

基于认知诊断的高中数学教学评价与 教学补救

——以高一指数函数的教学为例

张海燕¹, 孙跃娟¹, 赵常玲²

¹商丘师范学院数学与统计学院, 河南 商丘

²商丘市实验中学, 河南 商丘

收稿日期: 2025年10月1日; 录用日期: 2025年10月28日; 发布日期: 2025年11月5日

摘 要

文章以高一指数函数的教学评价为例, 探讨基于G-DINA模型的认知诊断评估方法在高中数学教学评价中的应用。研究首先确定指数函数的五个认知属性, 构建相应的层级关系和测试题的Q矩阵, 以河南省商丘市某高中高一学生为研究对象, 利用G-DINA模型分析群体和个体的认知状态。基于诊断结果, 提出相应针对性的补救教学策略, 以提升学生的薄弱环节。研究表明, 认知诊断方法能够有效识别学生阶段性的学习短板, 为改进教学策略、优化教学效果提供科学支持。

关键词

认知诊断评估, 教育测评, 认知属性, 指数函数, 教学补救

Teaching Evaluation and Instructional Remediation of High School Mathematics Based on Cognitive Diagnosis

—A Case Study of Teaching Exponential Functions to High School Freshmen

Haiyan Zhang¹, Yuejuan Sun¹, Changling Zhao²

¹School of Mathematics and Statistics, Shangqiu Normal University, Shangqiu Henan

²Shangqiu Experimental High School, Shangqiu Henan

Received: October 1, 2025; accepted: October 28, 2025; published: November 5, 2025

Abstract

Using the teaching evaluation of exponential functions to high school freshmen as a case study, the application of cognitive diagnosis methods is studied based on the G-DINA model in teaching evaluation of high school mathematics. This research first identifies five cognitive attributes of exponential functions, constructs the corresponding hierarchical relationships and the Q-matrix for test items, and then selects high school freshmen from a school in Shangqiu, Henan Province, as the research subjects. The G-DINA model is employed to analyze the cognitive states of both groups and individuals. Based on the diagnostic results, some instructional remediation strategies are proposed to address students' weaknesses. The research demonstrates that cognitive diagnosis methods can effectively identify students' stage-specific learning gaps, providing scientific support for improving teaching strategies and optimizing instructional outcomes.

Keywords

Cognitive Diagnosis Assessment, Educational Assessment, Cognitive Attributes, Exponential Functions, Instructional Remediation

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

传统的教育测评中,人们往往认为学生的分数越高,学生对测试内容的掌握越好,分数相同的学生具有等同的能力水平。然而,教育实践表明,即使获得相同分数的学生,其内在的认知结构和知识掌握状况可能存在显著差异。《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》指出“只关注学生学习结果是不够的,更重要的是我们要了解学生如何学习,所以要建立多目标、多方式、过程性的评价体系”[1]。2020年习总书记在《深化新时代教育评价改革总体方案中》提出“要扭转不科学的教育评价导向,坚决克服唯分数、唯升学的顽瘴痼疾,提高教育治理能力和水平”。认知诊断理论[2]作为新兴的智能测评理论,融合了认知心理学、现代测量学、计算机科学等学科知识,能够精准分析学生的知识掌握状态和认知特点。相比传统分数评价,认知诊断评估通过诊断学生的认知结构和思维过程,为个性化教学提供科学依据,已成为教育评价改革的重要技术手段。

目前在教育测量评估中较为常用的认知诊断模型是 DINA (Deterministic Input, Noisy And Gate)模型和 G-DINA (Generalized DINA)模型。DINA 模型仅包含“失误参数”和“猜测参数”,具有参数少、解释性强的优势,受到很多学者的关注,被应用于多种学科的教学评价中,见[3]-[6]。但 DINA 模型常用于处理属性间相互独立的情形,对认知属性间交互作用较为复杂时常采用 G-DINA 模型。G-DINA 模型拥有更灵活的框架,允许属性间的协同效应,可以处理更加一般化的属性机制,在加设约束条件的情况可转化为 DINA 模型[7]。秦海江与其合作者将 G-DINA 模型应用于探索高中平面向量的认知诊断中,见文[7]。王强等则是将 G-DINA 模型应用于高中数学学习的个性化追踪研究中[8]。

