互联互通(持续让学生参与有意义的问题探究)、围绕核心理念组织概念知识、识别多条路径和网络式增长;四个研究类别:科学的重大思想(the big ideas of science)、科学实践(scientific practices)、课程材料和教学(curriculum materials and instruction)以及评估和测量(assessment and measurement)。

本质来说,致力于理解学生表征的学习行为与他们所处的心理发展阶段之间的关联。Anderson等人(2013)在研究“质量守恒定律”与“能量守恒定律”的学习进程时指出,学习进阶不仅反映了知识获取的过程,更重要的是它描绘了学生特定心理结构的发展阶段[10]。在学习进阶发展最前沿的科学教育领域,Joseph Krajcik 和 Namsoo Shin,在2023年提出学习进阶不是列举学生需要记忆的某一领域中的知识,而是侧重于学习者运用他们的知识来理解自然现象或解决复杂问题。学习进阶包括一小组跨学科重要的核心理念,以解释学习者所经历的现象。学习进阶描述了一组概念如何整合,使学习者可以在需要时应用它们(即知识应用,深度理解)。

在我国,姚建欣等(2014)[11]通过对2010~2013的学习进阶论文比较,发现大多数研究都引用NRC,即“过程说”的定义方式来定义学习进阶,表明其定义方式逐渐被研究者所认可,也成为了后来我国研究学习进阶的基础。

学习进阶是以经验证据为依据,按照从简单到复杂、由低级到高级的顺序,对学科“大观念”所涉及的思维方式和学习路径展开的系统性描述。它描绘了随着时间的推移,学生对学科“大观念”的理解水平如何逐步提升,同时也强调了需要支持这种发展的教学实践和评价机制。

3.2. 学习进阶的要素

学习进阶的构建,需要深入研究海量文献资料,同时对特定阶段学生的认知水平展开调研,基于此,得出关于学生认知发展路径的假设性阐述。另外,学习进阶具备明显的层级特性,就如同我们日常生活中常见的“爬楼梯”,是一个逐步提升、循序渐进的过程。但是实际上将学习进阶比喻为攀岩墙更恰当,因为“所有学生将遵循的不仅仅是一个一般序列,而是多个(经常交互的)序列”,而攀岩墙代表了一个概念空间,提供了抓握点和障碍,支持多个起点和路线。循序渐进的学习才能使学生在已有的学习和生活经验下更加顺利地理解和掌握新的知识。

3.3. 学习进阶的测评研究

随着学习进阶研究的丰富化,学习进阶理论逐渐应用于学生思维发展研究去指导课程、教学与学生评价。因此,本文在选取测量方法时考虑的主要问题是:

- 1) (对于教师)我的学生是怎么想的?从这些想法里,能看出他们的线性方程组理解水平如何?
- 2) (对于教师)我的学生的想法有哪些层次和范围?
- 3) (对于教师)我的学生在线性方程组学习进阶的哪个阶段(以便我能集中精力,及时有效地为合适的学生提供适当的学习支持)?
- 4) (对于学生)我在线性方程组学习进阶的哪个维度的哪个阶段(这样我可以对自己所知道的有信心,并了解需要努力的方向)?
- 5) (对于两者)我的学生(作为一个个体的我)在学习吗?

学习进阶需要经过验证和可靠的评估任务,以确定学生在学习进阶上的位置。这样的信息非常宝贵,

因为它为教师和学生提供了学生掌握的知识以及教师需要采取的措施，以帮助学生在学习进阶中达到下一个水平。一些学者已经利用学习进阶研究开发评估工具，以跟踪某一领域中个体的发展成长。

4. 构建学习进阶模型

本文在研究过程中，主要运用了文献研究法、纸笔测试法、访谈法以及教学实践研究，对线性方程组章节的内容进行了学习进阶的分类。接着，编制测试工具，并根据专家的建议以及测试结果，对学习进阶的分进行了修正，最终形成了测试卷。

