Advances in Education 教育进展, 2026, 16(11), 841-850
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2026.16112450

Hans汉斯

知识图谱赋能《线性代数》课程建设：从学情诊断到成效检验

杨晓梅

新疆大学数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2026年10月5日；录用日期：2026年11月4日；发布日期：2026年11月12日

摘　要

《线性代数》的挂科问题在我校已经持续多年。近四个学期，期末卷面及格率在24.8%至47.6%之间，不及格人数一直超过一半，证明题得分率最低的一学期只有0.118。课程组把四个学期约8000人次的小题分数据合并起来做学情诊断，先弄清学生卡在哪些环节，再决定课程建设从哪里入手。诊断暴露出五类问题：证明与推导写不出来、综合计算不稳、概念辨析易混、低分学生集中、学院之间差距大。围绕这些问题，我们以知识点为主键建设课程图谱，把问题、能力、思政与评价挂到同一个节点上，并配套分层题库、易错点清单、学习路径和实践项目。三个学期同学期同一份试卷的准实验检验显示，按行政班或学院分层控制学生构成后，平均分分别高出5.39、6.12和6.14分($P < 0.005$)，及格率提高10至13个百分点，80分及以上比例接近翻倍；中位数和P75提高4至11分，P10只提高1至4分，这套做法对中间层有效，对基础最薄弱的学生帮助有限。

关键词

线性代数，课程建设，知识图谱，学情诊断，学习成效，准实验研究

Building a “Linear Algebra” Course with a Knowledge Graph: From Learning Diagnosis to Effect Evaluation

Xiaomei Yang

College of Mathematics and Systems Science, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Received: October 5, 2026; accepted: November 4, 2026; published: November 12, 2026

Abstract

The failure rate of the “Linear Algebra” course has persisted in our school for several years. Over the past four semesters, the pass rate on the final exams ranged from 24.8% to 47.6%, with the number

文章引用: 杨晓梅. 知识图谱赋能《线性代数》课程建设: 从学情诊断到成效检验[J]. 教育进展, 2026, 16(11): 841-850.
DOI: 10.12677/ae.2026.16112450

of failures consistently exceeding half. The lowest score rate for problem-solving was only 0.118 in one semester. The course team combined the data of approximately 8000 students' small question scores from the four semesters to conduct an academic situation diagnosis, first identifying the areas where students were struggling, and then determining where to start the course construction. The diagnosis revealed five problems: weak proof writing, unstable computation, confused concepts, clustering of low scores, and large gaps across colleges. A knowledge graph was therefore built with knowledge points as the primary key, carrying driving questions, ability indicators, values-oriented elements and assessment at the same node, together with a graded item bank, a list of typical errors, learning paths and projects. A quasi-experiment of the same exam paper in the same semester over three semesters showed that, after controlling for class or college composition, mean scores rose by 5.39, 6.12 and 6.14 points ($P < 0.005$), the pass rate rose by 10 to 13 percentage points, and the proportion of those scoring 80 points or above nearly doubled; the median and P75 increased by 4 to 11 points, and P10 only increased by 1 to 4 points. This approach was effective for the middle layer but had limited help for the weakest students at the foundation level.

Keywords

Linear Algebra, Course Construction, Knowledge Graph, Learning Diagnosis, Learning Outcome, Quasi-Experimental Study

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

《线性代数》是理工类、经管类专业都要开的公共基础课。内容抽象，逻辑链长，教学班多，学生的专业基础差别也大。课程组近四个学期的期末卷面及格率在 24.8%到 47.6%之间，不及格率长期超过一半，证明题得分率最低的一学期只有 0.118。同一份试卷、同一套评分标准之下，这样的成绩分布很难用某一届学生不努力来解释，它更像是课程内容的组织方式与学生实际掌握程度之间的错位。

