Advances in Education 教育进展, 2025, 15(10), 255-262
Published Online October 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2025.15101828

Hans汉斯

依测度收敛学习中的认知难点与教学突破

齐秋兰[1,2*]，李翠香[1,2]，王丽萍[1,2]

[1]河北师范大学数学科学学院，河北 石家庄
[2]河北省计算数学与应用重点实验室，河北 石家庄

收稿日期：2025年8月26日；录用日期：2025年9月23日；发布日期：2025年9月30日

摘 要

依测度收敛是实变函数中极具深度的概念，是学生从数学分析进入现代分析(如概率论、泛函分析)时遇到的一个关键点。然而，该概念因其高度的抽象性、反直观性以及与逐点收敛的复杂关系，成为学生学习过程中面临的主要认知障碍。本文应用杜宾斯基APOS理论，分析了学生学习依测度收敛概念时所遇到的认知困难的根源，提出教学突破策略，帮助学生构建清晰的知识网络，克服学习难点，提升数学抽象思维与辨析能力。

关键词

依测度收敛，逐点收敛，杜宾斯基APOS理论，认知难点，教学策略

Difficulties in Cognition and Teaching Breakthroughs in Learning Convergence in Measure

Qiulan Qi[1,2*], Cuixiang Li[1,2], Liping Wang[1,2]

[1]School of Mathematical Sciences, Hebei Normal University, Shijiazhuang Hebei
[2]Hebei Key Laboratory of Computational Mathematics and Applications, Shijiazhuang Hebei

Received: August 26, 2025; accepted: September 23, 2025; published: September 30, 2025

Abstract

Convergence in measure is a highly profound concept in real variable functions, and it is a key point

*通讯作者。

文章引用：齐秋兰，李翠香，王丽萍．依测度收敛学习中的认知难点与教学突破[J]．教育进展, 2025, 15(10): 255-262.
DOI: 10.12677/ae.2025.15101828

that students encounter when transitioning from mathematical analysis to modern analysis, such as probability theory and functional analysis. However, due to its high degree of abstraction, anti-intuitiveness, and complex relationship with point by point convergence, this concept has become the main cognitive barrier faced by students in the learning process. In the article, applying the Doubinsky's APOS theory, we analyze the root of cognitive difficulties encountered by students in learning the convergence in measure. Some teaching breakthrough strategies are proposed to help students establish clear knowledge networks, overcome learning difficulties, and enhance mathematical abstract thinking and analytical abilities.

Keywords

Convergence in Measure, Convergence Point by Point, Doubinsky's APOS Theory, Cognitive Difficulties, Teaching Strategy

1. 引言

实分析以勒贝格测度与积分理论为核心，将微积分的严格性推向了新的高度。在实分析的诸多课题中，函数列的收敛性贯穿了始终，除了数学分析中已熟悉的逐点收敛和一致收敛外，基于测度论的新视角引入了依测度收敛，成为处理可测函数列极限的有力工具[1]-[3]。

尽管依测度收敛在理论上有其天然的优势(对函数的要求更宽松，且具有更好的极限唯一性和完备性)，但其定义方式却与学生的直观感受相差甚远[4]。学生习惯于函数值的逐点逼近，而非从“例外集”测度趋于零的角度来理解收敛。这种反直观特性构成了首要的认知冲突。

传统的教学模式往往侧重于定义的直接引入、定理的证明以及反例的展示，而忽视了学生的认知建构过程，容易导致学生陷入“知其然而不知其所以然”的困境。为了提高学生的学习兴趣，提升教学效果，许多学者进行了教学方法上的探索。例如，通过介绍概念的历史背景，使学生理解引入这些概念的必要性[3]；运用类比建构的方法，使学生掌握 Lebesgue 测度理论[4]-[6]；借助形象思维的例子，将抽象的数学问题形象化[4] [7] [8]。