在高中数学课程中,指数函数是高中数学的基础内容,是丰富学生数形结合的解题方法,锻炼学生计算能力,培养逻辑思维和推理能力的关键部分,更是高考的一大重点。关于指数函数的研究多聚焦于教学方法,高考试题的分析等方面。随着认知诊断理论的发展,也有学者将认知诊断理论应用于指数函

数的教学评价中，如文献[4]。它主要应用的是 DINA 模型，针对广州某高中学生进行诊断测评，同时也给出了一些教学补救建议。但数学知识点的各属性间关系都不是相互独立的。对指数函数的认知属性的划分也存在着不同的方式，并且每种属性之间也会相互影响。为更清晰地了解学生的潜在认知结构，本文则是以河南省商丘市某高中高一学生的指数函数测评为例，采用 G-DINA 模型应用于教育评价，借助认知诊断数据分析平台(flexCDMs)进行认知诊断分析，结合分析结果给出补救策略。希望将这种认知诊断评价方法应用于平时的数学教学中，不断改进教学策略，提高教育教学水平。

2. 研究设计

2.1. 确定认知属性与层级关系

划分认知属性是进行认知诊断的关键环节之一，本研究采用多源证据进行交叉验证。针对高一指数函数教学内容，首先参考高中数学课程标准与教材初步构建属性列表，进而通过学生访谈和教师研讨进行两方面的实证分析。通过对学生进行认知访谈，调研学生对学习指数函数内容时的认知过程，了解学生在解决指数函数问题时的内在心理过程，掌握常见的错误模式。在此基础上，与多位一线数学教师开展深度研讨，从教学经验层面验证所构建的属性的必要性与合理性。最后，为进一步提升其权威性，聘请学科专家评审，根据专家在学科内容和认知逻辑方面的建议进行优化，最终确定认知属性包括指数运算，指数函数的概念，图像和性质，及两个类型的应用，详见表 1。

根据认知属性的划分，列出相应的可达矩阵，如果认知属性间存在直接关系、自身关系和间接关系中的任意一种，则在可达矩阵中用“1”表示，否则用“0”表示[2]，见表 2。

Table 1. Attributes classification of exponential function

表 1. 指数函数的属性划分

序号	属性	具体含义
A1	指数的运算	能够比较熟练运用指数运算的法则
A2	指数函数的概念	理解指数函数的定义和形式
A3	指数函数的图像与性质	掌握指数函数的图像的特征和单调性等
A4	指数函数方程及不等式	根据指数运算法则和指数函数性质，能够较为熟练求解含指数函数的方程及不等式
A5	指数函数模型的应用	能够相对熟练应用指数函数模型解决实际问题

Table 2. Reachability matrix for cognitive attributes of exponential functions

表 2. 指数函数的认知属性可达矩阵

	A1	A2	A3	A4	A5
A1	1	1	1	1	1
A2	0	1	1	1	1
A3	0	0	1	0	1
A4	0	0	0	1	0
A5	0	0	0	0	1

基于以上 5 种认知属性的划分，学生对指数函数的所有属性掌握的可能模式共 $2^5 = 32$ 种。通常，我们认为学生掌握了指数的图像和性质，则应该已经掌握了指数的运算，即掌握属性 A3 一般都掌握了 A1

和 A2。类似分析可知，理想测试掌握模式共 8 种，见表 3。

Table 3. Students' ideal mastery profiles
表 3. 学生的理想测量掌握模式

	A1	A2	A3	A4	A5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0
4	1	1	0	1	0
5	1	1	1	1	0
6	1	1	1	0	1
7	1	1	0	0	1
8	1	1	1	1	1

