Advances in Education 教育进展, 2025, 15(9), 876-883
Published Online September 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2025.1591751

Hans汉斯

基于过程性变式教学的一类函数恒为零问题

陈 靖[1,2]，周秀香[1*]

[1]岭南师范学院数学与统计学院，广东 湛江
[2]广州大学数学与信息科学学院，广东 广州

收稿日期：2025年8月3日；录用日期：2025年9月4日；发布日期：2025年9月12日

摘 要

变式教学是一种常见的教学策略，尤其在数学课堂的一类专题中被广泛使用。基于过程性变式教学，对一类函数恒为零的问题进行了研究。针对华东师范大学数学系编写的《数学分析》第五版中的一道习题和数学竞赛中的两道题目，从分析习题与过程性变式两方面进行阐述，层层递进，多角度变式，遵循学生的认知发展规律，总结了此类问题的解决方法。通过对证明一类函数恒为零问题的过程性变式设计，旨在为教师提供过程性变式设计的启示。

关键词

过程性变式，函数恒为零，层层递进

A Study on the Problem of Functions Identically Zero Based on Process-Oriented Variant Teaching Methodology

Jing Chen[1,2], Xiuxiang Zhou[1*]

[1]School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang Guangdong
[2]School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou Guangdong

Received: Aug. 3rd, 2025; accepted: Sep. 4th, 2025; published: Sep. 12th, 2025

Abstract

Variant teaching is a common teaching strategy, especially widely used in a certain type of topic in mathematics classes. Based on process-oriented variant teaching, a study is conducted on the problem

*通讯作者。

文章引用: 陈靖, 周秀香. 基于过程性变式教学的一类函数恒为零问题[J]. 教育进展, 2025, 15(9): 876-883.
DOI: 10.12677/ae.2025.1591751

of a certain type of function always being zero. Focusing on an exercise problem in the fifth edition of "Mathematical Analysis" compiled by the Department of Mathematics of East China Normal University and two problems in mathematics competitions, this paper elaborates from the aspects of analyzing exercises and process-oriented variants, progressing step by step and varying from multiple perspectives, following the cognitive development laws of students, and summarizes the solution methods for such problems. Through the design of process-oriented variants for proving that a certain type of function is always zero, the aim is to provide teachers with inspiration for the design of process-oriented variants.

Keywords

Process-Oriented Variant, The Problem of Functions Identically Zero, Progressive

1. 文献综述

1.1. 变式教学

“变式教学”是教师帮助学生掌握概念或解决问题的常见教学策略。无论在理论还是实践层面，变式教学一直是国内外研究的热点，并取得了丰富的研究成果。

在理论层面，瑞典学者马登提出了“马登理论”或“变异教学理论”，他认为变异是学习的基础，通过变异可以对事物进行比较分析。Dienes 等国外学者在此基础上进行了深入探究，强调学习者通过多样化的教学策略尽可能地理解可变性概念，有助于学生理解抽象的数学概念。在我国，变式教学的研究可以追溯到上世纪 90 年代，数学变式教学是中国数学教育的特色。顾明远在《教育大词典》中将“教学变式”定义为“帮助学生准确掌握概念的重要教学策略之一”。其核心在于通过多样化的直观材料或具体事例，揭示事物的本质属性，或通过变换非本质特征凸显本质属性，引导学生区分本质与非本质属性，从而形成科学认知[1]。顾冷沅等学者在实践的基础上丰富了变式教学的内涵。

在实践层面，国外学者 MokIAC 运用 Marton 与顾泠沅的变式理论作为工具将变式教学应用于代数，李健将变式教学运用于“函数”的高三复习课、立体几何问题以及概率与统计教学中。刘长春与张文娣在《中学数学教学与能力培养》中系统探讨了中学数学变式教学的基本模式与策略，提出了六条课堂教学原则，并详细阐述了变式教学在概念课、定理课、习题课、复习课及评价课中的具体应用模式，为变式教学的实践提供了理论指导[2]。

