

新工科背景下应用统计学专业高等代数课程的案例式教学

——以机器学习中的核方法为例

朱晓鸣, 庞彬彬

合肥大学数学与统计学院, 安徽 合肥

收稿日期: 2025年7月27日; 录用日期: 2025年8月26日; 发布日期: 2025年9月4日

摘要

在新工科背景下, 传统高等代数课程亟需与现代工程技术相结合, 以提升学生的实际应用能力。本文以机器学习中的核方法为例, 探讨如何通过案例式教学法创新高等代数课程的教学模式, 以促进应用统计学专业学生对高等代数知识的深入理解与应用。通过引入支持向量机, 系统性地讲解核函数、特征空间映射及相关代数运算在高维数据分析中的重要作用, 从而帮助学生更好地理解高等代数在数据分析中的实际应用。教学反馈表明, 案例式教学提高了学生对高等代数核心概念的掌握, 促进了理论与实践的有效结合, 从而推动了高等代数与现代工程技术的深度融合。

关键词

应用统计学, 高等代数, 案例教学, 核方法

Case-Based Teaching of Advanced Algebra in the Applied Statistics under the New Engineering Discipline

—A Case Study of Kernel Methods in Machine Learning

Xiaoming Zhu, Binbin Pang

School of Mathematics and Statistics, Hefei University, Hefei Anhui

Received: Jul. 27th, 2025; accepted: Aug. 26th, 2025; published: Sep. 4th, 2025

Abstract

In the era of the New Engineering Discipline, traditional advanced algebra courses must urgently

integrate with modern engineering technologies to enhance students' practical application skills. This paper uses kernel methods in machine learning as a case study to explore how case-based teaching can innovate the teaching model of advanced algebra, fostering a deeper understanding and application of advanced algebra concepts among students in the Applied Statistics program. By introducing support vector machines, the paper systematically explains the role of kernel functions, feature space mapping, and associated algebraic operations in high-dimensional data analysis, thereby helping students better grasp the practical applications of advanced algebra in data analysis. Teaching feedback indicates that case-based teaching has improved students' mastery of key advanced algebra concepts, facilitated a more effective integration of theory and practice, and thus fostered a deeper connection between advanced algebra and modern engineering technologies.

Keywords

Applied Statistics, Advanced Algebra, Case-Based Teaching, Kernel Methods

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 概述

在新工科背景下, 传统学科教学正面临前所未有的机遇与挑战[1]。随着现代工程技术与信息科学的迅速发展, 学科间的界限逐渐模糊, 跨学科综合应用能力已成为学生核心素养的关键组成部分。为适应这一趋势, 现有的教育体系亟需改革, 以培养具备创新能力与实践能力相结合的工程技术人才。在这一背景下, 作为应用统计学专业基础课程之一的高等代数, 其教学内容与教学方法必须紧跟时代发展的步伐, 以适应新工科对统计人才的需求[2]-[4]。

应用统计学专业作为新工科教育的重要组成部分, 其课程设置不仅要传授扎实的数学基础, 还应培养学生在数据分析、机器学习等现代工程技术领域的应用能力[5]-[8]。在这一过程中, 高等代数的教学发挥着举足轻重的作用。然而, 传统的高等代数教学模式过于侧重于理论推导与计算训练, 未能有效地与工程应用相结合, 课程内容往往使学生感到代数理论脱离实际, 缺乏将所学知识应用于复杂工程问题的动机与能力。这种教学方式不仅未能激发学生的学习兴趣, 还导致学生在面对机器学习、大数据分析等现代工程问题时, 难以运用数学工具进行问题分析与解决[9]。

为应对这一挑战, 本文提出一种创新性的教学方法——案例式教学, 目的是通过将高等代数与机器学习中的核方法相结合, 探索新工科背景下应用统计学专业高等代数课程的教学改革。在此过程中, 基于实际问题的案例式教学往往能够促进学生对抽象代数概念的理解和知识迁移, 这一理念同样能够得到建构主义学习理论和情境认知理论的支持。