2.2. 编制认知诊断测验

指数函数的测试题选自 2025 数学 A 版“5 年高考 3 年模拟”指数函数部分练习题，经 3 名一线教师和 2 名学科专家研讨，编制诊断评估测试题为 10 个选择题，共 50 分。为确保认知诊断的有效性，每个题目包含至少 1 个认知属性，并且总测试题所呈现每种认知属性不少于 3 次。在完成测试题的初步编制后，组织学科专家和教育测量专家进行独立评审，对每道题目所考查的认知属性进行独立评定，以构建初始的 Q 矩阵。经计算，评定者间的一致性信度(Percentage Agreement)达到 90%，表明专家意见一致。最终确定测试题目与认知属性对应关系，即为测试题 Q 矩阵，见表 4。

Table 4. Q-matrix of the test items
表 4. 测试题的 Q 矩阵

	A1	A2	A3	A4	A5
T1	1	0	0	0	0
T2	1	1	0	0	0
T3	1	1	1	0	0
T4	1	1	0	1	0
T5	1	1	0	0	1
T6	1	0	0	1	0
T7	1	1	1	1	0
T8	1	1	1	0	1
T9	1	1	1	1	0
T10	1	1	1	1	1

通过分层抽样方法，选取商丘某高中一年级 2 个重点班，2 个普通班共 225 名学生作为测试评估对象。从前期入学时中考的数学成绩及单元测试中发现，这些学生中，占年级前 30%的约 70 人，后 30%的约 40 人，中间水平的约 110 人。这说明选取的评估对象具有代表性。在学生完成指数函数章节内容学习

后,以周测的形式,要求学生 30 分钟内完成测试。此次测试,共发放试卷 225 份,收回有效试卷 225 份。试卷评定后,利用 EXCEL 统计学生各小题得分与总分,同时将测试结果利用二元记分法对作答数据进行编码,答对记为 1,答错记为 0,以题目为行,学生为列得到作答数据矩阵。

2.3. 认知诊断评估方法

在本次教学测评中,由于指数运算、图像分析及应用问题涉及多个属性的交互,G-DINA 模型更符合实际认知过程,故针对本次测试评估采用该模型。其数学表达式[7]为

$$P(Y_{ij}=1|\alpha_i)=\delta_{j0}+\sum_{k=1}^{K_j^*}\delta_{jk}\alpha_{ik}+\sum_{k=1}^{K_j^*-1}\sum_{l=k+1}^{K_j^*}\delta_{jkl}\alpha_{ik}\alpha_{il}+\cdots+\delta_{j12\cdots K_j^*}\prod_{k=1}^{K_j^*}\alpha_{ik},$$

其中 $Y_{ij}=1$ 表示被试 i 答对题目 j ,否则为 0; $\alpha_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ik})$ 表示被试 i 的认知属性掌握向量, $\alpha_{ik}=1$ 表示被试 i 掌握第 k 个属性,值为 0 表示未掌握。 K_j^* 指的是第 j 题目考查的属性数量; δ_{j0} 为题目 j 的截距项参数; δ_{jk} 为题目 j 中属性 k 的主效应; δ_{jkl} 表示题目 j 中属性 l 与属性 k 的交互作用,模型参数估计采用边际似然的最大期望化算法[9]。

3. 认知诊断评估结果

为验证测验题与测试质量,利用测试结果首先进行难度、区分度、信度、HCI 等分析。测试题的难度分析使用公式为 $P=\frac{\bar{X}}{X_{\max}}$, ($\bar{X}$ 表示测试者在某题目的平均分, $X_{\max}$ 为该题目的满分)得到测试题难度在 0.2 到 0.8 之间,见表 4,说明试题难度合适。将测试数据矩阵和指数函数的 Q 矩阵上传认知诊断分析平台(flexCDMs)进行数据分析,得出各测试题的区分度(表 5)和层级一致性指标 HCI 值为 0.6695,说明拟合良好。