在讨论变式教学时，不可避免地会比较变式教学与问题式教学的区别与共性。问题式学习(PBL)由加拿大麦克斯特大学于 1969 年首创，广泛应用于医学教育、基础教育等领域。问题式学习以真实问题为导向，通过探索真实问题来培养学生的思维能力和实践能力。尽管问题式学习和变式教学都通过解决问题来培养学生的思维能力，但二者存在差异。问题式教学的核心在于创设真实的问题情境，将真实问题数学化，以实现问题解决的目的。而变式教学的核心在于让学生在变化中抓住不变，理解知识的本质，学会解决问题，其问题情境不一定是真实的。

1.2. 过程性变式和概念性变式

国内很多学者将变式教学进行分类。顾冷沅团队基于对象与过程的概念两重性将变式教学分为“概

念性变式”和“过程性变式”。“概念性变式”注重情景引入，突出对概念的理解，通过改变概念的内涵或外在呈现形式逐步帮助学生多角度理解概念的本质。“过程性变式教学”则是强调通过动态变化揭示知识的内在规律，帮助学生更好地理解数学概念与过程，推动了教学方法的创新与发展[3]。过程性变式侧重于增长数学活动经验，而概念性变式则侧重于数学概念的掌握[4]。通过“概念性变式”和“过程性变式”的内涵可知，“过程性变式”不仅适用于概念教学，而且更加注重不同知识点间演变过程的联系，有层次地推动数学教学。

1.3. 文献评述

通过对变式教学、过程性变式和概念性变式和问题式学习(PBL)的相关研究文献整理发现，变式教学和问题式学习(PBL)作为数学教学常见的教学策略在基础教育中应用广泛，在高等教育中的相关研究相对较少。

本文选择过程性变式进行教学设计的原因如下：

其一，问题式教学(PBL)强调创设真实的问题情境，而变式教学则不一定需要使用真实情境。本文研究的是一类函数恒为零的专题问题，设计的问题情境都是数学情境，无需创设真实的问题情境。

其二，证明一类函数恒为零的专题不只是考查函数的概念，而是和函数的单调性以及构造函数等其他知识点联系起来，“过程性变式”不仅适用于概念教学，而且更加注重不同知识点间的联系，有层次地推动数学教学。

其三，从知识本身来看，证明一类函数恒为零的问题对学生而言较为抽象。

基于以上原因，过程性变式与一类函数恒为零的证明问题高度契合。

本文基于过程性变式教学，以一类函数恒为零问题为例，基于例题进行多角度过程性变式设计的案例研究。研究旨在丰富高等教育中过程性变式教学的案例，并通过证明函数恒为零的专题设计，为教师提供过程性变式设计的启示。

2. 追本溯源，分析习题

教材是学生的主要学习资料，是教师传授知识的桥梁，教材中的习题是编者根据知识的逻辑顺序和学生的认知心理编排的，是各种变式题的主要来源之一。很多试题都能在课本中找到原型——习题或例题(我们把由课本习题或例题演变而得到的新题称为课本变式题)，即人们常说的万变不离其宗也[5]。数学问题是数学的心脏，教材例习题为教材的重要组成部分，也是各级各类数学考试的重要来源之一，具有重要的借鉴价值[6]。下面的例子出自华东师范大学数学系编写的《数学分析》第五版[7]。

例 1.1 设 f 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上可微，且 $0\le f'(x)\le f(x)$， $f(0)=0$。证明：在 $\left[0,+\infty\right)$， $f(x)\equiv 0$。

这是一道《数学分析》教材中关于函数恒为零的习题，条件简单，关键在于找到解决问题的核心方法。对于这类问题，应教会学生如何通过分析和运用已知条件，逐步推导出所需证明的结论。过程性变式要求学生分步解决问题，首先，我们需要明确有哪些已知条件：

(I) f 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上可微；

(II) $0\le f'(x)\le f(x)$；

(III) $f(0)=0$。

接着，分析已知条件，将复杂的已知条件进行分解并解读，转化为简单的更能理解的知识点。

由第(I)个条件可知，函数的定义域为 $\left[0,+\infty\right)$，且在 $\left[0,+\infty\right)$ 处处可导。

将第(II)个条件中的不等式拆分成两个不等式，① $f'(x)\ge 0$，说明 $f(x)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 单调递增；② $f'(x)\le f(x)$。

