

基于项目式学习的高中数学建模教学案例研究 ——以沪教版“易拉罐的设计”为例

刘永来

吉林师范大学数学与计算机学院, 吉林 四平

收稿日期: 2025年10月6日; 录用日期: 2025年11月7日; 发布日期: 2025年11月14日

摘 要

项目式学习是一种以学生为中心, 强调通过完成真实、复杂的项目任务来促进学生的深度学习与能力发展的创新型教学形式。本文以生活中的易拉罐设计问题为载体, 实施学科导向的项目式学习活动, 旨在增强学生的抽象思维能力和模型观念, 同时, 提升教师对项目式学习的整体把握与实施能力。

关键词

项目式学习, 模型观念, 抽象能力

A Case Study on High School Mathematics Modeling Teaching Based on Project-Based Learning

—Taking the “Design of Canned Drinks” in the Shanghai Edition as an Example

Yonglai Liu

College of Mathematics and Computer, Jilin Normal University, Siping Jilin

Received: October 6, 2025; accepted: November 7, 2025; published: November 14, 2025

Abstract

Project-based learning is an innovative teaching form centered on students, emphasizing the promotion of deep learning and ability development through the completion of real and complex project tasks. This paper takes the design problem of beverage cans in daily life as the carrier to

文章引用: 刘永来. 基于项目式学习的高中数学建模教学案例研究[J]. 教育进展, 2025, 15(11): 884-891.

DOI: 10.12677/ae.2025.15112113

implement subject-oriented project-based learning activities, aiming to enhance students' abstract thinking ability and model concept, and at the same time improve teachers' overall grasp and implementation ability of project-based learning.

Keywords

Project-Based Learning, Model Concept, Abstract Ability

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》明确指出,数学建模是高中数学核心素养的一个关键构成部分,要求学生能够通过建立数学模型解决实际问题,培养创新意识和实践能力[1]。然而,传统教学方式偏重理论,学生缺乏将数学知识应用于实际问题的机会,导致学习兴趣和效果不佳。项目式学习是以实际问题为导向,使学生在丰富多样的真实情境中,运用包括数学在内的多学科知识体系,通过采取恰当的策略与方法,在实践探索和问题解决的过程中,促进学生数学核心素养全面发展的一种教学模式。《中共中央、国务院关于深化教育教学改革全面提高义务教育质量的意见》中也强调,要推动教学方式的变革,倡导探究式、项目式学习,促进学生全面发展。因此,本文以易拉罐设计为例,给出基于项目式学习的高中数学建模的具体实施案例。

2. 项目式学习在数学建模教学中的应用研究

项目式学习在数学建模教学中的有效性根植于多个主流学习理论中。在项目式学习伊始,教师会呈现一个开放、复杂、贴近学生生活的真实问题,从建构主义视角看,一个优秀的驱动性问题能够成功创设一种“认知冲突”,打破学生原有的认知平衡,激发其探究欲望。例如,“如何为我们学校设计一个最合理的垃圾分类回收系统?”这类问题,能立即将学生置于一个需要综合运用统计、优化、几何测量等多方面数学知识的挑战性情境内。接着是探究与模型构建环节,学生以小组为单位,进行信息收集、提出假设、尝试建立数学模型。在建立数学模型的过程中,学生需要从纷繁复杂的现实信息中,识别关键变量,建立变量间的数学关系。这正是一个从具体情境中抽象出数学结构的思维过程,是数学建模能力的核心体现。但是模型的建立很少一蹴而就,学生需要不断试错、调试参数、甚至推翻重来。这一迭代过程深刻地体现了杜威“从做中学”和“反思性思维”的理念。每一次失败和修正,都是对数学概念更深层次的理解和建构。

在整个项目周期中,小组协作贯穿始终,学生需要用数学语言向同伴解释自己的思路,质疑他人的模型,共同应对挑战。这体现了维果茨基的最近发展区理论:在与能力相当的同伴互动中,个体的思维通过语言得以外化和精细化,从而在“社会文化媒介”的帮助下达达到更高的认知水平。

项目最终以研究报告、海报、口头演讲等形式展示成果。这不仅是学习的总结,更是一个重要的社会性过程。评价方式从单一的考试分数,转变为结合过程性评价(探究过程、协作表现)和终结性评价(模型质量、报告水平)的多元体系。这更全面地反映了学生的综合能力。

项目式学习与数学建模教学的结合,绝非简单的教学技巧叠加,而是一次深刻的教育范式变革,其背后有着坚实的建构主义、情境认知等学习理论作为支撑。它通过创设真实、复杂的学习情境,引导学生在协作探究中主动建构知识,在解决实际问题的过程中发展高阶思维能力和数学核心素养。