本文将应用杜宾斯基的 APOS 活动(Action、Process、Object、Schema)理论[9]，进一步分析学生学习依测度收敛概念时所遇到的认知困难的根源，并提出行之有效的教学路径，旨在培养学生深层次数学思维能力。

2. 依测度收敛的数学内涵与认知定位

2.1. 依测度收敛的定义与特性[1] [2]

设 $\{f_n(x)\}$ 是一列 *a.e.* 有限的可测函数，若存在 *a.e.* 有限的可测函数 $f(x)$，使得对任意 $\sigma>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} mE\left[|f_n-f|\geq\sigma\right]=0$，则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$，记作：$f_n(x)\overset{m}{\Rightarrow}f(x)$。

与逐点收敛相比，依测度收敛不关心函数在每一点的表现，而是关注函数值差异较大的点所构成的集合的测度是否随着 n 增大而趋于零。这意味着，即使对于每一个固定的 x，函数列 $\{f_n(x)\}$ 都不收敛，整个函数列仍有可能依测度收敛。

2.2. 在收敛模式网络中的定位

在实分析中，多种收敛模式构成了一个复杂的网络，理清依测度收敛在此网络中的位置至关重要。依测度收敛与其它收敛模式的关系可通过以下定理体现[1] [2]：

(1) 勒贝格定理：设 $mE<\infty$，$\{f_n\}$ 是 E 上的一列 a.e.收敛于一个 a.e.有限的函数 f 的可测函数列，则 $f_n \overset{m}{\Rightarrow} f$ 于 E。

(2) Riesz 定理：设在 E 上 $\{f_n\}$ 依测度收敛于 f，则存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 E 上 a.e.收敛于 f。

(3) 函数列的一致收敛性质可以推出它是 L_p 收敛的，进一步，可以推出它也是依测度收敛的(在有限测度空间下)。

这些关系表明，依测度收敛是比逐点收敛和一致收敛更“弱”的一种收敛形式，但它在测度论框架下具有更好的理论性质。学生必须将其置于这个收敛模式的“生态系统”中理解，而非孤立地学习。

3. 基于杜宾斯基的 APOS 理论分析依测度收敛学习的认知难点根源[9]

APOS 理论认为，个体对数学概念的建构经历四个阶段：活动(Action)、过程(Process)、对象(Object)和图式(Schema)，学生对“依测度收敛”的学习困难正体现在这四个阶段的跃迁上。

3.1. 活动(Action)阶段：缺乏直观的物理操作基础

- 困难点：大多数数学概念最初都源于具体的、可操作的活动(如数数、测量)。然而，“依测度收敛”的“活动”基础极其抽象。学生无法通过具体的、物理的操作来感知“一个点集的测度趋于零”这一过程。测度本身就是一个高度抽象的对象(尤其是对于勒贝格测度)，而“依测度收敛”的操作是发生在函数列和测度空间上的内部心理操作。
- 表现：学生只能机械地记忆定义：“对于任意 σ，那个集合的测度趋于 0”。他们无法在脑海中动态地“运行”这个过程，无法想象随着 n 增大，那些满足“$|f_n(x)-f(x)|\ge\sigma$”的点集 $E_{n,\sigma}$ 是如何变化的。这与学习导数时想象“割线变切线”的直观动态过程形成鲜明对比。

3.2. 过程(Process)阶段：无法将静态定义转化为动态心理过程

- 困难点：即使学生记住了定义，将其内化为一个可重复执行的、连贯的心理过程仍然非常困难。这个过程需要：
- 第一步：固定一个误差标准 σ (想象一个容忍带)；
- 第二步：对于序列中的每一个函数 f_n，在定义域中找出所有“超出容忍带”的点，构成一个集合 $E_{n,\sigma}$；
- 第三步：测量这个“坏集合” $E_{n,\sigma}$ 的大小，即求 $m\,E_{n,\sigma}$；
- 第四步：观察这个测度值序列 $\{m\,E_{n,\sigma}\}$ 是否随着 $n\to\infty$ 而趋于 0；
- 第五步：意识到这个过程必须对每一个(任意小的) $\sigma>0$ 都成立。
- 表现：学生常常无法完整地在心理上执行这五步。他们可能会混淆变量，例如不理解为何要先固定 σ；他们可能难以将“点集 $E_{n,\sigma}$”和“测度值 $m\,E_{n,\sigma}$”区分开；最关键的是，他们无法将这个过程视为一个整体的、协调的动态序列。