过程性变式要求建立不同条件之间的联系，由第(II)个条件中的①和第(III)个条件推出在$[0,+\infty)$上$f(x)\ge 0$。

题目的目标是证明在$[0,+\infty)$上$f(x)\equiv 0$，未用的已知条件还剩第(II)个条件中的②，而我们已经推出在$[0,+\infty)$上$f(x)\ge 0$，接下来的关键点在于如何利用未用条件推出$f(x)\le 0$。

将第(II)个条件中的② $f'(x)\le f(x)$变形为$f'(x)-f(x)\le 0$，可以通过构造函数$g(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$并求导，得到

$$g'(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right).$$

因为$f'(x)-f(x)\le 0$且$\mathrm{e}^{-x}>0$，所以$g'(x)\le 0$。根据函数f的单调性可知，$g(x)$在$[0,+\infty)$单调递减，且$g(0)=\mathrm{e}^{-0}f(0)=0$，则在$[0,+\infty)$，$g(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)\le 0$。又因为$\mathrm{e}^{-x}>0$，所以$f(x)\le 0$。由前面的分析可知，在$[0,+\infty)$上$f(x)\ge 0$。

综合分析可知，在$[0,+\infty)$上$f(x)\equiv 0$，证毕。

学生已学习过函数单调性和不等式的性质，并能使用导数证明某些问题。尽管恒等于零的问题看似简单，但考察的是学生的综合分析能力。特别是在证明过程中需要构造函数，这不仅反映了学生对基础知识的掌握，还体现了他们对导数相关知识的理解和应用能力，展示了高阶思维水平。对于这类证明问题，学生往往存在心理障碍，害怕处理此类题目；同时，在知识层面，学生难以有效利用题目条件，无法将隐含的知识点联系起来。因此，这类题目要求学生将抽象的符号语言“翻译”成已学知识，综合运用条件构造函数以证明结论，从而归纳出解决恒等于零问题的基本方法，掌握核心解决方案。过程性变式注重知识经验的积累，从数学认知角度看，通过例题 1.1，学生可以积累解决最基础的等于零问题的经验，有助于解决后续例题和变式问题。基于过程性变式设计问题，能逐步帮助学生积累认知经验。

例 1.2 设f在$[0,1]$上连续可微，在$x=0$处有任意阶导数，$f^{(n)}(0)=0(\forall n\ge 0)$，且存在常数$c>0$使得

$$\left|xf'(x)\right|\le c\left|f(x)\right|,\quad \forall x\in[0,1]。$$

证明：(i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x^n}=0(\forall n\ge 0)$；

(ii) 在$[0,1]$上$f(x)\equiv 0$成立。

这是第十届全国大学生数学竞赛初赛试题(数学专业类)的第四题。例 1.2 的第(ii)问与例 1.1 相比，有异曲同工之妙，表明许多试题都以教材习题为变式来源，证明结论均在给定区间内证得$f(x)\equiv 0$。变化在于条件变得更加复杂，加入了参数n，不等式含有绝对值，且第(ii)问的条件依赖于第(i)问的结果，需要学生先证明第(i)问。

综上所述，尽管条件有所改变，但问题本质未变，解题思路可借鉴例 1.1，通过构造辅助函数求解。

证明：不等式$\left|xf'(x)\right|\le c\left|f(x)\right|$两边同时乘以$\left|f(x)\right|$，得到

$$\left|xf'(x)\right|\left|f(x)\right|\le c\left|f(x)\right|^2.$$

根据不等式的性质，则

$$xf(x)f'(x)\le\left|xf'(x)\right|\left|f(x)\right|\le c\left|f(x)\right|^2,$$

即$xf(x)f'(x)\le c\left|f(x)\right|^2$。该不等式变形为$xf(x)f'(x)-c\left|f(x)\right|^2\le 0$，$\forall x\in[0,1]$。

令$g(x)=\dfrac{f^2(x)}{x^{2c}}$，求导得$g'(x)=\dfrac{2\left(xf(x)f'(x)-cf^2(x)\right)}{x^{2c+1}}\le 0$，所以$g(x)$在$[0,1]$上单调减少。从而

$$\frac{f^2(x)}{x^{2c}} \le \left(\frac{f(t)}{t^c}\right)^2, \ \forall 0<t<x\le 1.$$