3. 项目学习主题设计要素分析

3.1. 适用对象及学情分析

“易拉罐的设计”项目式学习的适用对象是已经完成基础数学知识学习的高二或者高三学生，此时学生已经掌握圆柱体体积公式、函数的极值与最值的求解、导数等相关的基础知识与基本技能，初步具有将生活问题转化为数学问题的意识。但是，学生对于数学建模的整个流程仍缺乏清晰的认识，常感到困惑模糊[2]。

3.2. 学习主题成因分析

本项目源于对实际情境中问题的深入考量，为了弄清易拉罐设计的内在原理，需要收集整理相关数据，构建数学模型，并运用该模型解决具体问题。通过系统且有条理地实施项目式学习，学生能够经历一个完整的数学建模过程，这对于学生综合运用数学及其他学科的知识与方法去解决现实世界中的问题，促进学生数学核心素养的发展大有裨益。

3.3. 项目学习目标定位

本项目的学习目标设计如下：

(1) 结合易拉罐实物对其形状、组成部分进行分析，抽象出几何图形，通过提出必要的假设，引入适当的常量和变量，构建出对应的数学模型。

(2) 学生经历从提出问题、猜想模型、建立模型、求解验证模型、到实际应用模型的完整流程，深化数学建模与应用模型解决问题的能力，培养学生的科学探究精神，鼓励学生主动思考生活中存在的数学问题，学会通过实验、计算和验证来优化设计方案，提升科学素养。

3.4. 项目学习形式设计

本项目的核心内容是对优化最值类问题的数学建模，这一任务对学生而言具有一定的挑战性，因此采取了以小组合作为主导的活动形式。在整个项目实施过程中，教师适时地介入，提供精准的点拨与专业的指导，确保学生能够充分经历自我探索、团队协作、以及总结归纳与反思的学习流程。

4. 学习结构设计

在项目学习过程中，重点在于引导学生在真实情境中发现问题、提出问题、深入剖析问题并最终解决问题。本项目的学习流程可细分为以下几个阶段：首先进行市场调研与实际数据测量，随后提出问题，接着建立相应数学模型，之后，对模型进行求解，根据求解结果，对模型进行必要的调整与优化，最后，进行深入的反思与总结，并在此基础上进行拓展性评价。本项目的学习结构设计如图 1 所示。

5. 教学过程

活动 1: (于两天前布置)利用课后时间，学生小组中每位成员分工明确地收集市场上常见易拉罐的规格数据并测量 330 毫升可口可乐易拉罐的罐体厚度、罐顶厚度、净高度、罐身半径等，并把数据列表加以说明。