建构主义学习理论认为, 学生通过与环境互动、合作与实际问题的反思, 主动建构知识体系。传统的被动学习模式, 如单纯记忆与复述, 无法帮助学生有效理解抽象概念。相反, 学生应在解决实际问题的过程中, 通过探索和实践来内化知识。在高等代数的教学中, 案例式教学能够通过将抽象理论与实际问题相结合, 帮助学生更好地理解和应用代数知识, 提升其解决实际问题的能力。

情境认知理论则强调知识的学习和应用应嵌入特定情境中。通过在具体情境中解决问题, 学生不仅能加深对知识的理解, 还能提高知识迁移能力。对于高等代数课程, 情境认知理论表明, 将代数概念与机器学习等现代技术应用相结合, 能够帮助学生在实际问题中更好地理解和运用数学知识。案例式教学

正是通过实际应用情境增强学生理论与实践的联系程度, 从而促进跨学科的知识迁移和应用。

机器学习, 尤其是支持向量机(SVM)中的核技巧, 已经成为现代统计学与工程技术领域的核心工具, 广泛应用于数据分类、回归分析与模式识别等领域。核方法通过将低维数据映射到高维空间, 为处理复杂数据问题提供了强有力的工具, 而这一方法背后的理论支持正是高等代数中的相关内容, 如内积、特征空间映射与矩阵运算等。通过案例式教学, 学生可以在实际的工程问题情境中, 应用这些代数知识解决机器学习中的实际问题, 从而深刻理解代数概念的实际意义, 提高跨学科的应用能力。

本文将围绕以下几个方面展开: 首先, 介绍新工科背景下应用统计学专业高等代数课程面临的挑战与需求; 其次, 探讨机器学习中的核方法与高等代数课程的关系, 分析如何将该方法融入高等代数课程教学; 最后, 通过具体案例展示案例式教学的实施过程和教学效果, 评估该教学方法在提升学生学习兴趣、数学能力及实际应用能力方面的成效。通过这一教学探索, 本文旨在为新工科背景下应用统计学专业高等代数课程的教学改革提供理论依据与实践经验, 推动数学理论与工程技术的融合, 为培养具备跨学科综合应用能力的工程人才做出贡献。

2. 机器学习中的核方法的案例分析

在高等代数的教学中, 抽象的数学概念常常使学生感到难以理解和应用。然而, 通过将代数理论与现代应用相结合, 尤其是与机器学习中的实际问题对接, 可以有效地激发学生的学习兴趣, 加深对代数理论的理解。核方法作为机器学习中的一种重要技术, 其背后的数学原理涉及高等代数中的多个基本概念, 如内积、特征值、特征向量和矩阵运算等。因此, 将核方法引入高等代数教学, 不仅有助于帮助学生理解这些抽象的代数概念, 还能够使学生看到数学在现代工程技术中的实际应用, 从而促进理论与实践的有机结合。

2.1. 核方法概述

在机器学习中, 核方法是一种通过将数据从原始空间映射到高维特征空间, 将非线性可分问题转化为线性可分问题的技术。最常见的应用之一是支持向量机(SVM), 通过引入核函数, 将原始数据点映射到一个高维空间, 使数据点变得线性可分, 从而能够通过超平面进行分类。核方法的关键技巧在于利用核函数计算数据点在高维特征空间中的内积, 摆脱显式高维映射的限制。常见的核函数包括多项式核、径向基函数核(RBF核)和 Sigmoid 核等。在数学上, 核函数 $K(x, y)$ 计算的是原始空间中数据点 x 和 y 映射到高维特征空间后的数据点之间的内积:

$$K(x, y) = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle,$$

其中, $\phi(x)$ 是将数据点 x 映射到高维特征空间的映射函数, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积运算。