3.3. 对象(Object)阶段：难以将过程“封装”为一个可操作的实体

- 困难点：这是最核心的认知飞跃，学生需要将上述复杂的“过程”压缩成一个名为“依测度收敛”的静态数学对象。只有完成这种“封装”(Encapsulation)，才能对其进行更高层次的运算和推理。

- 表现：

无法谈论收敛本身：当学生无法将其对象化时，他们无法理解“收敛”是一种性质，一个函数序列可以“具有”这种性质。他们看到的只是一堆令人困惑的符号和逻辑链条。

无法进行逻辑操作：在证明与其它收敛模式的关系(如“几乎处处收敛能否推出依测度收敛？”)或进行反例构造时(如构造一个依测度收敛但不处处收敛的例子)，需要将“依测度收敛”作为一个整体对象来思考和使用。学生在此类任务上感到极度困难，正是因为他们仍在“过程”阶段挣扎，未能形成“对象”。

符号理解障碍：定义中的符号 $\lim_{n\to\infty} mE\left[\left|f_n - f\right| \geq \sigma\right] = 0$ 对学生来说只是一个需要满足的条件，而不是一个名为“收敛”的对象的名称。

3.4. 图式(Schema)阶段：难以将其整合到已有的函数收敛知识网络中

- 困难点：学生已有的关于函数收敛的图式是建立在逐点收敛和一致收敛之上的，这两个概念都强烈依赖于函数值的点态行为。而“依测度收敛”的图式是基于集合测度的，这与原有图式存在根本性冲突。
- 表现：

概念混淆：学生最典型的错误就是混淆“依测度收敛”和“逐点收敛”。他们无法理解为什么一个序列可以依测度收敛但在每一点都不收敛(如“跑动的特征函数”的例子)。他们的原有图式过于强大，导致新的、反直觉的图式难以建立。

孤立的知识点：即使学生勉强理解了定义，“依测度收敛”在他们的知识结构中也只是一个孤立的、奇怪的定义，无法与勒贝格积分、概率论(依概率收敛)中的相关概念建立有效连接，他们的图式是脆弱和不完整的。

4. 依测度收敛学习的认知难点

上面分析了学生在“依测度收敛”概念的学习困难的根源，下面我们具体来分析学生对“依测度收敛”的学习的认知难点。

4.1. 抽象性与反直观性：从“点”到“集”的思维跃迁

学生长期习惯于逐点思维：要判断 $\left\{f_n(x)\right\}$ 是否收敛 $f(x)$，他们会本能地固定一个点 x，观察 $\left\{f_n(x)\right\}$ 是否趋近于 $f(x)$。而依测度收敛要求他们将注意力从“点”转移到“集合”上，关注的是集合 $E_{n,\sigma} = \left\{x : \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \sigma\right\}$ 的测度变化趋势。

这种思维转换是反直觉的。学生难以接受这样一种现象：一个函数列可以在很大一部分点上(甚至几乎处处)不收敛，但只要那些“不听话”的点(即差值超过 σ 的点)所构成的集合越来越小(测度趋于零)，它就算是依测度收敛。这种“抓大放小”的整体性思维是认知上的一个巨大跨越。

