Advances in Education 教育进展, 2025, 15(10), 668-673
Published Online October 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2025.15101884

高等数学中高斯公式的教学革新：从抽象到应用的桥梁重构

于 幻

北京信息科技大学理学院，北京

收稿日期：2025年9月7日；录用日期：2025年10月8日；发布日期：2025年10月15日

摘 要

高斯公式作为《高等数学》中联系曲面积分与三重积分的一个重要工具，具有较强的物理内涵(如散度理论)和一定的应用价值(如电磁学、流体力学)。然而，传统教学往往存在一些局限：多侧重于将其作为曲面积分计算技巧，对其物理本质阐释不足；习题设置常局限于标准曲面验证，与偏微分方程等学科的衔接仍有待加强(例如散度与Laplace算子的关联)。针对高等数学中高斯公式“重计算、轻应用”的现象，本文基于建构主义理念，提出“物理驱动－几何直观－梯度训练－技术赋能”四维教学模式。该模式通过引入物理背景、增强几何直观、设计阶梯式例题链，并结合GeoGebra/Python等技术手段，旨在帮助提升学生的空间建模能力与跨学科应用能力。

关键词

高等数学，高斯公式，偏微分方程

Teaching Innovation of Gauss’s Formula in Advanced Mathematics: Bridging the Gap from Abstraction to Application

Huan Yu

College of Applied Science, Beijing Information Science & Technology University (BISTU), Beijing

Received: September 7, 2025; accepted: October 8, 2025; published: October 15, 2025

Abstract

As a fundamental bridge connecting surface integrals with triple integrals in Advanced Mathematics, Gauss’s theorem possesses profound physical implications (e.g., divergence theory) and broad

文章引用: 于幻. 高等数学中高斯公式的教学革新: 从抽象到应用的桥梁重构[J]. 教育进展, 2025, 15(10): 668-673.
DOI: 10.12677/ae.2025.15101884

application value (e.g., in electromagnetism and fluid mechanics). However, traditional teaching approaches often reduce it to a computational technique for surface integrals, neglecting its physical essence. Exercise designs are frequently confined to verifications on standard surfaces, lacking interdisciplinary connections with subjects such as partial differential equations (e.g., the relationship between divergence and the Laplace operator). To address the overemphasis on computation at the expense of application in teaching Gauss's theorem, this paper proposes a four-dimensional instructional model based on constructivist principles: "physics-driven, geometry-visualization, gradient-training, and technology-enhanced". This model incorporates physical contexts, enhances geometric intuition, designs graded exercise sequences, and integrates technological tools such as GeoGebra and Python, aiming to effectively improve students' spatial modeling skills and interdisciplinary application abilities.

Keywords

Advanced Mathematics, Gaussian Formula, Partial Differential Equation

1. 问题聚焦：高斯公式与 PDE 教学的割裂现状

1.1. 高斯公式教学的局限性

当前高斯公式的教学面临以下几方面问题：**概念抽象化**导致散度的物理意义未能充分展现，公式往往被简化为符号操作——多数教材仅给出“向量场穿过闭曲面的通量等于其散度在内部区域的积分”这一数学定义，却缺乏如流体源、电场源等实际案例以阐释其物理本质；**教学扁平化**体现在几何直观较弱，学生难以建立“曲面闭合过程”与“内部区域”的空间对应关系，容易混淆内外侧方向(如球坐标系下法向量方向错误)；**应用脱节化**则表现为题型较为单一，习题长期集中于球体、立方体等标准曲面的计算验证，与点电荷电场、不可压缩流等真实物理情境的联系不够紧密，跨学科的有效衔接仍有待加强。

1.2. PDE 能量法的教学痛点

这种脱节的典型表现是，相当比例的学生无法理解相关概念在更复杂问题中的应用，例如在波动方程能量守恒律推导中出现的边界通量项：

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=\iiint_{\Omega}u_t\left(\rho u_{tt}-T\Delta u\right)\mathrm{d}V+\underbrace{\iint_{\partial\Omega}u_t\left(\nabla u\cdot n\right)\mathrm{d}S}_{\text{边界通量}}。$$