4.1. 研究思路与框架

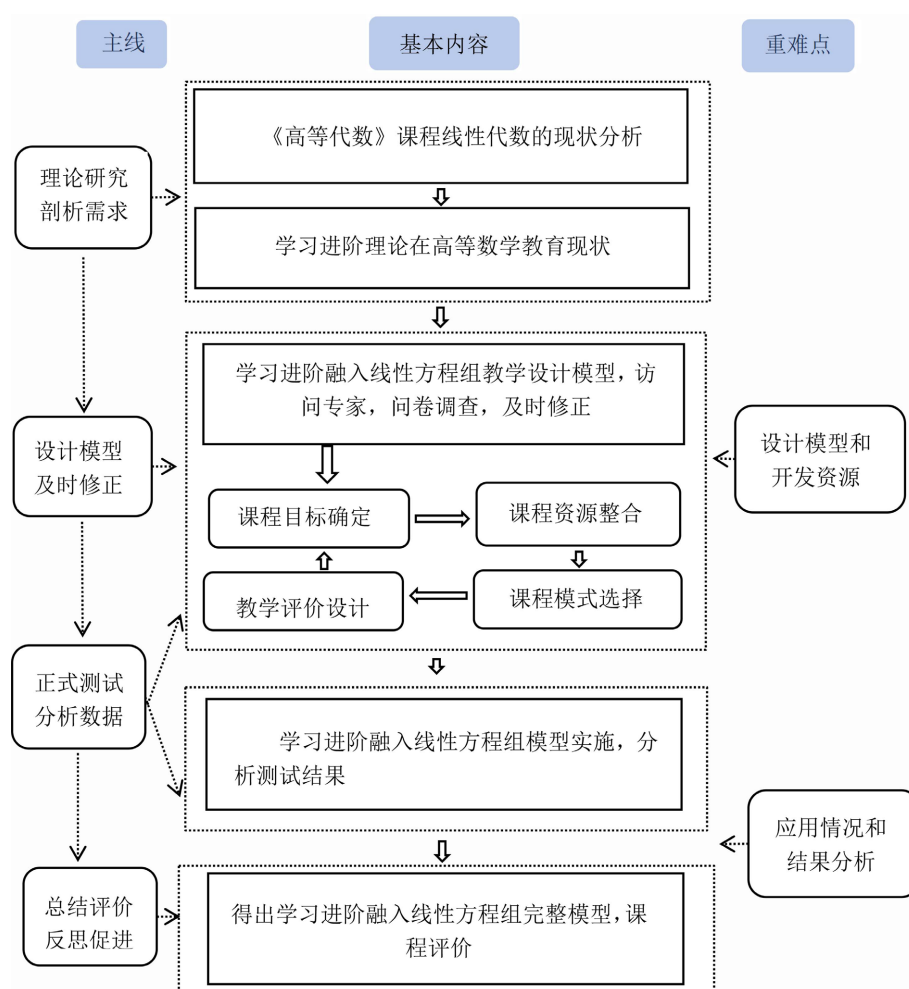


Figure 1. Research framework of the article

图 1. 文章研究框架

文章研究框架见图 1。

第一步，研究文献，明确思路。前期通过浏览相关书籍及检索文献资料，全面了解学习进阶和数列领域的研究背景，梳理过往研究成果，形成文献综述。这一过程为后续研究奠定了坚实的理论基础，指引研究方向，确保研究在科学、系统的轨道上稳步推进。

第二步，文本与理论分析，构建学习进阶假设。明确了研究方法和研究问题，并将其与《课程标准》

《人教 A 版》《北师大版》《苏教版》三版教科书相结合，对假设的线性方程组学习进行初步的建构，并将其与高中生的认知结构以及学科核心素养相结合，从而生成一份预测试题。

第三步，访问专家，修改初稿。根据专家建议，对预先设定的学习进阶模型和预测试卷，进行修正，建立更合理的学习进阶假设。

第四步：进行预测，二次修正。结合实际情况，有选择地分发试题，对学生的学习成果进行数据分析和总结；再一次和一线的教师以及教育专家进行研讨，与学生进行访谈。从而修正线性方程组进阶模型，对于测试卷的个别题目进行更换。

第五步：正式测试，分析数据。先对实验班 2 个和对照班 2 个的学生按照进阶水平进行教学，然后进行正式测试，分析正式测试数据结果，结合学生的答题情况，对结果进行分析对比，整合测试数据并对异常数据进行分析。最后再进行一次正式测试，分析测试结果。