Table 5. Test difficulty and discrimination
表 5. 测验难度与区分度

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	整体
难度	0.96	0.84	0.74	0.48	0.74	0.56	0.49	0.53	0.34	0.51	0.62
区分度	0.31	0.43	0.49	0.73	0.60	0.65	0.67	0.59	0.45	0.62	0.55

在认知诊断数据分析平台(flexCDMs),选择二级评分 CDMs,上传测试数据矩阵和 Q 矩阵,采用 G-DINA 模型估计得到的学生属性掌握概率和模式反应概率。下面分别从群体和个体两方面展示认知诊断评估结果。

3.1. 群体的诊断报告

基于 G-DINA 模型,对两个不同班型的学生的作答情况进行认知诊断分析,可以得到每位被试对各个认知属性的掌握概率,从平台导出数据利用 EXCEL 计算可得群体的认知属性掌握概率,如下表 6。

根据认知属性的分析结果,整体上大部分同学在刚学完指数函数的教学内容时,对各属性的掌握情况良好,重点班与普通班在各属性的掌握上存在较为明显的差异,尤其是关于属性 A4 和 A5。重点班在 A1 和 A3 上的表现较好,掌握的概率超过了 0.7,表示大部分同学都能较好的掌握指数的运算及指数函数的图像和性质。但在属性 A5 上表现较弱,仅为 0.3673,说明重点班学生对指数函数模型的深入应用能力有待提升。普通班整体在属性 A4 和 A5 上表现显著不足,均低于 0.5。两个类型班级的共同薄弱点是 A5,表明学生在将指数函数知识迁移到实际问题时存在较大困难。

此外，基于 G-DINA 模型的模式反应概率认知诊断分析结果显示 93.5%的学生划分到 8 种认知状态中(见表 7)，这也反映了采用该模型进行诊断分析的合理性。

Table 6. Attribute mastery
表 6. 属性掌握情况

属性	重点班	普通班	平均
A1	0.8213	0.6837	0.7525
A2	0.6373	0.5366	0.5870
A3	0.7421	0.6242	0.6832
A4	0.5565	0.3756	0.4661
A5	0.3673	0.3262	0.3468

Table 7. Predominant cognitive states among students
表 7. 大部分学生的认知状态

	认知状态	百分比
1	10000	5.31%
2	11000	3.82%
3	11100	12.81%
4	11010	8.36%
5	11110	25.35%
6	11101	21.62%
7	11001	2.38%
8	11111	12.82%
总计		93.5%

3.2. 个体的诊断反馈

学生的个体评价能够清晰地反馈出个体差异，这对学生个性化教学有很大的参考价值。通过认知诊断分析可以得到每一位学生详细认知属性掌握情况，表 8 展示的是部分学生的卷面总数、认知状态、以及属性掌握概率。

Table 8. The diagnostic feedback of some students
表 8. 部分学生的诊断反馈

学生编号	总分	认知状态	A1	A2	A3	A4	A5
ID4	45	11110	1	1	0.9986	0.9653	0.4535
ID5	45	11101	1	0.9976	0.9765	0.0876	0.8986
ID6	40	11110	0.8737	0.8737	0.9992	0.9576	0.3815
ID135	25	01010	0.1972	1	0.9568	0.4972	0.2925
...	...		...	...	...	...	...

从上表可以看出，学生 ID4 和 ID5 的总分是一样的，但两个人的认知状态是不一样的。学生 ID4 虽

然对属性 A1、A2、A3、A4 掌握都很好,但对属性 A5 的掌握概率相对较低,仅为 0.4535,说明该生对指数函数模型的应用能力有待加强。而 ID5 在属性 4 的掌握情况较差外,其它属性掌握都很好,说明该生指数函数部分的知识掌握较好,但与其方程,不等式融合应用能力较差,整体的计算能力有待提升。学生 ID4 和 ID6 的认知状态一致,仅在属性 A5 掌握有差异,在总分上也表现出了差异。而学生 ID135 的诊断反馈,该生仅对 A2 与 A3 有较好的掌握,说明学生能基本掌握指数函数的基本知识,但运算能力,综合应用能力较差,需要加强巩固练习。