部分研究生一年级学生反馈显示：“学高斯公式多出于应试目的，未意识到后面 PDE 还会用到。”调查表明，约 80%的学生对能量积分中的边界通量项的理解存在困难，物理直觉较为欠缺。这一现象反映出教学中需加逻辑推理与系统思维的训练，以培养学生的科学素养和解决问题的能力。

1.3. 核心矛盾

高斯公式的“教学孤立性”与 PDE 能量法的“理论依赖性”之间存在明显脱节。某校期末试卷分析显示，约 85%的学生未能自主推导热传导方程解的唯一性证明。

1.4. 文献综述

国内外学者在矢量微积分教学、数学物理方法教学及教育技术应用方面已有诸多探索。国外研究如 Bressoud [1]强调物理直观在微积分教学中的重要性，Tong [2]提出通过数值仿真增强学生对场论概念的理解。国内研究如李庆容[3]探讨了基于物理意义的高斯公式教学，周正松[4]从生活实例出发讲解高斯公式与斯托克斯公式。在教育技术方面，GeoGebra、MATLAB 等工具已被广泛应用于数学可视化教学[5] [6]，但在高斯公式教学中的系统整合仍显不足。本文在已有研究基础上，构建融合物理背景、几何直观、梯度训练与技术赋能的四维教学模式，并通过实证研究验证其有效性。

2. 高斯公式的内容与意义

定理[7]：设空间闭区域 $\Omega \subseteq R^3$ 的边界 $\partial\Omega$ 是分片光滑的闭曲面，向量场 $F(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 在 $\partial\Omega$ 上具有**一阶连续偏导数**，则有：

$$\oiint_{\partial\Omega} F\cdot\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot F\mathrm{d}V \text{ 或 } \iiint_{V}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ 。}$$

其中，左侧：$\oiint_{\partial\Omega} F\cdot\mathrm{d}S$ 是向量场 F 穿过闭曲面 $\partial\Omega$ 的通量(规定曲面外侧为正方向)，

右侧：$\iiint_{\Omega}\nabla\cdot F\mathrm{d}V$ 是 F 的散度在闭区域上的三重积分，

散度定义：$\nabla\cdot F=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ (描述向量场的“源强度”)。

注：格林公式建立了二维平面上闭合曲线积分与区域二重积分的联系，而高斯公式将其推广至三维空间，体现了“边界积分 = 内部导数积分”的统一思想。这一思想不仅具有数学美感，也蕴含着“由表及里、见微知著”的哲学思维，有助于培养学生辩证唯物主义的世界观和方法论。

3. 改革路径：四维融合教学模式

3.1. 教学实验设计

为验证所提教学模式的有效性，本研究于 2024 年秋季学期在某高校工科专业高等数学课程中开展教学实验。选取两个平行班作为实验组(采用四维教学模式)和对照组(采用传统教学模式)，进行为期 4 学时的教学干预。实验组采用物理驱动、几何直观、梯度训练与技术赋能相结合的方式进行教学，对照组则按教材顺序讲授并进行常规习题训练。教学前后分别进行前测和后测，测试内容涵盖高斯公式的计算、几何理解、物理意义及在 PDE 中的应用。

3.2. 维度一：物理意义先行——从“源”理解散度

教学重点在于阐释散度的物理本质。通过静电场高斯定律引入：闭合曲面的电通量等于该曲面所包围的总电荷量除以真空介电常数，进而说明电场散度与电荷密度的正比关系。借助流体流动的虚拟仿真，展示“源”($\nabla\cdot F>0$)与“汇”($\nabla\cdot F<0$)处的速度场散度分布，帮助学生理解“源强度”的度量。通过物理背景的引入，引导学生体会数学与自然规律之间的统一关系，增强其科学素养与探索意识。引导学生体会数学与自然规律的统一性，增强其科学素养和探索精神。