4.2. 与其它收敛模式的混淆与辨析困难

实分析中多种收敛模式并存，极易造成混淆。

- 与几乎处处收敛的混淆：学生常错误地认为“依测度收敛”等价于“几乎处处收敛”，或者无法理解 Riesz 定理所揭示的“依测度收敛蕴含几乎处处收敛的子列”这一深层联系。他们难以构造和理解那些依测度收敛但不几乎处处收敛的经典反例(如“逐步移动的特征函数”，见下面的例 1)。
- 与 L_p 收敛的混淆：在有限测度空间下，L_p 收敛能推出依测度收敛，但反之则不成立。学生可能不理解 L_p 收敛要求的是一种更强的“积分意义下的平均逼近”，而依测度收敛是一种更弱的“分布意义上的集中”。

缺乏对上述关系的清晰辨析，学生头脑中的知识是孤立的、模糊的，无法形成有效的知识网络。

4.3. 对反例构造的理解与接受障碍[1] [2] [4]-[7] [8]

为了阐明依测度收敛与逐点收敛的差异，教学中必须引入反例，最典型的反例是定义在$(0,1]$上的一列特征函数。

例 1 设$E=(0,1]$，对每个正整数n，把E等分为2^n个小区间，定义2^n个函数如下：

$$f_j^{(n)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left(\dfrac{j-1}{2^n},\dfrac{j}{2^n}\right],\\ 0, & x\notin\left(\dfrac{j-1}{2^n},\dfrac{j}{2^n}\right],\end{cases}$$

$$j=1,2,\cdots,2^n$$

$\left\{f_j^{(n)}(x)\right\}$是先按 n 后按 j 的顺序形成的函数列，

$$f_1^{(1)}(x), f_2^{(1)}(x), f_1^{(2)}(x), f_2^{(2)}(x), f_3^{(2)}(x), f_4^{(2)}(x),\cdots, f_1^{(n)}(x), f_2^{(n)}(x),\cdots, f_{2^n}^{(n)}(x),\cdots$$

则(1) $\left\{f_j^{(n)}(x)\right\}$在$E$上依测度收敛于 0；

(2) 对任意$x\in(0,1]$，$f_j^{(n)}(x)$的值在 0 和 1 之间无限次振荡，从而不逐点收敛于任何函数。

这个反例的构造本身需要学生有良好的空间想象能力和对区间划分的理解。许多学生只能机械记忆这个反例的结论，而无法在头脑中动态地模拟出函数列“波峰”移动的过程，从而无法真正信服和理解其本质。

4.4. 概率诠释的转换困难(在概率论背景下)

在概率论中，随机变量序列$\{X_n\}$依概率收敛于随机变量X，其定义与依测度收敛完全一致。这对于数学专业的学生而言，本应是一个帮助理解的桥梁。然而，许多学生并未建立坚实的概率论直观，或者无法将测度空间$(X,\mathbb{F},m)$与概率空间$(\Omega,\mathbb{F},p)$顺畅地联系起来。他们难以将“例外集的测度趋于零”理解为“发生较大偏差的概率趋于零”这一直观的概率解释，从而错失了一个极佳的理解工具。

Table 1. Main cognitive difficulties in learning the convergence in measure
表 1. 依测度收敛学习中的主要认知难点

认知难点类型	核心问题	具体表现
抽象性与反直观性	思维模式从“点”到“集”的转换困难	难以接受“整体收敛”而非“逐点收敛”的理念
概念辨析困难	多种收敛模式关系复杂，易混淆	分不清依测度收敛、a.e.收敛、L_p收敛的强弱与关系
反例理解障碍	反例构造动态、抽象，难以想象	无法理解“移动波峰”类反例的构造原理和目的
概率诠释转换失败	未能建立与概率论的直观联系	无法将数学定义转化为“概率趋于零”的直观理解

5. 教学突破策略与实践方法

针对上述认知难点(见表 1)，教学策略应从降低认知负荷、促进意义建构、强化直观理解入手。

5.1. 动机先行与概念引入：从疑问开始

不要直接抛出定义，应从问题出发，创设认知冲突。

- 提出问题 1：“一致收敛和逐点收敛要求太强，是否存在一种更‘宽容’的收敛方式，只要求函数列‘在大多数点上’接近极限函数即可？”
- 提出问题 2：“在概率论中，我们说‘频率趋于概率’，‘样本均值趋于总体均值’，这究竟是一种什么样的收敛？它和数学分析中的收敛一样吗？”通过这些问题，激发学生的求知欲，明确学习依测度收敛的必要性和目的性，让学生带着问题去学习。

