

# 基于实际应用背景构建《复变函数》课程的系统性教学框架

## ——以代数运算与幂级数的教学方法为例

王诗云, 吕振华

沈阳航空航天大学理学院, 沈阳 辽宁

收稿日期: 2025年7月17日; 录用日期: 2025年8月15日; 发布日期: 2025年8月27日

### 摘 要

《复变函数》是一门重要的大学工科数学基础课程。该课程理论体系完整, 应用背景鲜明, 特别是对电子、通信、自动化等专业的学生而言, 该课程对后继专业课程乃至研究生阶段的学习都是非常重要的。教学过程中, 将知识点与应用背景结合, 会对上课效果起到积极的促进作用。本文主要探讨复数的代数运算与复变函数的幂级数的教学实施过程, 主要介绍复数的加、减、乘、除的几何意义, 以及幂级数讲解过程中配合趣味性例题, 增强课堂的授课效果。

### 关键词

复变函数, 代数运算, 幂级数

# Building a Systematic Teaching Framework for the “Complex Variables” Course Based on Practical Context

## —Taking Teaching Methods for Algebraic Operations and Power Series as Examples

Shiyun Wang, Zhenhua Lyu

Department of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: Jul. 17<sup>th</sup>, 2025; accepted: Aug. 15<sup>th</sup>, 2025; published: Aug. 27<sup>th</sup>, 2025

文章引用: 王诗云, 吕振华. 基于实际应用背景构建《复变函数》课程的系统性教学框架[J]. 教育进展, 2025, 15(8): 1486-1491. DOI: 10.12677/ae.2025.1581603

## Abstract

“Complex Variable Functions” serves as a crucial foundational mathematics course for engineering disciplines in universities. Characterized by a comprehensive theoretical framework and distinct practical relevance, this course holds particular significance for students in electronics, communications, automation, and related fields. It provides essential groundwork for subsequent specialized courses and advanced studies at the graduate level. Integrating theoretical concepts with real-world applications during instruction significantly enhances classroom effectiveness. This paper examines the pedagogical implementation of algebraic operations of complex numbers and power series of complex functions. Specifically, it presents the geometric interpretations of addition, subtraction, multiplication, and division of complex numbers, and introduces engaging examples during power series instruction to optimize teaching outcomes.

## Keywords

Complex Variable Functions, Algebraic Operations, Power Series

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

复变函数主要研究复数域上的解析函数及其性质, 是数学分析的重要分支。在工科教育中, 复变函数因其强大的工具性, 成为电气工程、机械工程、航空航天等多个领域的核心数学基础。复变函数也是现代数学物理方法的重要组成部分, 与偏微分方程、傅里叶分析等紧密关联[1]。

工科专业中, 与自动化, 电信、通信等相关的专业, 都需要学习复变函数这门课程。复变函数是电路分析、信号处理的基础。通过拉普拉斯变换, 可将微分方程转化为代数方程, 简化系统响应的求解; 在交流电路分析中, 复数表示(相量法)是分析稳态响应的标准工具[2]。流体力学中的势流理论依赖解析函数, 如机翼绕流问题通过共形映射转化为简单几何模型[3]。系统稳定性分析需借助复平面的极点分布, 奈奎斯特判据即基于复变函数理论。调制解调技术与频谱分析依赖于傅里叶变换, 而复数域是频域分析的天然载体。复变函数训练了工科生的抽象思维与计算能力。这些能力对后续专业课程(如电磁场理论、自动控制)的学习至关重要。

因此, 如何将复变函数与各专业课程相融合, 提高复变函数课堂教学效果, 更好地为各专业课学习服务, 是有必要思考与探索的问题, 很多文献在这方面做了研究[4]-[7]。但针对复数的代数运算与幂级数部分的讨论相对较少。本文结合多年的教学经验, 探讨如何将复数的表示方法、代数运算、与几何意义结合起来讲授, 以及幂级数讲解时的例题的选择。

## 2. 复数的代数运算的教学方法研究

复变函数的代数运算(加、减、乘、除、乘方、开方、共轭等)不仅是理论分析的基础, 更是解决实际工程问题的核心工具。复变函数的代数运算不仅是理论推导的起点, 更是连接数学工具与工程实践的桥梁。它使复杂物理问题(微分方程、场分析、动态系统)转化为可计算的复代数形式, 显著提升工程问题求解的效率和深度。另一方面, 复数的三角(或指数)表达式和代数运算的几何意义对于复变函数在工程问题