3.3. 维度二：几何直观赋能——动态可视化技术

利用 GeoGebra 3D 等工具进行动态几何构建与演示：绘制特定闭曲面(如椭球面)及其内部向量场，动态呈现曲面微元与场向量的点积(通量元素)；同步渲染内部区域散度的分布热力图。通过动画展示闭曲

面的动态分割过程，清晰呈现“内部散度积分”与“曲面总通量”的守恒关系，帮助学生建立空间对应。在此过程中，强调技术工具的服务性及其在科学研究中的辅助作用，培养学生利用现代技术解决实际问题的能力，呼应国家“数字中国”战略中对科技人才的培养要求。

以下通过 GeoGebra 设计一个动态演示，直观展示高斯公式中通量与散度积分的关系。

- 首先使用曲面 $\left(2*\cos(u)*\sin(v), 2*\sin(u)*\sin(v), 2*\cos(v), u, 0, 2\pi, v, 0, \pi\right)$ 创建球面，定义向量场 $F(x,y,z)=\{x,y,z\}$；
- 通过滑动条 n 控制分割精度，生成参数化点阵序列；计算每个面元的通量元素(点积与面积之积)并求和得总通量；
- 同步计算散度三重积分 $\int\left(\int\left(\int\left(3, x, -sqrt\left(4-y^2-z^2\right), sqrt\left(4-y^2-z^2\right)\right), y, -sqrt\left(4-z^2\right), sqrt\left(4-z^2\right)\right), z, -2, 2\right)$；最终动态展示随 n 增大，总通量收敛于散度积分(理论值 32π)的过程，直观验证高斯公式。

3.4. 维度三：阶梯式训练链——从基础到综合

设计“三步递进”例题链：

(1) 基础层：聚焦标准曲面(如立方体、球体)验证，直接应用高斯公式；

例：计算 $\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y-z)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中，$\Sigma$ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的柱体 Ω 的整个边界曲面的外侧。

解：令 $P=(y-z)x$，$Q=0$，$R=x-y$，它们处处连续。由高斯公式得，

$$\text{原式}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}(y-z)\mathrm{d}v=-\frac{9}{2}\pi\text{。}$$

(2) 进阶层：处理非封闭曲面(需补面)，重点训练方向修正与公式变形；

例：计算 $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中，$\Sigma$ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于 $z=0$ 与 $z=h\ (h>0)$ 之间的部分的下侧。

解：补充顶面 $\Sigma_1: x^2+y^2\le h^2, z=h$，取上侧，则定向曲面 $\Sigma+\Sigma_1$ 构成所围椎体 Ω 的外侧，令 $P=x^2$，$Q=y^2$，$R=z^2$，则利用高斯公式，

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v\\&=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v\\&=2\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\pi h^4\end{aligned}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}h^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi h^4\text{。}$$

$$\text{故}\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\pi h^4-\pi h^4=-\frac{1}{2}\pi h^4\text{。}$$

(3) 综合层：融入物理建模，如热传导方程能量估计、波动方程能量守恒推导。

例 1. (波动方程)：

考虑弹性膜振动总能量 $E(t)=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\rho u_t^2+T|\nabla u|^2\,\mathrm{d}V$。其中 $u=u(x,t)$ 为位移函数，ρ 为密度，T 为

张力系数。

为证明能量守恒，引导学生计算能量变化率$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}$：$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=\iiint_{\Omega}\rho u_t u_{tt}+T\nabla u\cdot\nabla u_t\mathrm{d}V$。

关键推导步骤：利用高斯公式将积分项$\nabla u\cdot\nabla u_t$改写为$\nabla\cdot(u_t\nabla u)-u_t\Delta u$，从而得到：

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=\iiint_{\Omega}u_t(\rho u_{tt}-T\Delta u)\mathrm{d}V+\underbrace{\iint_{\partial\Omega}u_t(\nabla u\cdot n)\mathrm{d}S}_{\text{边界通量}}。$$