5.2. 多元表征与可视化：变抽象为具体

利用图形可视化是化解抽象性的利器，在讲解定义和反例时，应大量配合图形。

- 可视化讲解：绘制函数 $f_n(x)$ 和 $f(x)$ 的图像，展示一个函数列逼近极限函数的过程，用阴影区域醒目地标出例外集 $E_{n,\sigma}=\{x:|f_n(x)-f(x)|\ge\sigma\}$。制作动画，动态展示随着 n 的增大，这个阴影区域的“宽度”(区间长度/测度)在不断缩小，即使其“高度”可能不变或位置在移动，让学生直观感受“例外集测度趋于零”。
- 反例辨析：引入“在(0, 1]上移动的特征函数”反例。用动画演示一个宽度不断缩小的“波峰”或“脉冲”在区间(0, 1]上来回扫描的过程。让学生直观地看到，对于任何一个固定的点，总会被“波峰”无限次扫过(故不逐点收敛)，但每次“波峰”所占的空间(测度)越来越小，得出结论：依测度收敛于 0。

5.3. 正反例辨析与比较学习：在对比中深化理解

精心设计一组正例和反例(见表 2)，组织学生进行比较辨析，是理清楚概念关系的有效途径。通过小组讨论，填写表格，比较不同序列在不同收敛模式下的表现。

Table 2. The exercise questions comparing different types of convergence
表 2. 比较不同收敛类型练习题

序号	函数列的定义($n\in N^+$)	定义域	收敛类型辨析	教学目的
1	$f_n(x)=\dfrac{x}{n}$	$x\in[0,\infty)$	收敛于 $f(x)=0$ 逐点收敛：是 一致收敛：否 a.e.收敛：是 依测度收敛：是	展示：不一致收敛，但是逐点收敛、a.e.收敛、依测度收敛
2	$f_n(x)=x^n$	$x\in[0,1)$	收敛于 $f(x)=0$ 逐点收敛：是 一致收敛：否 a.e.收敛：是 依测度收敛：是	同上
3	$f_j^{(n)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left(\dfrac{j-1}{2^n},\dfrac{j}{2^n}\right],\\ 0, & x\notin\left(\dfrac{j-1}{2^n},\dfrac{j}{2^n}\right]\end{cases}$	$x\in[0,1]$	收敛于 $f(x)=0$ 逐点收敛：否 一致收敛：否 a.e.收敛：否 依测度收敛：是	展示：依测度收敛，但是处处不收敛
4	$f_n(x)=\chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right]}(x)$	$x\in[0,\infty)$	收敛于 $f(x)=0$ 逐点收敛：是 一致收敛：否 a.e.收敛：是 依测度收敛：是	展示：a.e 收敛的定义

续表

5	$f_n(x)=n\chi_{\left[0,\frac{1}{n}\right]}(x)$	$x\in R$	收敛于 $f(x)=0$ 逐点收敛：是 一致收敛：否 a.e.收敛：是 依测度收敛：是	展示： 即使函数值可以变得任意大，仍然可以依测度收敛
6	$f_n(x)=\sin(nx)$	$x\in R$	收敛于 无 逐点收敛：否 一致收敛：否 a.e. 收敛：否 依测度收敛：否	展示：不收敛的例子
7	$f_n(x)=\dfrac{1}{1+(nx-1)^2}$	$x\in[0,1]$	收敛于 $f(x)=0$ 逐点收敛：是 一致收敛：否 a.e.收敛：是 依测度收敛：是	综合练习，展示：一个“移动且收缩”的波包