教师活动：提示学生测量厚度和直径的具体方法。如：可通过多层叠加的方法，测出高度后除以层数以得到厚度；用细线条绕易拉罐测出周长后通过计算求得直径。

学生活动：各小组得到了近似的数据，如下表 1。

【设计意图】：任务要求“学生小组中每位成员分工明确地收集”，这有效地创设了一个学习

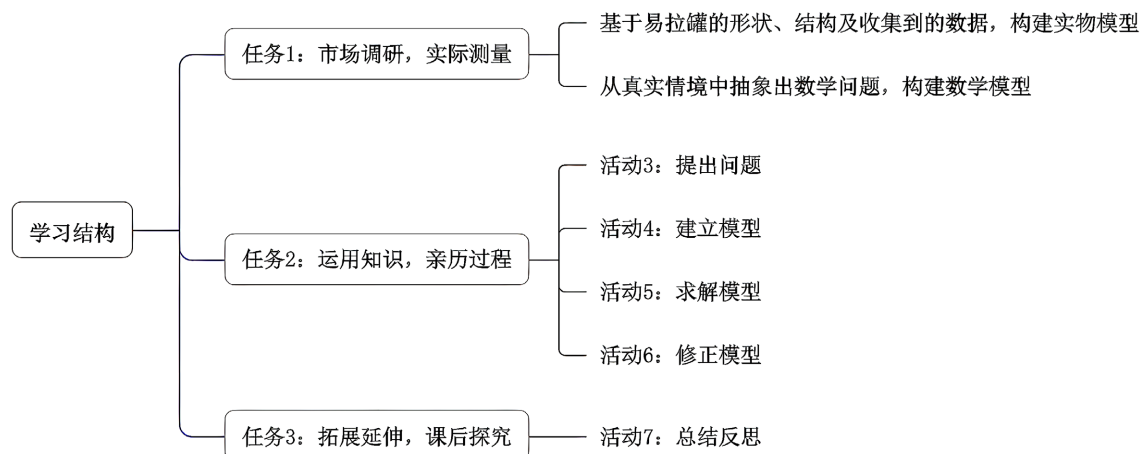


Figure 1. Structure design of the “canned drink design” project-based learning

图 1. “易拉罐设计”项目学习结构设计

Table 1. Measurement data of 330 milliliters Coca-Cola cans

表 1. 330 ml 可口可乐易拉罐的测量数据

测量部位	罐身高度	罐身半径	罐体厚度	罐顶厚度
测量单位(mm)	115 mm	33 mm	0.12 mm	0.23 mm

共同体,在小组内,学生需要讨论分工、交流测量技巧、比对数据、协商解决差异。这种对话和协作正是维果茨基所强调的“社会协商”过程。通过社会性互动,学生们的思维得以外化和精细化。能力较强的学生可以通过语言和行为为同伴提供“支架”,帮助整个小组跨越“最近发展区”。最终得到的“近似的数据”表格是小组社会性建构的成果,而非个体知识的简单加和。

活动 2: 情境引入

易拉罐的起源可追溯至 20 世纪 30 年代,最初的设计采用三片式结构,包括罐身、罐盖与罐底,均由马口铁制成。到了 60 年代初期,一种简化的两片式设计——仅包含罐身与罐盖的形式应运而生,并沿用至今。随着材料与制造技术的不断进步,易拉罐的重量得以显著减轻。现在超市与自动售货机中随处可见采用易拉罐包装的饮品,这些饮品种类繁多、品牌设计多样,深受广大消费者的青睐。然而我们发现,同一种规格的易拉罐的形状和大小几乎相同。为什么易拉罐要设计成这样的尺寸?

教师活动: 播放易拉罐制造过程的科普视频。

【设计意图】: 教师播放的科普视频是一个关键的教学支架。对于中学生而言,制造工艺、材料科学和工程经济学是陌生且复杂的领域。视频以直观的方式,将这些抽象的系统“可视化”,为学生提供了构建新知识所必需的共同经验基础和事实性素材。这个支架帮助学生跨越了“现有认知水平”与“项目探究所需认知水平”之间的鸿沟。没有这个支架,学生很难凭空想象出制造过程的约束,后续的数学建模将缺乏现实依据。通过介绍易拉罐的历史演变、现状,科普易拉罐的制作流程,激发学生对易拉罐设计背后蕴藏的数学、物理、工程和经济知识产生兴趣,进而引出项目主题,为后续一系列问题的提出埋下伏笔。

活动 3: 提出问题

问题 1: 易拉罐的最优设计,从数学的角度来看什么是“最优设计”呢?

学生活动: 市面上常见的易拉罐可近似看作圆柱体。学生容易想到,在满足容积要求的情况下,饮料生产商总希望包装材料的成本最低,也就是易拉罐本身的质量最小。

【设计意图】：引导学生对易拉罐的外形进行定性分析，从中抽象出几何图形，助力学生经历第一次抽象，即从具体的生活情境中抽象出数学问题，实现用数学的眼光观察现实世界，同时培养学生的抽象思维能力和几何直观意识。在此过程中，学生成功地完成了从具体到抽象的主动建构，将现实的易拉罐数学化为一个圆柱体优化模型。最终抽象出的问题——“在容积一定的条件下如何设计会使得包装材料的成本最低”是一个经典的驱动性问题。它源于真实情境，是开放、复杂且需要深度探究的。这个问题为学生后续的所有活动提供了持续的情境锚点和意义来源。