由(i)可得，$0 \le \dfrac{f^2(x)}{x^{2c}} \le \lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{f(t)}{t^c}\right)^2 = 0$，$\forall x\in[0,1]$。故由连续性可知，$f(x)\equiv 0$。

例 1.3 设$\alpha>0$，f 在$[0,1]$上连续可微，且对任何非负整数n，$f^{(n)}(0)$均存在且为零，存在常数$c>0$使得$\left|x^\alpha f'(x)\right|\le c\left|f(x)\right|$，$\forall x\in[0,1]$。

(i) 证明$\alpha=1$时，$f(x)\equiv 0$，$\forall x\in[0,1]$。

(ii) 若$\alpha>1$，举例说明上述结论不成立。

这是第十届全国大学生数学竞赛决赛试题(数学专业类)第四题，分析如下：

首先，观察题目的题干，可以发现其条件与例 1.2 相似，但多了一个参数α，使条件变得更为复杂。接下来，具体分析需要证明的结论。

第(i)问当$\alpha=1$时，$\left|x^\alpha f'(x)\right|\le c\left|f(x)\right|$转变为$\left|xf'(x)\right|\le c\left|f(x)\right|$，同样是证明某个给定区间内证明$f(x)\equiv 0$，这和例题 1.2 是一样的。

第(ii)问当$\alpha>1$时，不等式$\left|x^\alpha f'(x)\right|\le c\left|f(x)\right|$含参数$\alpha$，相较于第(i)问，难度上升，而且证明结论由$f(x)\equiv 0$成立变成了不成立，结论看起来变化比较大，我们只要找出特例即可，思路和前面两道例题一样。真正困难的点在于构造具体的函数$f(x)$，需要引导学生将新旧知识点联系起来。过程性变式注重知识点间的联系，从题干条件出发，由对任何非负整数n，$f^{(n)}(0)=0$联想到教材中的例题$g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\ne 0 \\ 0, \quad x=0\end{cases}$。令$f(x)=\begin{cases} e^{-x^{1-\alpha}}, x\in(0,1] \\ 0, \quad x=0\end{cases}$，可以验证$f(x)$满足假设条件，但$f(x)$不恒等于 0。

三道例题为过程性变式设计提供了变式来源。接下来的变式在三道例题的基础上进行改编，难度呈阶梯式上升，层次分明地推进了教学活动。这样的设计使学生能够在前一道例题中积累活动经验，从而启发对后一道例题的解决。

3. 过程性变式设计

变式教学的“变”指的是变更问题的非本质属性，变换条件和结论，转换问题的形式和内容，“不变”的是问题的本质，变式教学包括概念性变式和过程性变式。

本文基于对变式教学相关研究的文献整理，将过程性变式定义为通过创建基本问题，并在此基础上进行多角度、多层次的变式，使学生在变式中抓住不变的本质，逐步理解概念或解决问题。过程性变式特别强调变式之间的衔接性和层次性。

本文采用过程性变式教学法，通过三道例题的设计，从简到难，层层递进，引导学生逐步解决问题。学生在一系列变式问题中，能够体会到复杂问题的本质，将晦涩难懂的问题转化为简单熟悉的问题，从而掌握类似$f(x)$恒等于 0 证明问题的解题技巧，克服解题障碍。

3.1. 变式 1——将条件形式相似化

针对例题 1.2 进行变式，将题目中不等式的绝对值去掉变为$0\le xf'(x)\le cf(x)$，将证明的第(i)个结论变为条件，得到变式 1：

变式 1 设f在$[0,1]$上连续可微，在$x=0$处有任意阶导数，$f^{(n)}(0)=0(\forall n\ge 0)$，且存在常数$c>0$使得$0\le xf'(x)\le cf(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x^n}=0(\forall n\ge 0)$。证明：在$[0,1]$上$f(x)\equiv 0$成立。

对比例题 1.2，变式 1 满足和例题 1.2 相似的三个条件：

(I) f 在 $[0,1]$ 上连续可微；

(II) $0 \le xf'(x) \le cf(x)$；

(III) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x^n} = 0 (\forall n \ge 0)$。

