Advances in Education 教育进展, 2025, 15(9), 1-5
Published Online September 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2025.1591631

Hans汉斯

二次型在单位球面上的极值问题：解法分析与分层教学实践

刘青青

华南理工大学数学学院，广东 广州

收稿日期：2025年7月22日；录用日期：2025年8月22日；发布日期：2025年8月29日

摘 要

本文聚焦二次型在单位球面最值与矩阵特征值关系的问题，深入挖掘分析解法(拉格朗日乘数法)、代数解法(正交相似对角化)的教学价值。结合分层教学理念，详细阐述不同解法适配的学情层次，系统分析其对学生思维培养的差异，进一步探索通过一题多解推动分层教学、促进学生差异化发展的具体路径，为微积分课程教学提供兼具理论性与实践性的多元思路及实践参考。

关键词

二次型，特征值，分层教学，分析解法，代数解法

Solving Quadratic Form Extremes on the Unit Sphere: Methods and Stratified Teaching

Qingqing Liu

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: Jul. 22nd, 2025; accepted: Aug. 22nd, 2025; published: Aug. 29th, 2025

Abstract

This paper focuses on the relationship between the extremum of quadratic forms on the unit sphere and the eigenvalues of matrices, and deeply explores the teaching value of the analysis method (Lagrange multiplier method) and algebraic method (orthogonal similarity diagonalization). Combined with the concept of stratified teaching, it elaborates in detail the different levels of student learning situations suitable for different solution methods, systematically analyzes the differences in the

文章引用: 刘青青. 二次型在单位球面上的极值问题: 解法分析与分层教学实践[J]. 教育进展, 2025, 15(9): 1-5.
DOI: 10.12677/ae.2025.1591631

cultivation of students' thinking, and further explores the specific paths to promote stratified teaching and students' differentiated development through multiple solutions to one problem, providing theoretical and practical multi-faceted ideas and practical references for the teaching of calculus course.

Keywords

Quadratic Forms, Eigenvalue, Stratified Teaching, Analysis Method, Algebraic Method

1. 引言

分层教学的理论依据主要来源于教育心理学和教育公平理论。维果茨基的“最近发展区”理论强调了教育应当在学生的现有水平和潜在水平之间架起桥梁，分层教学正是实现这一目标的有效途径。教育公平理论认为，每个学生都应获得与其能力和需求相匹配的教育资源和机会，分层教学通过提供个性化的教学支持，有助于缩小学生之间的学习差距。很多学科都在教学中尝试了分层教学，例如对外汉语教学[1]、食品实验[2]。在多元微分学的学习过程中，我们以二元函数和三元函数为例进行了知识的讲解。对于 n 元函数微分学的理论，线性代数中的向量和矩阵是描述多元变量及其关系的重要工具。因此，进一步学习 n 元函数的微分学需要学生具备较强的线性代数知识背景，如何区分学生是否具备较强的线性代数的知识储备，对学生进行分层教学显得尤为重要。因此在学习不同内容时，教师应根据所学内容需要的知识背景设计不同的分层测试题目以此达到不同层次同学知识融合的目的。

在多元微分学的教学过程中，拉格朗日数乘法一直是教学的重点[3] [4]，但是学生总是习惯运用均值定理来求解约束极值问题，因此寻找一个具有挑战性的问题，培养学生的高阶思维能力和创新能力是非常有必要的。“二次型在单位球面最值与矩阵特征值关系”的问题就是一个高阶性的问题。一方面它很难用均值定理求解。另一方面，由于正交变换可以将二次型化为标准型[5]，基于正交变换保持距离不变与标准型易于分析极值的特点，我们可以利用正交相似对角化的方法去求解。无论从分析角度还是代数角度，这个问题都可以串联起矩阵特征值这个线性代数的核心概念，既能很好地测试学生的线性代数知识储备，又能展现不同数学分支方法的内在联系。这种多视角的解题思路恰好适配学生差异化的知识背景和思维特点，为实施分层教学提供了很好的教学素材。因此，深入研究该问题的解法及其教学实践，对提升微积分课程的教学质量具有重要意义。

2. 问题与解法回顾

说明二次型 $f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy$ 在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大值和最小值恰好是矩阵 $M=\begin{bmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{bmatrix}$ 的最大特征值和最小特征值[6]。