中的应用起着积极的促进作用。下面就以复数的加、减、乘、除为例, 说明这一部分在教学中应注意的几点。目前, 很多教材[8]-[10]都是在第一节介绍复数的代数运算加减的定义和表示方法, 而将乘法和除法放在了第二节。这样处理会使得第一节的知识点很多, 而复数的代数运算即几何表示无法作为一个整体内容呈现。我们建议第一节重要介绍复数的各种表示方法, 比如: 向量和三角、指数表达式。而将复数的代数运算: 加、减、乘、除、幂、方根, 都放在第二节。

两个复数  $z_1 = x_1 + y_1i$  和  $z_2 = x_2 + y_2i$  的加法和减法运算定义如下:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (1)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (2)$$

这里注意, 若记

$$z_1 := (x_1, y_1), z_2 := (x_2, y_2),$$

则根据(1)~(2), 可得

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (3)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2), \quad (4)$$

因此, 复数的加法和减法的运算法则与向量的加法和减法的运算法则一致, 即代表着矢量的加减法, 也就是遵循对角线法则, 如图 1, 图 2。

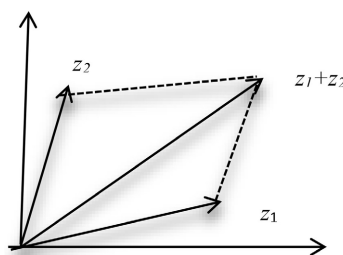


Figure 1. The geometric meaning of complex number addition (3)

图 1. 复数加法(3)的几何意义

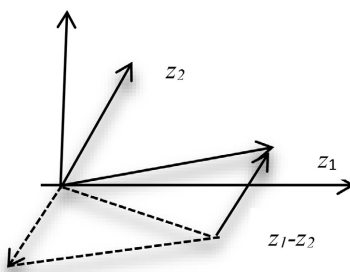


Figure 2. The geometric meaning of complex number subtraction (4)

图 2. 复数减法(4)的几何意义

两个复数  $z_1 = x_1 + y_1i$  和  $z_2 = x_2 + y_2i$  的乘法运算定义如下:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2), \quad (5)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} = \frac{(x_1 + y_1i)(x_2 - y_2i)}{(x_2 + y_2i)(x_2 - y_2i)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (6)$$

从(5)~(6), 我们是无法直接感受乘法的几何意义的。若记

$$z_1 := r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), z_2 := r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

那么

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2}}{e^{i\theta_2} e^{-i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{e^{i(\theta_1 - \theta_2)}}{e^{i0}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} (z_2 \neq 0). \quad (8)$$

即(5)式和(7)式表示同样的值  $z_1 z_2$ 。从(7), 我们观察到  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ,

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$$

这说明, 两个复数乘积的模等于两个复数的模的乘积, 两个复数的乘积的辐角等于两个复数的辐角的和。

由欧拉公式, 我们有

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2},$$

那么乘积  $z_1 z_2$  有指数形式

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

类似的, 从(8)我们观察到, 两个复数的商的模等于两个复数的模的商, 两个复数的商的辐角等于两个复数的辐角的差。

同理, 复数的乘幂与方根的定义以及几何意义, 均可按上述的思路展开。因此, 我们建议复数的所有表示方法先讲, 然后复数的代数运算以及对应的几何意义集中放在一节讲解。

### 3. 幂级数的教学方法研究

复变函数的幂级数理论是解析函数的核心内容, 在理论和工程应用中均具有不可替代的地位。幂级数提供函数的局部近似, 为微分方程数值解(如龙格-库塔法)提供理论依据[11]。在教学中, 可配合幂级数的实际应用, 增强学生在学习这部分内容时的动力和兴趣。例如, 我们可配合下面的例题, 同时考虑了复数的代数运算的几何意义以及幂级数的计算。

**例 1** 一只越来越懒惰并且作不均衡跳跃的青蛙, 第一跳跳了一米(从  $z = 0$  到  $z = 1$ ), 第二次跳了  $1/2$  米, 第三次跳了  $1/4$  米, 第四跳跳了  $1/8$  米, 依此类推, 并且每一次跳跃都在前一次跳跃路径上向左转一个角度  $\alpha$ , 青蛙最终会趋近于哪个位置?