2.2. 高等代数在核方法中的应用

核方法的关键数学原理依托于高等代数理论。以下是几个核心的代数概念, 它们在核方法中的应用极其广泛。

2.2.1. 内积

在高维空间中, 数据点之间的内积可以通过核函数加以计算。高等代数中的内积定理、欧几里得空间的正交性等相关概念对理解核函数至关重要。

2.2.2. 特征空间与特征值

核方法通过将原始数据映射到高维特征空间, 从而使得数据的线性关系可以通过特征值和特征向量

加以呈现。理解特征值分解、特征空间的构造对深入理解核方法的数学背景至关重要。

2.2.3. 矩阵运算

在 SVM 中, 样本之间的内积关系可以通过核矩阵加以呈现。矩阵的秩、特征值等性质在分析和优化 SVM 模型时起到了关键作用。

2.3. 案例: SVM 中的核方法

为了帮助学生更好地理解核方法在机器学习中的应用, 可以通过 SVM 这一具体案例, 将高等代数的相关概念与机器学习的实际问题相结合。

2.3.1. 案例情境

假设我们有一个二维空间中的数据集, 目标是将这些数据点分为两个类别。使用传统的线性分类器(如感知机)时, 可能无法找到一个能够线性分开这两类数据的超平面。使用核方法, 我们可以将原始数据点从二维空间映射到更高维的特征空间, 从而使得数据变得线性可分。

具体来说, 假设数据点 x_1, x_1, \dots, x_n 位于二维空间中, 目标是通过一个超平面将其分为两类。

2.3.2. 核函数的选择

为了将原始数据点映射到高维特征空间, 可以选择适当的核函数, 如径向基函数(RBF)核:

$$K(x, y) = \exp\left(-\frac{\|x - y\|^2}{2\sigma^2}\right).$$

该核函数能够将低维空间中的数据点 x_1, x_1, \dots, x_n 映射到高维特征空间, 从而使得数据点之间的非线性关系在高维空间中变得线性。

2.3.3. 构造核矩阵

核方法的关键步骤之一是构造核矩阵。核矩阵的每个元素表示数据点之间的内积关系。对于包含 n 个数据点 x_1, x_1, \dots, x_n 的数据集, 核矩阵 K 是一个 $n \times n$ 的对称矩阵, 其中 $K_{ij} = K(x_i, x_j)$ 表示数据点 x_i 和 x_j 之间的核函数值。

2.3.4. SVM 的优化问题

使用核方法后, SVM 的目标是通过求解下列优化问题寻找最优的分割超平面:

$$\min_{w, b} = \frac{1}{2} \|w\|^2,$$

其中, w 是超平面的法向量, b 是偏置项, 约束条件被设置为:

$$y_i (\langle w, \phi(x_i) \rangle + b) \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

通过核技巧, 内积 $\langle w, \phi(x_i) \rangle$ 被替换为核函数 $K(x_i, x_j)$, 从而避免了高维空间的映射的计算。

2.4. 将核方法与高等代数教学结合

在高等代数课程中, 可以通过以下几个步骤将核方法的案例引入课堂, 帮助学生掌握代数理论与实际应用的结合。

2.4.1. 从内积出发

首先, 复习高等代数中的内积、欧几里得空间和正交性等概念, 帮助学生理解核函数如何通过内积计算数据点之间的关系。

2.4.2. 映射到高维空间

讲解如何通过特征空间映射将非线性问题转化为线性问题, 阐述特征值与特征向量在这一过程中的关键作用。

2.4.3. 核函数与矩阵运算

引导学生理解核函数的计算与核矩阵的构造, 帮助学生理解核矩阵在 SVM 优化中的作用。

2.4.4. 具体案例分析

通过具体的机器学习问题, 带领学生一步步分析如何应用核方法来解决实际问题, 展示代数知识在数据分析中的应用。

3. 案例教学下机器学习中的核方法的教学设计

通过案例式教学, 不仅能帮助学生理解抽象的代数概念, 还能让学生意识到这些理论如何在现代工程技术中发挥实际作用。以下是机器学习中的核方法的教学设计, 通过具体实例帮助学生理解高等代数在 SVM 中的应用。

3.1. 教学目标

3.1.1. 知识目标

- 1) 理解核方法的基本概念及其在机器学习中的应用。
- 2) 掌握 SVM 中核方法的数学原理, 特别是核函数、特征空间映射、核矩阵的计算等内容。
- 3) 学习内积、特征值和特征向量、矩阵运算等高等代数的基本概念, 理解它们在机器学习中的应用。

3.1.2. 能力目标

- 1) 培养学生的抽象思维能力, 能够将数学理论应用到实际问题中。
- 2) 提高学生的问题解决能力和创新思维, 尤其是在处理复杂数据分析任务时, 能够利用高等代数工具解决实际问题。