4. 补救策略

通过对学生的认知诊断分析,更清晰地了解到学生的整体优势和不足,及个体的认知状态,提出以下教学补救策略。

4.1. 采用分层教学

针对普通班,应该多强化基础训练,如通过练习题反复讲解指数运算和图像性质,提升学生 A1~A3 基础属性的掌握;重点班则深化 A4~A5 的应用能力,设计实际情境问题如人口增长、复利计算等引导学生分析。采用“问题链”形式,从简单方程逐步过渡到复杂模型,辅以小组合作探究,提升解决实际问题的信心。

4.2. 深化思维导图

为解决学生个体知识能力的提升,教师可引导学生深化思维导图的运用,将零散的知识系统化形成完整的知识网络。然后让学生定期回顾自己制作的思维导图,并且在学习指数函数的综合应用后,将相关的解题方法和二级结论、自己刷题总结的解题技巧添加到思维导图中,使思维导图成为一个不断生长和丰富的知识体系,进一步巩固对指数函数知识的整体把握,提高知识的综合应用能力。

4.3. 加强错题管理

教师可指导学生建立错题本,对计算错误进行分类整理,并用不同颜色标记错误类型如概念性错误、步骤疏漏、笔下误等,以便针对性强化训练。同时,教师需强调解题过程的规范性,要求学生分步书写计算步骤并养成即时检验的习惯,减少因粗心导致的失误。此外,定期组织错题复盘活动,通过同类变式题的专项训练,帮助学生巩固薄弱点,逐步提升计算准确性和综合应用能力,以提升属性 A4 和 A5 的掌握能力。

5. 小结

基于认知诊断 G-DINA 模型编制了一份高中指数函数的诊断测验,诊断分析表明该测验具有良好的区分度且难度适中,构建的属性层级关系和测试 Q 矩阵合理,可用于对高一学生关于指数知识的各属性的掌握情况进行探究与诊断分析。诊断分析结果可以分别提供详细的针对群体与个体的反馈,可以用于针对学生的认知结构进行相应的补救教学或教学指导。为同类学校提供了一套可行的数学教学评价的参考方案,为优化教学方法,更好地进行教学改革提供科学支持。

基金项目

河南省教育科学规划 2025 年度一般课题项目:课程思政视域下中学数学教学现状与对策研究(2025YB0188);商丘师范学院高等教育教学改革研究与实践项目,《概率论》课程思政教学改革的实践与探索(2024XJGLX0065)。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 涂冬波, 蔡艳, 丁树良. 认知诊断理论、方法与应用[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2012: 1-3.
- [3] 宋倩雯, 李猛, 常锁成, 等. 基于 DINA 模型的高中离子反应认知诊断研究[J]. 化学教学, 2021(8): 21-27.
- [4] 邓静雯. 高一学生指数函数的认知诊断研究[D]: [硕士学位论文]. 广州: 广州大学, 2021.
- [5] 代瑞香, 尹一行. 基于 DINA 模型的民族地区中学生数学学习认知诊断研究[J]. 中学数学杂志, 2023(8): 5-10.
- [6] 胥云, 武尊民. 英语测试中的认知诊断研究[J]. 外语教学理论与实践, 2021(2): 44-55+75.
- [7] 秦海江, 霍学晨, 郭磊. 高中平面向量的认知诊断研究[J]. 数学教育学报, 2024, 33(2): 1-7.
- [8] 王磊, 陈艳, 李波. 认知诊断视角下的个性化追踪教学研究[J]. 中国考试, 2020(12): 52-58.
- [9] de la Torre, J. (2009) DINA Model and Parameter Estimation: A Didactic. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, **34**, 115-130. <https://doi.org/10.3102/1076998607309474>