围绕线性代数教学改革，已有不少讨论，涉及互动式教学、案例教学、技术工具应用、线上线下混合式教学以及课程思政的融入[1]-[3]；我们此前也讨论过线性代数的教学创新与思政元素的结合[4]。《教育部关于一流本科课程建设的实施意见》要求提升课程的高阶性、创新性与挑战度[5]，对基础课的内容组织方式提出了新要求。已有的工作回答了“可以怎么做”，但还有两件事不清楚：建设内容依据什么确定，效果用什么证据说明。内容依据不清楚，图谱和题库容易变成资源陈列，与课堂进度、考点对不上；效果没有证据，改得好不好只能凭感觉。

本文报告的是课程组近三年的一轮建设，顺序是先诊断、再建设、后检验：先把四个学期期末试卷的小题分合并分析，定位学生的困难环节；再以知识点为主键，把问题、能力、思政与评价挂到同一套节点上开展建设；最后用三个学期同学期同一份试卷的卷面成绩检验效果，看提升发生在分数分布的哪一段。

2. 学情诊断：课程建设的实证起点

2.1. 数据来源与统计口径

学情诊断只用期末考试成绩，不用平时成绩。四个学期的期末考试都是全校统一命题、统一阅卷的闭卷考试，题型结构与分值分布一致，学期之间、教学班之间可以横向比较。卷面及格率指卷面成绩不

低于 60 分的学生占有效考生(剔除缺考学生)的比例；难度系数是一道题或一类题型的平均得分与满分之比，按 $P \geq 0.7$ 为容易、$0.4 \leq P < 0.7$ 为中等、$P < 0.4$ 为较难划分。不用平时成绩，是因为它由任课教师综合评定，班际尺度不统一，比出来的差异很可能是评分习惯的差异。本文使用的成绩数据由课程组从教务系统导出后匿名处理，只报告聚合统计量，不涉及学生个人信息。四个学期的整体成绩与题型得分率见表 1。

Table 1. End-of-semester examination results and item-type score rates for the four semesters
表 1. 四个学期期末卷面成绩与题型得分率

学期	有效人数	平均分	及格率	计算题得分率	证明题得分率
2023~2024 学年第一学期	3077	57.20	45.1%	0.579	0.359
2023~2024 学年第二学期	927	45.80	24.8%	0.446	0.118
2024~2025 学年第一学期	3048	57.34	47.6%	0.595	0.417
2024~2025 学年第二学期	908	55.13	40.4%	0.593	0.397

注：计算题、证明题两列为该题型得分率；有效人数为剔除缺考学生后的人数。

2.2. 诊断结果

从卷面成绩看，四个学期的平均分在 45.8 到 57.3 分之间，不及格率长期过半；2024~2025 学年第一学期 60 分以下的学生占 52.4%，40 分以下的有 720 人，占 23.6%。类似情况在其他高校的工科线性代数中也有反映[1] [2]。低分学生的困难多半不在当学期的新内容上，而在更前面的环节：矩阵运算和行列式算不熟，后面的方法就只能靠背，越往后越跟不上。对这部分学生来说，关键是自己知道该回到哪一章补，课程建设需要给出这样的入口。

题型得分率的落差很稳定：客观题最好，计算题和填空题居中，证明题最低。四个学期证明题(第 21 题)的得分率只有 0.118 到 0.417，涉及概念辨析的选择题也多次低于 0.45。这两类题表面不相干，学生失分的原因却相同：他们记得住结论，但说不清结论成立的条件，也写不出推理过程。也就是说，困难出在知识的运用环节，而不在知识量上。教学因此要把力气放在条件的判断和过程的表达上，结论本身不必再反复强调。

从学生来源看，学院之间的差距同样明显。2024~2025 学年第一学期，计算机科学与技术学院及格率 61.4%，旅游学院只有 21.3%，相差 40.1 个百分点。各专业对线性代数的需求本来就不一样：计算机类后面要用矩阵运算和数据分析，经管类要用线性模型，而课时与入学基础是同样的。同一套例子讲到底，有的学生觉得离专业太远，有的又跟不上，案例和任务需要能按专业裁剪，让不同专业各有入口。