物理意义：方程表明系统总能量的变化由边界通量(外部能量输入/输出)和内部波动方程特性共同决定，当满足齐次边界条件时，边界通量为零，能量守恒得以实现。

例 2. (热传导方程)

考虑均匀金属杆的热能：$E(t)=\iiint_{\Omega}\rho cu\mathrm{d}V$，其中$u$为温度分布，$\rho$为密度，$c$为比热容。为分析能量守恒，引导学生计算能量变化率$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}$：$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=\iiint_{\Omega}\rho cu_t\mathrm{d}V$

关键推导步骤：由热传导方程$\rho cu_t=\nabla\cdot(k\nabla u)$ (傅里叶定律)，代入得：$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot(k\nabla u)\mathrm{d}V$

高斯公式出场：将体积分转化为边界通量积分$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=\underbrace{\iint_{\partial\Omega}k(\nabla u\cdot n)\mathrm{d}S}_{\text{边界热流通量}}$。

物理意义：边界积分项$k(\nabla u\cdot n)$表示通过边界$\partial\Omega$的热流速率(正值为热量输入，负值为输出)；

守恒结论：当边界绝热($\nabla u\cdot n=0$)时，$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=0$，系统总热能守恒。

高斯公式在此处的应用，体现了局部与全局的统一：内部每一点热源的产生/消耗(由$\iiint_{\Omega}\rho cu\mathrm{d}V$描述)，加上通过边界交换的能量(由$\iint_{\partial\Omega}k(\nabla u\cdot n)\mathrm{d}S$描述)，共同决定了系统整体能量的变化。以此为切入点，可引导学生形成系统思维和全局观念。解决问题需兼顾局部与整体，并重视系统各部分的联系及其与外部环境的交互。这种“由内而外、统筹全局”的思维方式，是数学和工程学中的典型思维方式，也有助于应对未来的复杂挑战。

4. 创新点总结

本教学模式主要包含以下特点：物理–数学双主线融合：通过电磁学、流体力学案例阐释散度的物理本质，并利用格林恒等式建立高斯公式与 PDE 的联系。“可视化–推导–仿真”三阶体系：结合 GeoGebra、MATLAB、COMSOL 等工具，为学生从几何直观到数值验证提供支持。PDE 能量法“问题链”设计：通过基础计算、工具变形、理论证明的阶梯式训练，有助于提升学生解决复杂问题的能力。在整个教学过程中，关注培养学生的科学精神、创新意识及社会责任感，引导其认识数学不仅是工具，也是理解世界、服务社会的重要基础。

5. 结论与推广

高斯公式的教学应超越积分计算本身，作为理解场论与 PDE 的重要工具之一。建议在高等数学阶段引入物理背景(如麦克斯韦方程组、流体连续性方程)，在 PDE 教学中突出其在能量估计中的重要作用，并通过数值仿真构建“理论–应用”的完整闭环。该模式可进一步推广至矢量分析、数学物理方程等课程，为跨学科创新能力的培养提供参考。同时，应注意将课程思政融入教学过程中，引导学生树立正确的世界观、人生观和价值观，有助于培养其科学素养、创新意识与社会责任感。

参考文献

[1] Bressoud, D.M. (2011) Historical Reflections on Teaching the Fundamental Theorem of Integral Calculus. *The American Mathematical Monthly*, **118**, 99-115. https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.02.099

[2] Tong, S.T. (2019) Integrating Numerical Simulation into Vector Calculus Teaching. *Journal of Engineering Education*, **108**, 412-428.

[3] 李庆容. 基于物理意义下的高斯公式教学探究[J]. 科教导刊, 2020(2): 106-107.

[4] 周正松. 从生活实例讲高斯公式与斯托克斯公式[J]. 课程教育研究, 2016(9): 140-141.

[5] 王建军, 李丽. 基于 GeoGebra 的高等数学可视化教学研究[J]. 数学教育学报, 2021, 30(2): 89-93.

[6] Smith, J., *et al.* (2020) Using MATLAB to Enhance Calculus Learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **51**, 731-745.

[7] 同济大学数学系, 编. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.