3.1.3. 情感目标

- 1) 激发学生对数学及其应用的兴趣, 增强他们对高等代数和机器学习的学习动力。
- 2) 通过案例教学法, 增强学生的参与感和自主学习能力。

3.2. 教学内容

3.2.1. 核方法概述

- 1) 介绍核方法的基本概念及其在机器学习中的应用。
- 2) 核函数的定义及常见核函数(如线性核、多项式核、RBF 核等)。
- 3) 核技巧的作用: 将数据从低维空间映射到高维特征空间, 解决非线性问题。

3.2.2. SVM 中的核方法

- 1) SVM 的基本概念。
- 2) 核函数在 SVM 中的应用, 如何通过核函数计算样本之间的内积。
- 3) 核矩阵的构造及其在 SVM 优化中的作用。

3.2.3. 相关的高等代数知识

- 1) 内积与矩阵运算: 内积在高维空间中的计算及核函数的关系。

- 2) 特征值与特征向量: 在 SVM 中, 如何利用特征值分解来优化模型。
- 3) 核矩阵与 Gram 矩阵: 如何构造核矩阵, 以及它在 SVM 优化过程中的作用。

3.3. 教学方法

3.3.1. 案例教学法

案例教学法是本课程设计的核心教学方法。通过引入机器学习中的核方法案例, 结合具体问题, 引导学生在解决实际问题的过程中掌握数学理论。

3.3.2. 案例导入

1) 引入一个简单的二维数据分类问题, 展示数据无法通过线性超平面分割。然后, 提问学生如何处理这个非线性分类问题。

- 2) 引导学生思考: 如果将数据映射到高维空间, 是否能够找到一个线性超平面来分割数据?

3.3.3. 知识讲解与案例分析

1) 通过具体案例(如 SVM 中的核方法), 展示如何将数据通过核函数映射到高维空间。讲解核函数的数学背景, 介绍不同核函数的特点及应用。

2) 分析一个实际的 SVM 分类问题, 演示如何利用核方法解决非线性可分问题。在课堂上, 可以使用实际的图形和数据集, 帮助学生直观理解。

3.3.4. 小组讨论与互动

1) 将学生分为若干小组, 每组讨论如何通过不同的核函数(如 RBF 核、线性核等)来解决问题, 并展示他们的思路 and 结论。

- 2) 在每个小组的讨论后, 邀请代表分享他们的分析和理解, 教师根据学生的反馈进行总结和讲解。

3.3.5. 数学推导与应用

1) 对比线性方法和核方法, 详细推导如何通过核技巧将问题映射到高维空间。通过具体的数学推导帮助学生理解为何需要核函数以及核函数如何工作。

- 2) 结合高等代数知识, 讲解如何构造核矩阵, 并演示如何在 SVM 中使用核矩阵进行优化。

3.3.6. 实践环节

1) 在课堂上进行一个简单的 SVM 应用示范。教师提供一个简单的数据集, 让学生利用核方法进行分类任务。

2) 鼓励学生使用 Python 中的 scikit-learn 库, 通过编程实现 SVM 分类, 并对比使用不同核函数的效果。

3.4. 教学步骤

Step 1: 引入案例和问题(10 分钟)

目标: 激发学生的兴趣, 引发思考。

内容: 引入二维数据集, 展示数据无法通过线性超平面分割。

提问: 如何通过数学方法将非线性问题转化为线性可分?

Step 2: 核方法与 SVM 的数学原理(20 分钟)

目标: 讲解核方法的数学背景, 理解其在 SVM 中的应用。

内容: 介绍核函数及其种类(线性核、多项式核、RBF 核)。

讲解如何使用核函数进行高维空间映射, 解决非线性分类问题。

推导 SVM 中的优化问题, 并引入核函数的作用。

Step 3: 小组讨论与案例分析(15 分钟)

目标: 通过小组讨论加深学生对核方法的理解。

内容: 学生分组讨论如何使用不同核函数解决问题。

每组展示他们的思路, 并讨论核方法的优势与局限性。

教师引导讨论并总结, 帮助学生深化对核方法的理解。

Step 4: 核矩阵与优化过程(15 分钟)