第六步：验证完善，得出结论。构建出高中线性方程组学习进阶模型，并根据测验的结果进行深入的学情分析，为实际教学提出可行性建议。

4.2. 研究对象

本研究第一阶段是线性方程组进阶模型的构建阶段，第二阶段是线性方程组学习进阶的实证研究阶段，被试的对象在不同的研究时期也不同。在模型建构阶段，研究者主要选取高等代数的线性方程组章节内容，并对课程标准与各种版本的教科书进行深入分析。在前期研究基础上，本文明确了线性方程组的起点，最后邀请了一线的老师和教育专家，对研究结果进行审核。

在实证检验阶段，由于本研究的初次研究时间是在第一学期最后阶段，由于时间限制，所以预测试选择了大一某班的 52 名学生作为研究对象。对预测试的结果进行分析并据此优化进阶过程，此时的研究焦点是预测试的数据和在构建阶段确立的线性方程组学习进阶模型。正式测试的被试为昌吉学院的大一数学与应用数学 4 个班级的 199 名学生，检验线性方程组的进阶模型然后进行第二次模型修正。

4.3. 线性方程组知识假设性学习进阶模型的初步建立

4.3.1. 进阶终点

进阶终点即学习目标是指在学习进程的最后，希望学生能够获得的学科理解能力，社会期望值以及未来教育的最高水平，在制定学习目标时要对课程的内容和期望达到的水平进行详细的规定。在线性方程组的教学设计中，教师应当对课程内容进行深度加工，通过纵向延伸提升学生的知识应用水平。比如，帮助学生理解线性方程组的概念、求解方法及应用，并培养他们的问题解决能力及数学思维。

4.3.2. 进阶维度

随着时间和学习进程的发展，学生在学习技能和思维理解上发展的关键维度，以期了解学生的整体学习进程(如表 1)。

Table 1. Specific division of academic content
表 1. 学业内容具体划分

学业内容		学生学业内容具体划分
基础知识	概念理解	掌握线性方程组的定义； 理解线性方程组的有解的条件；
	公式理解	熟练掌握求解线性方程组的公式； 理解公式的推导过程，如通过判断增广矩阵的秩是否与系数矩阵的秩相等，体会数学；
应用能力	问题解决	能在实际问题情境中建立线性方程组关系，并解决问题； 能准确识别问题中的线性方程组特征，运用相关知识进行求解；

4.3.3. 成就水平和各水平的学业表现

成就水平和各水平的学业表现指学生在学习过程中从进阶起点到进阶终点要经历若干个中间环节与对应水平，纵向描述学生思维发展过程。目前，学习进阶成就水平的界定大多以已有的思维水平划分理论作为划分进阶水平的依据。

4.4. 学习进阶模型的修正

在初步构建线性方程组学习进阶的假设性进阶后，将前期分析构建出的线性方程组学习进阶模型，与教育领域专家、长期扎根教学一线的教师展开研讨。发放专家访谈问卷，咨询专家意见，如：进阶等级是否合理，每个进阶等级是否符合学生在相应阶段的学业成绩？测试题是否适合相应的进阶等级，是否成功考查到了学生对于线性方程组的理解？通过对专家咨询意见与一线教师教学反馈的信息梳理，对收集到的专业建议进行了整合分析，如下：

- 1) 成就表现中，概念第二阶段和性质运算第二阶段有所交叉。
- 2) 数学抽象的第二层级，可否加入渗透概念的变形。
- 3) 前两个维度的 L1 层级的成就表现可以对换一下，因为在建立线性方程组概念时，推导过程更重要一些，加入利用递推关系探究线性方程组。
- 4) 在每一个水平中引入数学思想会有灵魂。基于文献资料的深度研读和专家访谈的深入交流，本研究充分吸纳了领域专家的建设性意见，对初始研究假设中存在的不足进行了修正和完善。

Table 2. Learning progression model of the revised linear equation group
表 2. 修订后线性方程组的学习进阶模型