对于这个问题, 授课教师可先建立坐标系, 标注第一次跳跃的落点  $z = 1$  (记为  $z_0$ ) 的点。然后带领学生标注第二次跳跃的落点记为  $z_1$ , 接着向学生提问“ $z_1 = ?$ ”, 由此联想到“拉伸 + 旋转”对应着复数乘法的几何意义, 因此  $z_1$  是  $z_0$  “拉伸 + 旋转”而得。接下来, 依次标记接下来的点, 即图 3 所示。

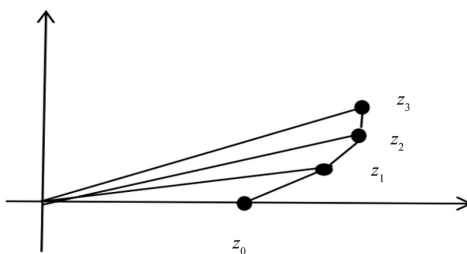


Figure 3. The landing point of a frog's leap  
图 3. 青蛙跳跃的落点

因此, 教师可板书如下:

$$\text{青蛙的起始位置 } z_0 = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 e^{i \cdot 0},$$

$$\text{青蛙的第1次起跳 } z_1 = 1 + z_0 \frac{1}{2} e^{i \cdot a} = 1 + \frac{1}{2} e^{i \cdot a},$$

$$\begin{aligned} \text{青蛙的第2次起跳 } z_2 &= \left(1 + \frac{1}{2} e^{i \cdot a}\right) + z_0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{i \cdot 2a} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} e^{i \cdot a}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{i \cdot 2a}, \end{aligned}$$

⋮

$$\text{青蛙的第 } n \text{ 次起跳 } z_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k e^{i \cdot ka},$$

其极限为  $z = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{ia}}$ 。当  $a = 0$ , 则  $z = 2$ , 即若青蛙一直沿  $x$  轴跳跃, 则它的极限位置在  $x$  轴 2 米处;

当  $a = \frac{\pi}{3}$ , 则  $z = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{i \frac{\pi}{6}}$ , 即若青蛙一直左转 60 度, 则它的极限位置在与  $x$  轴夹角 30 度, 长度为

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$  米处; 当  $a = \frac{\pi}{2}$ , 则  $z = \frac{4+2i}{5}$ , 即若青蛙一直左转 90 度, 则它的极限位置在  $z = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$  处。

另外, 教师可配合以下两道例题。① 用三角函数  $\sin x$  与  $\cos x$  的展开, 证明欧拉公式。对这道例题, 教师可依据  $e^{ix}$  的幂级数展开形式, 将偶数项和奇数项分离开, 即可得到  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , 通过这道例题, 使学生更加熟悉指数函数与三角函数的幂级数展开形式。② 近似计算  $e$  的值。教师可依据  $e^x$  的幂级数展开形式, 并令  $x = 1$ , 即可得到  $e$  的级数形式,  $n$  越大, 近似计算的精度越高。这两个例子都可以应用指数函数的幂级数的展开式, 使学生进一步感受幂级数的应用。

#### 4. 结论

复变函数作为连接纯数学与工程应用的桥梁, 其理论深度与实用价值使其成为工科课程体系中不可或缺的一环。掌握复变函数不仅能提升解决复杂工程问题的能力, 也为技术创新提供了数学工具。在实际教学中, 加入复数与复变函数的实际应用背景会促进教学效果。复数的代数运算有较强的几何意义, 幂级数有广发的实际应用。因此, 在讲解这两部分知识时, 教师应着重讲解代数运算的几何意义和应用。

#### 参考文献

- [1] Brown, J.W. and Churchill, R.V. (2013) Complex Variables and Applications. McGraw-Hill.
- [2] O'Neil, P.V. (2018) Complex Variables with Applications. Pearson.
- [3] Kreyszig, E. (2011) Advanced Engineering Mathematics. Wiley.
- [4] 胡波, 冯辉, 韩伟力, 等. 加快新工科建设, 推进工程教育改革创新——“综合性高校工程教育发展战略研讨会”综述[J]. 复旦教育论坛, 2017, 15(2): 20-27.
- [5] 阮世华, 林建伟. 工科复变函数课程的教学改革与实践探讨[J]. 吉林农业科技学院学报, 2020, 29(2): 106-108.
- [6] 陈冬梅, 范姗姗, 饶欢乐. 工科复变函数在创新人才培养的教学结构探索[J]. 教育现代化, 2020, 7(56): 109-111.
- [7] 王诗云, 王晓远, 王利岩. OBE 教育理念下, 以应用为背景推进数学基础课程教学改革——以复变函数为例[J]. 中国多媒体与网络教学学报, 2021(6): 237-239.
- [8] 西安交通大学高等数学教研室. 复变函数[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 1996.

- [9] 苏变萍. 复变函数与积分变换[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [10] 王诗云, 王晓远, 王利岩. 复变函数与积分变换[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2023.
- [11] Arfken, G.B., Weber, H.J. and Harris, F.E. (2013) Mathematical Methods for Physicists. Academic Press.