2.1. 分析解法：拉格朗日数乘法

第一步，构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$$

第二步，求拉格朗日函数的临界点。令

$$\begin{cases} L_x(x,y,z)=2\left[(A-\lambda)x+Fy+Ez\right]=0, & (1)\\ L_y(x,y,z)=2\left[Fx+(B-\lambda)y+Dz\right]=0, & (2)\\ L_z(x,y,z)=2\left[Ex+Dy+(C-\lambda)z\right]=0, & (3)\\ x^2+y^2+z^2=1. & (4)\end{cases}$$

则方程$(1)\cdot x+(2)\cdot y+(3)\cdot z$相加，再结合方程(4)，得到$f(x,y,z)=\lambda$。

第三步：由方程$(1),(2),(3)$知道方程组

$$\begin{cases}(A-\lambda)x+Fy+Ez=0,\\ Fx+(B-\lambda)y+Dz=0,\\ Ex+Dy+(C-\lambda)z=0.\end{cases}$$

有非零解，则

$$\begin{vmatrix}A-\lambda & F & E\\ F & B-\lambda & D\\ E & D & C-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

即λ的取值只能是矩阵M的特征值，即$\begin{bmatrix}A & F & E\\ F & B & D\\ E & D & C\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$。

第四步：f在有界闭集$\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1\right\}$上连续，从而$f$的最大值、最小值存在，所以$f$的最大值和最小值恰好是矩阵$M$的最大特征值和最小特征值。

2.2. 代数解法：正交相似对角化

首先，二次型可以用如下矩阵的乘积表示出来：

$$f(x,y,z)=(x\ y\ z)\begin{bmatrix}A & F & E\\ F & B & D\\ E & D & C\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\triangleq X^{\mathrm{T}}MX,$$

这里矩阵M为是对称矩阵，根据实对称矩阵正交相似对角化理论，则存在正交矩阵Q使得

$$Q^{\mathrm{T}}MQ=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),$$

这里的$\lambda_i\,(i=1,2,3)$为特征值，不妨设λ_1为最小值，λ_3为最大值。Q^{T}表示矩阵Q的转置。

其次，令$Y=(u,v,w)^{\mathrm{T}}$且作正交变换$X=QY$，则二次型化为

$$f(x,y,z)=\lambda_1u^2+\lambda_2v^2+\lambda_3w^2,$$

由于正交变换是保距变换，故单位球面变换后形式为$Y^{\mathrm{T}}Y=u^2+v^2+w^2=1$。因此，

$$\lambda_1=\lambda_1\left(u^2+v^2+w^2\right)\le f(x,y,z)=\lambda_1u^2+\lambda_2v^2+\lambda_3w^2\le\lambda_3\left(u^2+v^2+w^2\right)=\lambda_3.$$

即特征值大小直接控制了二次型取值范围。通过观察可以发现二次型在$Y^{\mathrm{T}}=(1,0,0)$处取最小值，在$Y^{\mathrm{T}}=(0,0,1)$处取最大值。

3. 分层教学实践：解法融合与思维培养

3.1. 学情分层

我们在期中考试中引入这一问题，根据学生的答题情况，将学生整体分为两个层次。基础层和进阶层。基础层的学生对“矩阵——二次型”之间的关联认知较为浅显，对抽象的代数知识接受难度较大。分析解法更贴合他们的学习现状，易于理解。拉格朗日乘数法作为多元函数极值求解的工具，是学生之前已经学习过的内容，运用起来更为熟练。完整的问题解答需要通过“约束条件 → 构造拉格朗日函数 → 拉格朗日函数梯度为零的偏导方程 → 特征值关联”的解题路径。进阶层次的学生已经掌握了二次型标准化、矩阵正交相似对角化理论等线性代数的核心知识，具备一定的抽象思维能力。他们通过“二次型标准化 → 特征值控制取值”的过程，能够强化“代数结构(矩阵) → 几何形态(二次型最值)”的映射关系，体现了这一层次同学思维的结构化和抽象化，具备了运用代数工具解决复杂问题的能力。值得注意的是这种分层不是一成不变的，因此在学习不同内容时，教师应设计不同的典型题目用于划分学生的层次，调整教学策略，以确保每位学生均能获得适合自己的教学引导。

3.2. 教学实施路径

基础层教学：

引入环节：从“单位球面是有界闭集，二次型连续必有最值”这一学生易于理解的结论引入，让学生先明确问题的前提。

难点突破：在教学过程中，学生可能对“齐次线性方程组有非零解则系数行列式为零”这一知识点遗忘或理解不深，可结合简单的二元齐次线性方程组例子进行回顾讲解，帮助学生克服这一难点。