活动 4：建立模型

问题 2：为了简化问题，降低计算复杂度，我们需要做出适当假设，你认为假设有哪些？

教师引导学生做出假设。

假设 1：易拉罐容积一致且为固定值，设为常数 V ；

假设 2：易拉罐是一个上下封闭的空心圆柱体，其底部内半径设为 r ，净高度设为 h ，如图 2 所示；

假设 3：易拉罐的罐顶、罐体以及罐底三部分的材质和厚度均相同，将其厚度设为 d 、密度设为 ρ ，当材质确定后， d 、 ρ 均可认为是常数。

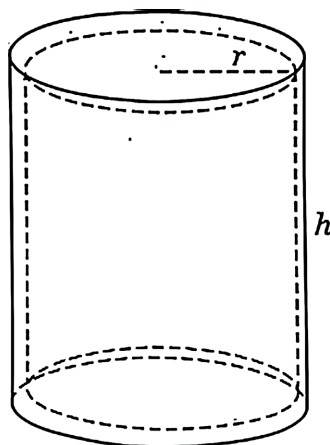


Figure 2. Hollow cylindrical can model
图 2. 空心圆柱体易拉罐模型

教师需要强调，进行合理、必要、适当的假设是建立数学模型的前提，在后续的数学建模过程中，遇到难以解决的问题时，仍可以适当做出假设，将问题做理想化处理。

【设计意图】：通过上述三个假设来模型简化的合理之处在于：首先，假设 1 固定容积精准地锚定了问题的约束条件；其次，假设 2 抓住了决定材料用量的核心几何特征——圆柱体的表面积，并且圆柱体的表面积公式简单明了，为学生后续建立目标函数扫清了障碍；最后，假设 3 确定了模型的度量标准，它将复杂的“成本”问题，转化为一个清晰可测的“材料体积(质量)”问题。但是这样建立的模型与现实存在失真：真实的易拉罐并非一个完美的圆柱体，为了结构强度和使用便利，它通常有收口的颈部和内凹的底部。同时现实中的易拉罐不同部分的材质和厚度并非完全相同，罐顶和罐底为了承受内部压力和堆叠压力，通常会比罐身更厚[3]。

问题 3：易拉罐的容积怎样表示？

问题 4：罐顶、罐体和罐底可近似看作什么几何体？

问题 5：易拉罐的总质量为多少？

学生活动：根据假设 1 及 2，可以得到 $\pi r^2 h = V$ 。根据假设 2 及 3，罐顶和罐底均可以看成是一个圆柱

体,质量均为 $\rho\pi r^2 d$ 。罐体展开后可近似看作棱长分别为 $2\pi r$ 、 h 、 d 的长方体,其质量为 $2\rho\pi rhd$ 。这样,易拉罐的总质量为 $\rho d(2\pi rh + 2\pi r^2)$,其中 d 、 ρ 为常数。

问题6:影响易拉罐总质量的因素是什么?

学生活动:容易发现当 $(2\pi rh + 2\pi r^2)$ 取最小值时,易拉罐的总质量最小,即 r 和 h 是影响易拉罐总质量的两个变量。

师生共同总结得到数学模型:已知常数 V ,求变量 r 、 h 的值,使得在满足 $\pi r^2 h = V$ ①的条件下, $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ ②取得最小值。

【设计意图】:通过设置问题串,既降低了问题的难度,又引导学生学会有序思考和解决问题。

活动5:求解模型

问题7:如何求易拉罐质量的最小值?

教师活动:引导学生回忆利用导数求函数最值的步骤。

学生活动:将两个变量转化为一个变量后再按步骤进行求解。

由①,得 $\pi rh = \frac{V}{r}$,代入②,得 $S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$,求导,得 $S' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$ 。令 $S' = 0$,得 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ ③。

因为 $(S')' = 4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0$,说明函数 S' 是严格增函数,它只有一个零点,所以当 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时, S 取得极小值(也是最小值),即 $S = 2\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}} + \frac{2V}{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ 。

问题8:当易拉罐质量最小时,罐体高度和罐顶直径存在什么样的关系?

学生活动:将③代入①,得 $h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ ④,综合③与④,得 $h = 2r$ 。

通过上面的结果,学生发现:当易拉罐的罐顶直径与罐体高度相等时,其质量最小。然而这和同学们上课之前收集到的数据不相吻合,实际生活中常见的易拉罐的高度要比直径大的多。(表1中罐身高度为115 mm,罐身半径为33 mm)所以上述结论和实际情况相差还是比较明显的,这意味着以上模型仍存在问题,需要修正。

活动6:修正模型

学生活动:通过观察课前测量的易拉罐罐顶和罐体的厚度,发现罐顶的厚度要大于罐体的厚度,所以对假设3进行修改。

假设3修改如下:易拉罐罐体和罐底厚度为 d ,罐顶厚度是前两者的 k 倍,但三者材质相同(密度均为 ρ)。

此时易拉罐的质量变成 $\rho d(\pi k r^2 + \pi r^2 + 2\pi rh)$ (ρ 、 d 为常数)

学生活动:小组讨论写出新模型,参考原模型求解过程,对上述模型进行求解,得出结论:当罐体高度 h 为罐顶半径 r 的 $(1+k)$ 倍时,可使易拉罐质量最小。

教师组织学生小组对新得到的模型结论进行验证,根据相关资料,市场上容积为355 ml的易拉罐罐顶厚度约为罐底和罐体的3倍,即 $k=3$,即罐体高度为罐底半径的4倍,直径的2倍时,易拉罐消耗材料最少。这个结果和实际测量结果比较接近,新模型通过了验证,建模过程完成。