维度/阶段	成就水平	成就表现
数学抽象(转化的思想、函数的思想)/ 概念阶段	L1	能够解释线性方程组的形式和理解消元法。
	L2	能利用消元法来解线性方程组，首先给出线性方程组的增广矩阵，再进一步地转换。
	L3	能够化简出阶梯型矩阵，而且能用阶梯型矩阵写出相对应的线性方程组。
逻辑推理(方程的思想)/性质阶段	L1	知道线性方程组的解的结构。
	L2	理解线性方程组的增广矩阵的秩、系数矩阵的秩、未知量的个数和方程的个数间的关系，形成利用消元法解决问题的思想方法。
	L3	能根据线性方程组的解的结构和充要条件推出线性方程组的常用重要性质，并简化和解决有关问题。
数学建模(化归与转化思想)/应用阶段	L1	能在具体的实际背景和数学描述中，积极建立线性方程组问题，模仿学过的数学建模过程解决实际问题。
	L2	理解模型中各方程的意义，知道如何确定方程，并建立线性方程组模型去刻画实际问题。
	L3	能够运用数学建模的一般方法和相关知识，创造性地建立线性方程组模型，解决问题。

从表 2 中可知，修订后线性方程组的学习进阶模型将每个层级都描述的更具体了，这样在分析问题

时，能够更加快速、准确的找到原因。

5. 线性方程组学习进阶实证研究

5.1. 测试情况说明

本次研究的正式测试选择数学与应用数学的大一 4 个班(实验组)和数学与应用数学的大二 4 个班(对照组)共 399 名学生, 1 位教师对其实验组 4 个班的学生按照进阶水平进行教学完成正式测试。如果测试结果较之前有良好的改善, 可以考虑向其他院校推荐。

通过对被试学生的测试卷进行分析, 并结合测量数据, 对首次正式测试的结果进行了综合评估。对被试整体作答情况进行分析。

本研究首先基于初步构建的线性方程组学习进阶假设, 结合三版数学教材中的练习题, 开发了一个学习进阶测量工具。随后, 根据专家的意见对这一工具进行了修订。再经过正式测试, 最终形成了一个完整的线性方程组学习进阶测评工具。

该测试卷包含 23 道题目, 这些题目与最终确定的学习进阶模型各层级相对应。具体题目数量分布如下: 抽象阶段的水平 1 至水平 3 分别包含 12; 7, 9, 10, 14; 3, 4, 16(2)题。逻辑推理水平 1~3 涉及题目为 13; 8, 15, 16(1); 5 题。数学建模水平 1~3 涉及题目为 2; 11; 6, 17 题。本研究开发的测评工具是建立在扎实的理论基础和实证研究成果之上的, 能够有效评估学生在等差数列领域的学习进程和理解水平, 可作为诊断性测量工具应用于教学实践。

5.2. 测试结果分析

在正式测试中, 从某位教师所教授的大一、大二共八个班级中选取的学生样本数量相当, 并且男女比例保持均衡。因此, 实验结果不会因为不同班级选取的学生数量或性别比例的差异而产生显著偏差。

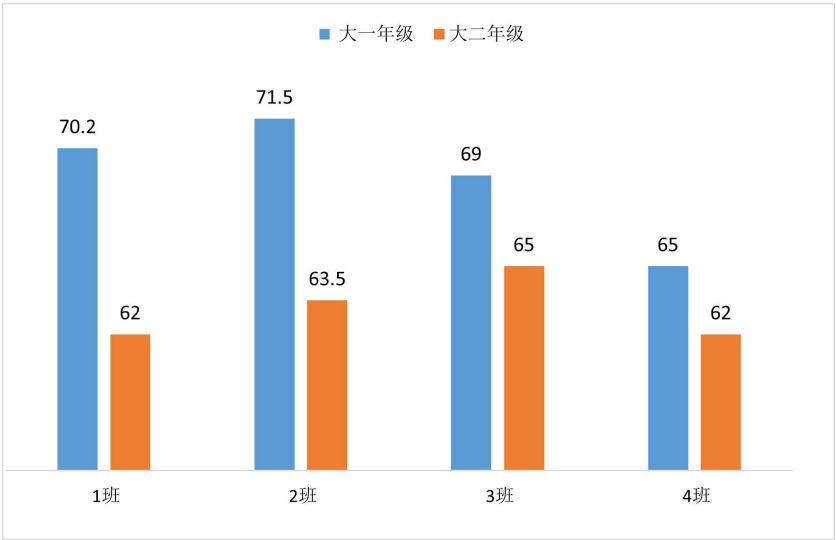


Figure 2. Comparison of average scores of four classes in the first and second year
图 2. 大一大二四个班平均分对比图