思路 1：将变式的条件(II)的连不等式拆分为 $0 \le xf'(x)$ 和 $xf'(x) \le cf(x)$。因为定义域为 $[0,1]$，所以 $x \ge 0$，故 $f'(x) \ge 0$。取 $n = 0$，则条件(III)为 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$。由于 f 连续可微，所以 $f(0) = 0$，可推出在 $[0,1]$ 上 $f(x) \ge 0$。

关键步骤构造函数，$xf'(x) \le cf(x)$ 变形为 $xf'(x) - cf(x) \le 0$。令 $g(x) = x^{-c} f(x)$，求导得 $g'(x) = x^{-c-1}(xf'(x) - cf(x))$。因为 $x^{-c-1} > 0$，$xf'(x) - cf(x) \le 0$，则 $g'(x) \le 0$。由此可知，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，则 $g(x) \le g(0) = 0$。因为 $x^{-c} > 0$，所以 $f(x) \le 0$。又因为 $f(x) \ge 0$，由此可知 $f(x) \equiv 0$。这种解题方法和例 1.1 是一样的。

教学在于传授知识的同时，发展学生的智力，其核心成分是思维[8]。过程性变式侧重培养思维能力，思路 1 与例 1.1 相似，而思路 2 则更为简洁，但考察了学生的高阶思维能力。教师应引导学生在解决同类问题时采用多种方法，以拓展其思维方式并培养通过不同途径解决问题的能力。正如“条条大路通罗马”，以下方法同样可以达到求解的目的。

思路 2：将 $xf'(x) \le cf(x)$ 变形为 $xf'(x) - cf(x) \le 0$。令 $g(x) = x^{-c} f(x)$，求导得 $g'(x) = x^{-c-1}(xf'(x) - cf(x))$。因为 $x^{-c-1} > 0$，$xf'(x) - cf(x) \le 0$，结合条件(III)可得，即 $g(x) \equiv 0$。由于 $x^{-c} > 0$，可证得 $f(x) \equiv 0$。

设计意图：变式 1 提供了两种解题思路，无论采用哪种思路，都应让学生掌握证明此类问题的关键。过程性变式的核心在于对比原题，区分“变”与“不变”。变式教学的作用是在比较与辨别中发现数学知识的变化与差异，在“变”中发现“不变”，依据知识变化的轨迹与规律，创造新的知识[9]。引导学生回归本原问题，渗透转化与化归的思想。通过对比例题 1.1，尽管区间范围和条件形式有所变化，但题目本质不变，解题思路可依样画葫芦，真正的难点在于构造函数。通过变式 1，让学生初步学会在比较与辨别中发现数学知识的变化与差异，掌握该类问题的解题技巧，尤其是构造函数的技巧。

3.2. 变式 2——改变参数 α 的范围

例 1.3 中参数 α 的范围大于 0，而题目只证明了 $\alpha = 1$ 和 $\alpha > 1$ 两种情况，所以可以考虑 $0 < \alpha < 1$ 的情况。同时，例题 1.3 中参数 α 的范围为大于 0，可以考虑将参数 α 扩充到整个实数域内，即考虑 $\alpha \le 0$ 的情况。将这两种情况进行合并得到变式 2：

变式 2 设 $\alpha < 1$，f 在 $[0,1]$ 上连续可微，$f(0) = 0$，存在常数 $c > 0$ 使得 $|x^\alpha f'(x)| \le c|f(x)|$，$\forall x \in [0,1]$。证明：$f(x) \equiv 0$，$\forall x \in [0,1]$。

分析：变式 2 只是参数 α 的范围发生了变化，题目的条件和结论并未发生改变，所以解题思路和例题 1.3 是相同的。

证明：令 $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{2cx^{1-\alpha}}{\alpha-1}} f^2(x)$，则 $g(0) = 0$ 且 $g(x) \ge 0$。求导得，

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2c\mathrm{e}^{\frac{2cx^{1-\alpha}}{\alpha-1}} x^{-\alpha} f^2(x) + 2\mathrm{e}^{\frac{2cx^{1-\alpha}}{\alpha-1}} f(x) f'(x) \\ &= 2x^{-\alpha} \mathrm{e}^{\frac{2cx^{1-\alpha}}{\alpha-1}} \left(x^\alpha f(x) f'(x) - cf^2(x)\right) \le 0. \end{aligned}$$