3. 建设框架：以知识点为主键的五维对齐

线性代数的内容本身是整体性的。向量、矩阵和线性方程组说的是同一件事的不同侧面，行列式、秩、线性相关性与解的结构之间可以互相推导。教材按章节逐点推进，讲起来方便，代价是把这些联系切碎了，学生记住的是一堆互不相干的技巧。

我们把建设框架定为以知识点为主键的五维对齐，把驱动问题、能力指标、思政素材和评价方式挂到同一个知识节点上(示例见表 2)。这样做的好处是备课省事，一次备课就能把问题设计、能力对标、思政融入和练习配置做完，不必在几套材料之间来回对应；每个节点的能力支撑和评价证据也能查到，课程目标不再只是教学大纲上的一句话。思政素材的选择和融入参照已有建设经验[3]，每个节点上同时给出育人目标和可评价证据。

4. 课程建设的主要内容

4.1. 知识图谱与内容重构

建设的骨架是一张知识图谱。它以我们使用的教材和教学大纲为准[6]，分成章、节、知识点和知识节点四层，共 8 个知识模块、103 个知识点、246 个知识节点和 57 条关系；114 个明细节点标明类型(定义、定理、性质、公式或方法)，并保留教材编号和学习要求。节点之间的关系分先修、包含、等价、推广、应用和类比六类。关系标注看起来是细节，实际很影响使用：把矩阵的秩与向量组的线性相关性的等价关系标出来，学生在做综合题时才知道可以从哪一端下手。我们另外沿行列式与秩、线性相关性、线性方程组解的结构、特征值与相似对角化、二次型与正定性梳理了五条主线。

Table 2. Examples of the five-dimension alignment of "knowledge, problems, abilities, ideological and political education and assessment"
表 2. "知识－问题－能力－思政－评价"五维对齐示例

知识节点	驱动问题	能力指标	思政素材	评价方式
矩阵的秩	秩为什么能统一可逆性、相关性与解的判定？	抽象与逻辑推理能力	透过现象看本质：初等变换改变矩阵的外形，秩保持不变	综合证明题、章节测试
线性相关性	什么叫做真正意义上的独立？	抽象思维、批判性思维	去冗余、抓关键：识别向量组中不可替代的部分	相关性判定与反例分析
高斯消元法	消元为什么能保持同解？	算法执行能力	数学史素材：《九章算术》"方程"章用算筹布列方程，以"遍乘直除"求解，是消元法的早期形式	求解过程评分
实对称矩阵对角化	为什么实对称矩阵性质特别好？	抽象思维、跨学科迁移	结构决定性质：实对称矩阵必可正交对角化，主成分分析是其典型应用	编程实验报告

图谱在核心节点处的局部结构、节点之间的关系类型以及与之关联的问题，可参看附录 A 的图 A1 与表 A1。

4.2. 问题图谱与问题链

问题图谱解决的是这个知识点要问到什么程度。问题按前置、核心、拓展、挑战和跨章综合五类组织，共 79 个，覆盖 21 个小节，每个问题都写了参考答案要点、认知层级和难度。问题链的设计直接对着第 2 节的诊断结果：证明与推导类内容多配分析层级的问题，并且要求写出关键依据，只给结论不算完成；计算类问题配带步骤提示的拓展题；概念容易混的地方，核心问题直接设计成相近概念的辨析。课堂按前置问题查基础、核心问题推理解、拓展问题练迁移、挑战问题引创新的节奏推进。

4.3. 易错点图谱与题库建设

易错点图谱汇总了 14 类典型错误，每条都写明典型表现、认知根源和干预办法。条件漏用多出现在使用定理的环节，学生记住了结论却忘了前提，我们的做法是要求使用前先把条件列出来；依据缺失表现为整段只有计算没有理由，就在板书和作业里强制标注依据。这些经验过去散落在作业批改和答疑中，整理成图谱后可以逐届补充。

题库按知识点和题型分类，与问题图谱、易错点逐一挂接，覆盖选择、判断、填空、计算和证明五类题型。每道题标明难度，同一个知识点配一组由易到难的题目，较难的题后面附步骤提示，避免学生一上来就卡住[7]。题库还有我们起初没想到的用处：组卷时可以直接检查知识点覆盖和难度分布。题目示例及其知识点、难度等级与能力目标的标注方式见附录 B。