从图 2 中可以看出, 教师所执教的大一几个班的平均分均在 65 分及以上, 教师所执教的大二几个班的平均分最高为 65 分; 而且教师所执教的大一几个班的平均分成绩甚至均优于所执教的大二几个班的平均分。从平均分上能明显看出知道学习进阶理论之后对线性方程组进行教学, 学生学习表现的水平明显好于对照班。

6. 结论

通过本研究的实证研究,我们发现学生学习线性方程组主要存在以下障碍:概念理解困境、运算困境、数学思想方法应用困境等。线性方程组的学习进阶并非三个维度(数学抽象、逻辑推理、数学建模)的独立演进,也并非简单地遵循“概念理解—性质探究—实际应用”的线性顺序,而是表现出循环上升的趋势。测试卷包含 23 道题目,这些题目与最终确定的学习进阶模型各层级相对应。本研究开发的测评工具是建立在扎实的理论基础和实证研究成果之上的,能够有效评估学生在线性方程组领域的学习进程和理解水平,可作为诊断性测量工具应用于教学实践。

6.1. 线性方程组的学习障碍

通过本研究的实证研究,笔者发现学生学习线性方程组主要存在以下障碍。

概念理解困境。一方面,未能掌握线性方程组相关形式,对线性方程组解的结构的理解也浮于表面。另一方面,综合运用知识的能力较弱,许多题目只有在充分理解线性方程组解的结构的基础上才能求解,但学生难以做到。通过访谈存在问题的部分学生发现,多数人拿到题目后不知从何下手,不少同学对数列概念记忆模糊。

运算困境。在批阅测试卷时,发现学生在学习中普遍存在计算错误的问题。运算能力作为数学能力的根基,是数学学院学生必备的核心数学素养之一。线性方程组的解题过程,每一步都在考查学生的运算能力。许多题目看似简单,实则暗藏玄机。在线性方程组题目中,一旦某一步计算出错,最终结果必然错误。从学生测试卷的答题情况来看,运算问题十分突出。大部分在线性方程组解的结构学习上存在困难的学生,即便解题思路正确,也常因计算失误而丢分。

公式应用困境。线性方程组解题离不开对公式和性质的运用。一旦学生对公式记忆模糊,解题就会陷入困境。分析测试卷答题情况可知,学生对于基本公式的掌握尚可,但在运用上存在明显短板,尤其是线性方程组解的结构中增广矩阵的秩与未知量之间的关系,这严重影响了他们解题的效率和准确性。

数学思想方法应用困境。学好数学的核心是掌握数学思想方法。在线性方程组的学习过程中,融入了多种数学思维方法,其中函数思维、转化与化归的思想尤为关键。灵活运用这些思想方法至关重要,然而不少学生存在应用障碍。思想方法的运用在解决数列综合问题时极为重要。

6.2. 线性方程组的学习进阶模型

1) 学习者在线性方程组领域的认知发展呈现螺旋递进的特征

学生对线性方程组的掌握过程并非简单地遵循“概念理解—性质探究—实际应用”的线性顺序,而是表现出循环上升的趋势。虽然这三个模块相互关联,但只有在建立正确的概念认知基础后,才能有效开展后续的性质探究活动,对性质进行深入研究之后才能够将其置于生活情境中,进行线性方程组的应用。

2) 学习者突破关键点主要是理解知识间的联系与深层含义

从低层次来看,学生最开始在脑海中建立的是对线性方程组、增广矩阵与系数矩阵之间的关系的识别。学生在学习线性方程组的内容之前,已经在上一章学习了矩阵和行列式,所以对学生来说,新知主要是线性方程组的形式和求解方法。从最高阶水平分析,学生在学习过程中,最终要在脑海中建立起新旧概念之间的联系,并掌握线性方程组方法的解法与应用,以解决实际问题。这表明学生的认知难点在于对整个知识体系的全面把握以及对方法的理解性学习。