因而， $0 \le g(x) \le g(0) = 0$ 。所以， $f(x) \equiv 0$ ， $\forall x \in [0,1]$ 。

设计意图：变式 2 由例题 1.2 改编而来，虽然前提条件改变了，实际上主要条件和证明的结论都是相同的，过程性变式注重引导学生，注重积累学生的活动经验，学生在变式 1 已经获取了构造简单的复合函数的经验。过程性变式教学注重引导学生积累活动经验。在变式 1 中，学生已掌握构造简单复合函数的经验，因此可以轻松将例 1.2 的解题方法迁移到变式 2 中。尽管函数的构造和求导更复杂，但问题本质未变。通过本题学习，学生可从原题出发扩充知识储备，认识到题海战术虽有效，但并非最有效的学习方法。教学应从“教”为中心转向“学”为中心，引导学生发现问题、提出问题、解决问题。从过程性变式角度看，变式 2 比例 1.2 更难，不是题目本身难度增加，而是参数范围包含负数，解题时学生可能产生心理障碍。教师需引导学生挖掘题目本质，用先前知识激活新知识。学会解一道题容易，而学会解一类题则需教师更多思考。换言之，学生对知识和方法的深度理解和灵活应用，学生批判性思维与创造思维、合作能力与交流能力、内在学习动机与自主能力的培养，以及学生核心价值观与创新素质的发展，都必须通过学生积极主动的思维[10]。学生经历了前面例题和变式的学习，掌握了一定的方法，从构造简单的函数到构造复杂的函数解决问题，符合思维从模仿到创新的高阶思维的发展规律[11]。

3.3. 变式 3——改变自变量的取值范围、不等式

变式 3 设 $\alpha < 0$ ， f 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微，且 $0 \le x^{\alpha} f'(x) \le f(x)$ ， $f(0) = 0$ 。证明：在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x) \equiv 0$ 。

分析：令 $g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}} f(x)$ 可证得结论。

综合上述，对实数集中每一个 α 均有相关讨论。

设计意图：变式 3 由例 1.2 改编而来，将参数 $\alpha > 0$ 改成了 $\alpha < 0$ ，将区间 $[0,1]$ 改成了 $[0,+\infty)$ ，将不等式 $\left|x^{\alpha} f'(x)\right| \le c\left|f(x)\right|$ 改成了 $0 \le x^{\alpha} f'(x) \le f(x)$ ，所有条件均已改变。尽管题目“面目全非”，但分析后发现仍需在某个区间上求证 $f(x) \equiv 0$ ，使学生对该类问题有更深入全面的理解。通过分类讨论参数 α ，学生不仅能掌握基础知识和技能，还能掌握基本方法和思想，举一反三，拓展思维。

通过上述三个层次递进的过程性变式设计，如果将这一设计付诸实践，学生可以逐步经历证明一类函数恒为零的问题，增加相关活动经验，进一步掌握解决该类问题的技巧。在认知结构的过程中，学生将逐步构建一个多层次的经验系统，将函数的单调性、导数和构造函数的经验有机地连接起来。

4. 证明 *f* 在某区间内恒为零的方法总结

该类问题一般满足以下几个条件：

(I) f 在区间上连续可微；

(II) 不等式提供了 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的关系，暗示 $f(x)$ 的增长受到限制；

(III) 存在一个等式等于零。

则有结论：在区间上 $f(x) \equiv 0$ 。

核心思路：将不等式变形为右侧恒为零的形式，通过构造新函数 $g(x)$ 并求导，利用变形后的不等式判断 $g'(x)$ 与零的大小关系，分析得出 $f(x)$ 与 0 不等关系，最终得到在区间上 $f(x) \equiv 0$ 。