4.4. 学习路径、实践项目与评价调整

针对专业差异和低分学生，我们建了 8 条模块化学习路径和 45 个实践项目。学习路径按课前、课中、课后安排，学生先自查先修知识，再按薄弱知识点找例题和练习。考虑到不少学生的困难其实来自更早的知识缺口，另设了基础题组，覆盖多项式运算、方程的同解变形这些先修内容，并提供错题跟踪。实践项目分验证性、设计性、综合型、应用型和创新性五类，按专业裁剪。所有内容都放进了超星泛雅在线课程平台，学生做作业、重做错题，教师据此调整教学。评价方式也跟着改了：随堂测、章节测试、在线作业、错题重做、实践项目和课堂参与一起构成过程性考核。

5. 建设成效检验

5.1. 研究设计

检验的对象就是上面这套建设内容。实验组是课程负责人所授、使用了这套内容的教学班，包括软件 24 级的行政班、电信 24-1 (实验班)、计算机 24-1 (卓越班)和纺织 24-1 至 24-3 等班级；对照组是同一学期、同一份试卷、由其他教师任教的教学班。我校的教学班不是随机分配的，而是先由学生自主选择任课教师、再按选课结果编班，因此两组学生的构成可能带有选择因素，比如学习动机较强的学生更可能选某位教师的课。用同学期同一份试卷作对照，可以把试卷难度和考试环境的影响控住。为减少构成差异的干扰，我们按学生所在的行政班或学院分组比较：同一行政班的学生被分到不同教学班，班内比较就排除了专业构成和入学基础的差异；再把各组的差异汇总，得到两组平均分差距的总体估计，表 3 中同时给出 95%置信区间。不过学习动机这类无法直接观测的因素仍可能残留，解读结果时需要保留这一点。三个学期的数据分别是 2024~2025 学年第二学期(908 人)、2025~2026 学年第一学期(全校考生 3281 人)和 2025~2026 学年第二学期(497 人)。

Table 3. Score differences and quantile changes after controlling for student composition
表 3. 控制学生构成后的成绩差异与分位数变化

学期	分层变量(层数)	固定效应估计(95% CI)	P50 差值	P10 差值
2024~2025 学年第二学期	行政班(17 层)	+5.39 分(2.06~8.72)	+6	+4
2025~2026 学年第一学期	学院(2 层)	+6.12 分(2.18~10.06)	+10	+1
2025~2026 学年第二学期	行政班(10 层)	+6.14 分(1.93~10.35)	+6	+4

注：表中估计值为各行政班或学院内两组平均分之差的加权汇总值，三个学期均在 0.005 水平上显著；分位数差值为实验组与对照组之差，单位为分。

5.2. 估计结果

三个学期的平均分分别高出对照组 6.19、5.27 和 6.70 分；把学生构成的影响控制住以后，差距为 5.39、6.12 和 6.14 分，都在 0.005 水平上显著。三个估计值非常接近，分层前后的方向和量级也一致，我们不认为这是某一两个班的偶然结果。及格率提高 10 至 13 个百分点，80 分及以上比例从对照组的 10.3%、10.7%、6.4%提高到 21.8%、14.9%、15.3%。

分位数上的差别更值得说。三个学期中位数分别高出 6、10 和 6 分，P75 高出 11、6 和 8 分，而 P10 只高出 4、1 和 4 分。提升集中在中位数和中上分段，基础最薄弱的学生受益有限。这一点与我们最初“给薄弱学生加基础题组就能拉起来”的预期并不一致。回到数据上看，这部分学生的困难往往在更早的环节，本课程内的图谱和练习补不上这个缺口，只能把补强前移。