3) 线性方程组学习进阶的三个维度各包含三个水平

线性方程组的学习进阶并非三个维度(数学抽象、逻辑推理、数学建模)的独立演进,也并非简单地遵

循“概念理解－性质探究－实际应用”的线性顺序，而是表现出循环上升的趋势。例如，水平一(抽象 L1)中对线性方程组三种形式的精准理解，是水平一(推理 L1)掌握线性方程组中解的结构的前提。水平二(推理 L2)中“由阶梯型矩阵写出对应的线性方程组”的方程思想，促使学生在水平二(抽象 L2)中对“递推关系”产生更深层抽象理解。水平三(推理 L3)中推导的线性方程组的性质，直接成为水平二(建模 L2)中确定模型参数的关键依据。水平三(建模 L3)中复杂情境的建模需求，迫使学生在推理中突破纯公式应用，综合运用性质进行推理。

不同层级的过渡，均遵循“具体操作－形式化推理－策略性应用”的认知发展规律。如 L1→L2：以数学抽象维度为例，学生从 L1(机械记忆“线性方程组定义”)过渡到 L2(利用递推消元法推导解)，不能再局限于死板地理解概念了，要学会灵活地思考概念之间的变化。教师可通过变式任务，促进层级的提升，如给出非标准递推式，让学生在对比中强化知识点。L2→L3：从“单一应用”到“系统整合”逻辑推理维度中，学生从 L2 进阶到 L3(综合运用性质简化问题)，需要关联多个知识点的技巧。

基金项目

昌吉学院教学研究项目“学习进阶理论嵌入《高等代数》课程的教学路径研究——以昌吉学院为例”阶段性研究成果。

参考文献

- [1] 徐娜. 基于 APOS 理论的学生一次函数学习进阶模型的构建与检验[D]: [硕士学位论文]. 长春: 东北师范大学, 2019.
- [2] 赵安慧. 基于 APOS 理论中学函数概念的学习进阶研究[D]: [硕士学位论文]. 太原: 山西师范大学, 2020
- [3] 戚艳兴. 基于核心素养与 APOS 理论的高中生函数的概念学习进阶研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2020.
- [4] 刘洋. 高中数学运算素养的学习进阶研究——以平面向量数量积运算为例[J]. 数理天地(高中版), 2025(11): 148-150.
- [5] 常宁, 胡典顺. 基于数学概念学习进阶的路径探索——以函数概念为例[J]. 教育与装备研究, 2025, 41(6): 60-66.
- [6] 刘春雪. 基于 APOS 理论的高中指数函数概念的学习进阶研究[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨师范大学, 2023.
- [7] Songer, N.B., Kelcey, B. and Gotwals, A.W. (2009) How and When Does Complex Reasoning Occur? Empirically Driven Development of a Learning Progression Focused on Complex Reasoning about Biodiversity. *Journal of Research in Science Teaching*, **46**, 610-631. <https://doi.org/10.1002/tea.20313>
- [8] 韦斯林, 柳秀峰, 王祖浩. 基于 Rasch 理论的计算机模型教学测验的设计与应用[J]. 中国电化教育, 2014(7): 139-144.
- [9] Brown, T. (2008) Taking Science to School: Learning and Teaching Science in Grades K-8. *Science Scope*, **31**, 67-68.
- [10] Parker, J.M., de los Santos, E.X. and Anderson, C.W. (2013) What Learning Progressions on Carbon-Transforming Processes Tell Us about How Students Learn to Use the Laws of Conservation of Matter and Energy. *Educación Química*, **24**, 399-406. [https://doi.org/10.1016/s0187-893x\(13\)72493-5](https://doi.org/10.1016/s0187-893x(13)72493-5)
- [11] 姚建欣, 郭玉英. 为学生认知发展建模: 学习进阶十年研究回顾及展望[J]. 教育学报, 2014, 10(5): 35-42.