5. 总结与反思

5.1. 过程性变式设计要注重思维的培养

从心理学角度看，思维是大脑对客观事物本质属性、内在联系和概括的反映，通过语言、符号、图

像等形式表达和交流。过程性变式强调分层次推进数学活动，让学生逐步解决问题，形成数学思维，掌握数学知识本质，了解知识的来龙去脉，达到知识迁移。本文以华东师大第五版《数学分析》P148 第 14 题为变式来源，对比分析了例 1.2 和例 1.3，尽管条件变化，但问题本质不变。基于例 1.2 和例 1.3，设计了 3 道变式题，由简到难，挖掘数学符号背后的隐含知识，通过例题和变式题的学习培养学生的思维。具体而言，第一道变式题将条件相似化，便于学生理解基本概念；第二道变式题改变参数范围，要求学生深入思考；第三道变式题结合多个知识点，挑战学生的综合应用能力。每道变式题都精心设计，旨在培养学生的思维能力。因此，在进行过程性变式设计要注重思维的培养。

5.2. 过程性变式设计的题目要遵循层层递进的原则

过程性变式是数学活动的有层次推进，使学生分步解决问题，这就意味着在过程性变式设计的题目要层层递进，由简到难，符合学生的心理认知规律，在进行过程性变式设计时要考虑学生的“最近发展区”。进行题目设计时既要考虑学生的学情，还要设计有挑战性的题目激发学生的潜力。复杂的题目是由简单的题目演变而来的，在解决复杂问题时，教师需要引导学生抽茧剥丝，一步步地有逻辑地解决问题，让学生在一系列的过程性变式中逐步形成知识网络。

5.3. 过程性变式设计要注重目标导向，总结解题方法

老子曾说：“授人以鱼，不如授人以渔。”意思是与其传授知识，不如教授学习方法。在数学学习中，与其让学生背诵定理、概念和公式，不如教会他们理解知识，掌握学习方法，引导他们归纳解决同类问题的技巧，这样可以事半功倍。无论题目如何变化，其核心思想和目标不变。解决问题时，要清晰分析题目条件，理解条件背后的知识点，建立知识点之间的联系，逐步向目标迈进，最终实现目标。例如，在解决几何问题时，学生不仅要记住各种图形的性质和公式，还要学会通过观察图形，找出隐藏的关系和规律，从而灵活运用所学知识。简言之，过程性变式设计应注重目标导向，总结解题方法，帮助学生在面对不同类型的题目时，能够举一反三，灵活应对，从而提高学习效率和效果。

进一步可以思考，如果出现 $f'(x)\le f^2(x)$ 这类非线性条件，又如何进行过程性变式设计呢？针对一道试题进行思考，可以探究学科之根本，切实辅助进行知识实践。

基金项目

获广东省基础与应用基础研究基金自然科学基金面上项目资助(2024A1515010709)。

参考文献

[1] 顾明远. 教育大辞典[M]. 上海: 上海教育出版社, 1999: 186.

[2] 刘长春, 张文娣. 中学数学变式教学与能力培养[M]. 济南: 山东教育出版社, 2001.

[3] 顾泠沅, 黄荣金, 费兰伦斯·马顿. 变式教学: 促进有效的数学学习的中国方式[J]. 云南教育(中学教师), 2007(3): 25-28.

[4] 顾泠沅, 郑润洲. 青浦实验启示录[M]. 上海: 上海教育出版社, 2000: 124-126.

[5] 章建跃, 王嵘. 中国数学教科书使用变式素材的途径和方法[J]. 数学通报, 2015, 54(10): 1-8+48.

[6] 盛昊灿, 张景斌, 丁新宇. 基于数学教材例习题的变式研究[J]. 数学通报, 2025, 64(2): 45-49+54.

[7] 华东师范大学数学科学院. 数学分析上册[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019: 148.

[8] 杨利刚. 解题教学中“顺势变式、即时追问”的运用与思考[J]. 数学通报, 2022, 61(11): 47-50.

[9] 陈碧芬. 运用变式教学引向高阶目标[J]. 数学通报, 2023, 62(6): 27-30.

[10] 朱许强, 沈自茹. 思维型教学: 核心思想、特点及实施策略[J]. 教育理论与实践, 2025, 45(10): 52-57.

[11] 张兴华. 基于过程性变式教学的一类几何最值问题探究[J]. 数学通报, 2025, 64(2): 58-61.