延伸提问：能否修改例3，使其几乎处处收敛？

通过这样的对比练习，学生能从抽象的符号定义中跳出，通过具体的函数图像和数值关系，真正建构起对各种收敛模式的理解。

5.4. 技术辅助与动态模拟：赋能数学实验

鼓励学生使用数学软件(如 Python、MATLAB)亲自编程实现反例的动态演示。

- 实验任务：编程绘制“移动特征函数”前20项的图像，并计算例外集 $E_{n,0.5}$ 的测度，观察其随 n 的变化趋势。这种“做中学”的方式，将被动接受变为主动探索，极大地加深了学生对反例动态本质的理解，也培养了其科学计算能力。

5.5. 建立纵横联系：编织知识网络

教师要引导学生将新概念与已有知识建立广泛联系，形成知识网络。

- 纵向联系：指出依测度收敛是数学分析中收敛概念的推广和深化，是更一般的“度量收敛”概念在函数空间的一种体现。
- 横向联系：着重强调与概率论中“依概率收敛”的等价性。用“频率”、“估计量的相合性”等概率实例来诠释依测度收敛，实现知识的迁移与融合。同时，点明它在更高级课程(如调和分析)中的地位。
- 概率诠释：引导学生将 $E_{n,\sigma}$ 理解为“发生较大偏差($\geq\sigma$)的事件”，其测度就是“偏差概率” $\mathrm{P}\left(|X_n-X|\geq\sigma\right)\to 0$。

6. 结论与展望

依测度收敛作为实分析教学中的一个关键点，其学习过程充分体现了学生从经典数学分析思维向现代测度论思维转换时所面临的挑战。本文分析了其在抽象性、概念辨析、反例理解及知识关联等方面的认知难点，其根源在于思维范式从“逐点”到“整体”的跃迁。针对这些难点，本文提出了教学突破策略：(1) 以问题驱动替代定义灌输，激发内在学习动机；(2) 充分利用图形可视化和动态模拟技术，将抽象概念具象化；(3) 通过正反例的深度辨析与比较，主动建构清晰的知识网络；(4) 建立与概率论等学科的紧密联系，实现知识融合与应用。

未来，随着教育技术的不断发展，基于虚拟现实(VR)或增强现实(AR)的交互式数学实验平台或许能为依测度收敛等高度抽象的概念提供更具沉浸感的环境。同时，对学生学习路径的长期追踪与基于大数据的学习分析，将有助于进一步精准识别认知障碍，实现个性化教学引导。最终，通过这些教学创新，引导学生成功跨越认知鸿沟，不仅掌握知识本身，更深刻领悟现代数学的思想精髓。

基金项目

河北省高等教育教学改革与实践项目(2023GJJG131)；河北师范大学教学改革研究与实践项目(2023XJJG015)。

参考文献

[1] 程其襄, 张奠宙, 胡善文, 等. 实变函数与泛函分析基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.
[2] 邓东皋, 常心怡. 实变函数简明教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.
[3] 邓东皋, 常心怡. 为什么要学习勒贝格积分[J]. 高等数学研究, 2006, 9(4): 4-10.
[4] 崔颖. 关于“依测度收敛”概念教法的探究[J]. 宿州学院学报, 2015, 30(2): 12-124.
[5] 杜波. 构造性方法在实变函数教学中的应用[J]. 高等数学研究, 2012, 15(4): 89-90.
[6] 唐秀娟. 类比建构在实变函数教学中的应用[J]. 高师理科学刊, 2004, 24(4): 10-13.
[7] 汪威, 王增辉, 李健. 形象思维在实变函数教学中的应用[J]. 新乡学院学报: 自然科学版, 2012, 29(5): 469-470.
[8] 李翠香, 齐秋兰. 与依测度收敛有关的若干反例[J]. 高等数学研究, 2023, 26(1): 62-63+127.
[9] 鲍建生, 周超. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海: 上海教育出版社, 2009.