【设计意图】:学生经历的数学建模的全过程可以概括为:明确约束条件和目标函数-简化变量的数量-利用导数求出函数最值-用收集到的数据验证模型结论-调整假设并修正模型。在利用导数求解

函数最值的过程中实现了对数学问题的第二次抽象，这一过程在数学内部解析了变量间的关系，并对函数模型进行了定量的刻画，展现了运用数学的思维思考现实世界的途径，有效提升了学生的逻辑推理能力和运算能力。

活动 7：总结反思

本节课以生活中常见的易拉罐为研究对象，思考其设计背后蕴含着怎样的数学规律，以学生亲自调查、测量收集数据为展开点，学生经历了数学建模的全过程。教师引导学生总结相关知识，并归纳问题的解决方法。反思本节课，我们建立的模型是不是还有改进空间呢？例如，在实际生活中，我们见到的易拉罐，形状大多是由圆台和圆柱组成的，罐底也不是平面而是曲面等等。教师可以通过提出这样的疑问，在学生心里埋下一颗“科学的种子”。最后教师布置如下任务让学生课后解决。

(1) 我们知道，在体积一定的条件下，正方体、圆柱以及球的表面积满足 $S_{\text{正方体}} > S_{\text{圆柱}} > S_{\text{球}}$ ，那么为什么生活中几乎见不到设计成球体或者正方体的易拉罐呢？可以从实用性、空间利用率、包装效率角度进行思考。

(2) 各学生小组提交组内设计出的“最优易拉罐”模型(可添加巧思，进行创新)，并利用 PPT 阐释设计思路。

(3) 建立更复杂的含参模型：学生可以尝试建立由圆台状颈部、圆柱状罐身和内凹曲面罐底组成的复合几何体模型，在此过程中引入新的几何参数，如圆台的上底半径、曲率半径等。

活动 8：项目评价

项目式学习的评价要遵循“以评促学”的理念。在项目式学习的过程中要侧重于学生在建模历程中的关键表现：通过观察记录、小组工作日志与反思备忘录来评估其在数据收集阶段的严谨性与协作、在提出假设时抓住主要矛盾的洞察力、以及在模型迭代中展现的元认知和批判性思维。同时利用小组互评与教师观察来衡量其团队贡献与沟通效率。在总结性评价方面要聚焦于学习成果的综合质量：通过一份包含问题提出、模型建立、求解分析与现实反思的最终项目研究报告来评估学生将复杂现实问题抽象化、数学化并清晰阐述解决方案的终极能力。

通过这样一套过程与成果并重的评价体系，学生不仅能得到一个公正的项目式学习评价，更能深刻领悟到“在学习过程中的每一次思考、每一次协作、每一次修正，都和最终的那个答案一样重要。”而这正是素养导向教育的核心所在[4]。

6. 教学反思

本次项目式学习解决问题的核心是抽象出几何图形，明确优化问题的求解思路。学生经历数学建模的全过程，对如何利用数学建模解决生活中的复杂问题有了更深刻的理解。数学建模与项目式学习存在着天然的契合，数学建模为项目式学习提供重要的方法论支撑，项目式学习为数学建模提供真实的应用场景，二者的结合为学生创造更丰富高效的学习体验。

项目式学习的核心特质之一在于选取源自现实世界，具有真实性、挑战性的问题。易拉罐优化设计的背景十分接近学生的日常生活，每位学生都能全程参与，通过小组合作的形式，学生经历自主学习、合作学习的过程，在解决问题的实践中深化对知识的理解。此外，鉴于项目式学习活动的主题往往具有挑战性，单凭学生自身往往难以实现问题的全面解决，这时就需要教师在项目方案设计、小组分工、问题解决等多个环节与学生并肩作战，在关键环节为学生提供帮助及指导性意见。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

-
- [2] 姜志根. 经历数学建模全过程的项目式学习设计与实施——以“拱桥悬挂灯笼方案设计”为例[J]. 中国数学教育, 2024(3): 49-52.
 - [3] 郑蓉蓉, 蒋逸卿, 唐恒钧. 基于问题链的跨学科项目式学习设计——以“飞扬的羽毛球”为例[J]. 中国数学教育, 2024(2): 6-13.
 - [4] 沈迎华, 徐德同. 初中数学项目式学习的内涵特征及实施建议——以“如何选取优惠的电话套餐”为例[J]. 中国数学教育, 2024(19): 5-8+15.