进阶层教学：

复习铺垫：复习实对称矩阵正交相似对角化定理，重点强调“正交变换保范数”这一关键性质，通过具体的正交矩阵和向量变换例子，让学生深刻理解其含义，为后续推导奠定基础。

推导引导：引导学生自主推导在正交变换下二次型与约束条件的变换过程，鼓励学生在推导中发现问题、解决问题，加深对变换过程的理解。

3.3. 解法融合的进阶设计

分层教学并非割裂两种解法，而是通过“基础层渗透代数思想，进阶层回溯分析视角”实现认知进阶。

基础层向进阶层的过渡

在掌握拉格朗日乘数法后，引入学生思考“当二次型只含平方项，即 M 是对角阵时，问题的解答是否更简单？”进而思考“能否通过适当的坐标变换将二次型化为主轴形式？”为代数解法埋下伏笔。

进阶层的跨视角整合

完成代数解法后，回溯分析解法中的特征方程 $MX = \lambda X$，解释“拉格朗日乘数 λ 本质是特征值”的代数意义，对比“分析解法通过极值条件得到特征方程”与“代数解法通过正交变换直接利用特征值”的逻辑差异，体会“殊途同归”的数学美感。

4. 教学效果评估与反思

4.1. 评估维度设计

1) 知识掌握

基础层：能否用拉格朗日乘数法解决具体问题，能否解释极值与特征值的关联。进阶层：能否用代

数解法推导一般结论，能否将解法推广到 n 维情形。

2) 思维发展

基础层：能否描述“约束条件 → 拉格朗日函数 → 特征方程”的逻辑链(体现关联思维)。进阶层：能否对比两种解法的本质差异，能否构建“代数结构——几何意义”的映射(体现抽象思维)。

3) 应用迁移

基础层：能否用所学方法解决类似约束极值问题(如二次型在椭球面上的最值)。进阶层：能否将特征值思想应用于优化问题(如线性规划中的二次目标函数优化)。

4.2. 教学实践的反思

期待成效：

通过教学实践，我们期待基础层学生能熟练掌握分析解法，建立“极值与特征值”的关联；进阶层学生能独立完成从三维到 n 维的推导。两种解法的分层教学可以有效解决“基础生跟不上，优等生吃不饱”的问题。

不足之处：

基础层学生对“特征值为何能决定最值”的深层理解仍显不足，易停留在“运算步骤”层面。进阶层学生在两种解法的融合应用上存在差异，部分学生难以清晰表述逻辑关联。

改进方向：

为基础层增加“特征值几何意义”的可视化教学，如用特征向量方向的向量拉伸解释特征值的大小影响。为进阶层设计“解法对比表格”，从“适用范围、逻辑基础、思维特点”等维度系统梳理两种解法的差异与联系。

5. 结语

二次型在单位球面的最值问题，看似是一个具体的数学问题，实则是串联分析与代数、连接具象与抽象的重要载体。分析解法以其“运算直观、依托旧知”的特点，为基础层学生搭建了理解的阶梯；代数解法以其“结构严谨、抽象深刻”的特点，为进阶层学生提供了探究的空间。

分层教学的核心并非“教不同的内容”，而是“用适配的路径达成共同的核心目标”——即理解数学本质、培养思维能力。通过两种解法的分层设计与融合进阶，不仅能让学生掌握具体的解题方法，更能体会“分析与代数相互印证”的数学思想，理解“从具体运算到抽象结构”的认知进阶规律。

未来教学中，可进一步结合信息化工具(如数学软件、虚拟仿真)，增强解法的可视化与互动性；同时设计更多跨模块的综合问题，让分层教学从“一题多解”延伸到“多题归一”，真正实现“因材施教”与“思维进阶”的协同，为微积分课程的高质量教学提供持续探索的方向。

参考文献

[1] 董晓沂. 分层教学在对外汉语初级口语课中的应用研究[D]: [硕士学位论文]. 长春: 湖南大学, 2019.

[2] 倪明, 张润锋, 李京京, 刘焕, 李煜, 食品化学实验“分层 + 个性化”教学模式的改革与实践——以湖北师范大学为例[J]. 湖北师范大学学报(自然科学版), 2025, 45(2): 104-107.

[3] Stewart, J. (2014) Calculus: Early Transcendentals. 8th Edition, Cengage Learning.

[4] 华东师范大学数学系编. 数学分析(上册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 1980: 200-300.

[5] 杨威, 高淑萍. 用正交变换法化二次型为标准形的简洁计算方法[J]. 数学学习与研究, 2019(23): 3-4.

[6] 刘国祥. 条件极值的两个应用[J]. 赤峰学院学报, 2016(22): 2.