目标: 理解核矩阵的构造及其在 SVM 优化中的作用。

内容: 讲解核矩阵的定义及计算方法。

演示如何通过核矩阵解决优化问题, 并引导学生理解其在 SVM 中的重要性。

Step 5: 实践环节(20 分钟)

目标: 帮助学生通过实践掌握核方法在 SVM 中的应用。

内容: 提供数据集并使用 SVM 模型进行分类。

学生使用 Python 编程实现 SVM 分类, 并比较不同核函数的效果。

Step 6: 总结与反思(10 分钟)

目标: 总结本节课内容, 引导学生反思学习收获。

内容: 总结核方法的应用及其数学原理。

提问学生对核方法的理解, 解答他们在实践过程中遇到的问题。

3.5. 教学评估

过程评估:

通过课堂互动、小组讨论和实践环节评估学生对核方法和 SVM 模型的理解程度。

教师根据学生在小组讨论中的表现, 以及编程实践的完成情况进行实时评估。

结果评估:

通过课堂小测验或作业评估学生对核方法的掌握情况。

作业可以包括数学推导、核函数选择以及 SVM 应用问题。

3.6. 教学资源

教材: 高等代数教材、机器学习教材

软件工具: Python

数据集: 简单的二维分类数据集

4. 结语

本文通过将机器学习中的核方法引入高等代数教学, 探索了案例教学法在应用统计学专业高等代数课程中的创新性应用。通过支持向量机(SVM)这一具体案例, 学生不仅能够掌握核方法的数学原理, 还能够深入理解高等代数在解决非线性分类问题中的实际作用。研究发现, 案例教学法有效地将抽象的数学理论与实际应用结合, 帮助学生在解决具体机器学习问题时, 提升了数学建模和问题解决的能力。然而, 尽管案例教学法在一定程度上增强了学生对高等代数的学习兴趣和应用能力, 但该方法的有效性仍依赖于学生的基础知识水平以及实际教学环境的支持。在教学过程中, 学生的学习效果可能受到个人背景、学习方式以及教学资源的限制。未来的研究可以通过更为系统的实证分析, 进一步验证案例教学法在不

同背景下的普适性与效果。此外,未来的研究还可以探索将更多现代技术工具(如人工智能、大数据分析等)与高等代数教学结合的可能性。这不仅能够深化学生对代数概念的理解,还能为学生提供更多跨学科应用的机会,进一步提升其综合素质和创新能力。总的来说,本研究为新工科背景下高等代数教学改革提供了有益的启示。尽管存在一些局限性,案例教学法在理论与实践的结合上,尤其是在提升学生数学能力与跨学科应用能力方面,仍具有显著的教学价值。

参考文献

- [1] 赵静, 高有, 金永, 王蕊. 新工科背景下线性代数课程教学改革与实践[J]. 高等数学研究, 2024, 27(1): 91-94.
- [2] 杨倩, 宇振盛. 新工科背景下“线性代数”课程的案例式创新与探究——以逆矩阵的课堂为例[J]. 理论数学, 2024, 14(10): 191-197.
- [3] 孙海义, 李宁, 贾艳婷. 新工科背景下《线性代数》课程体系改革的研究与实践[J]. 教育进展, 2024, 14(7): 510-516.
- [4] 赵春燕, 孙侠. 新工科背景下的线性代数教学改革探索[J]. 教育进展, 2023, 13(8): 5730-5735.
- [5] 俞恒, 颜颖颖. 基于学科交叉视角的线性代数与 Python 编程案例思考[J]. 应用数学进展, 2025, 14(6): 302-307.
- [6] 苏勇. 浅谈高等代数在最优化问题的应用[J]. 教育进展, 2022, 12(11): 4819-4823.
- [7] 孙卓, 逯洋, 杨雪晴. 浅谈 Matlab 在理科教学上的应用[J]. 计算机科学与应用, 2018, 8(10): 1594-1601.
- [8] 张萍. 基于应用案例的线性代数教学探索与实践[J]. 理论数学, 2024, 14(11): 259-267.
- [9] 鞠桂玲, 宋爱斌. 基于应用的线性代数课程教学改革[J]. 创新教育研究, 2020, 8(5): 688-691.