6. 讨论

6.1. 建设内容与学习改善的对应关系

本文的建设内容与第 2 节的诊断结论逐条对应：知识图谱回应知识之间缺少联系的问题，问题链回应结论能记住、条件不会判断的问题，题库与错题记录回应练习缺少针对性和反馈的问题。三个学期的结果支持这种对应关系。实验组提高的不只是平均分，80 分及以上比例接近翻倍，说明改善发生在需要综合运用与推理表达的题目上，而不是仅仅把及格线附近的学生拉了进来。已有研究对结构化知识组织、以提取为目的的练习和即时反馈的作用有过一致判断[8]-[10]，本轮建设的作用在于把这些原理落实为可以核查的节点、问题和题目，使它们在日常教学中稳定发生。

6.2. 基础薄弱学生改善有限的原因

分位数结果显示，提升集中在中位数与中上分段，P10 只提高 1 到 4 分。这一结果与建设内容的边界一致：这部分学生的困难多出在前置环节，如基本运算与同解变形等，而本课程的图谱与练习都建立在这些前置能力之上。课程内的干预可以改变本课程的学习方式，却无法替代先修知识的补强。据此，后续建设需要把补强环节前移，并考虑与先修课程的衔接。

6.3. 与已有研究的关系及结果的适用范围

与同类的教学改革研究相比，本文有三点不同：一是把教学设想转化为可核查的建设成果，节点数量、问题数量以及题目与知识点的挂接关系均可查验；二是用三个学期同一份试卷的卷面成绩检验效果并控制学生构成，而不只是报告实施过程；三是明确交代效果的适用边界。边界的具体内容与成因在 6.4 节集中讨论。

6.4. 研究的局限与适用边界

本文结论的适用边界可从数据条件、本校生源与教学环境、学科差异、资源与培训四个方面说明。

第一，数据与样本的局限。检验只用期末卷面成绩，未纳入入学成绩、学习动机与学习行为数据；教学班由学生自主选课形成，分层比较控制了专业构成与入学基础，但难以排除动机等不可观测因素；样本为单校、单课程、三个学期，两组任课教师亦不同。因此，5 至 6 分的差距应理解为该条件下的实际差异，而非课程建设的净效应。

第二，本校生源与教学环境带来的限制。本校线性代数面向全校理工与经管专业，班额大(单个学期考生 3000 人以上)、入学基础与专业需求差异明显；统一命题与统一阅卷、以知识点为主键组织内容、用分层比较控制构成差异，都是针对这一环境形成的做法。若学校班额较小、生源整齐或已实行小班研讨，图谱带来的边际改进可能小于本文水平；在大班多教师、评分尺度不易统一的公共基础课中，其在统一口径上的作用则更明显。

第三，方法在其他学科门类课程中的适用性与调整。本文方法以知识组织方式为主，迁移到其他课程与学科时需区分两种情形。其一，用于高等数学、概率论与数理统计等数学类基础课时，以知识点为主键的组织方式可以沿用，但须按课程自身的知识结构重新划分模块与关系，并重新标定问题图谱的认知层级；其二，同一门线性代数课面向不同学科门类的学生开设时，须按专业需求裁剪内容与难度：面

向人文社科类专业，课时少、数学基础差异大，应以概念理解、数据解读和案例为主，弱化证明与复杂推导类节点，问题链下移至记忆与理解层级；面向医学、生物、化学、地球科学等实验科学类专业，数据处理与建模需求较强，应增加最小二乘拟合、矩阵分解与实验数据处理类项目，适当降低定理证明比重；面向数学类专业，则需提高向量空间、线性变换等抽象结构与证明类问题的比重，并上调题库的难度上限。

第四，资源投入与教师培训的现实评估。首次建设的工作量集中在拆解知识点与关系(本轮为 8 个模块、103 个知识点、246 个节点、57 条关系)、编题并与知识点挂接、整理易错点与学习路径、上传平台资源四项，难以在常规备课时间内完成，通常需 2 至 3 名教师分工投入一个学期以上；建成后每轮维护约每学期 1 至 2 周。教师培训应覆盖平台与图谱操作、按图谱备课与命题、依据错题与测验数据调整教学三方面，若培训不到位，图谱易与课堂教学脱节。此外，效果检验依赖统一命题与统一阅卷，不具备该条件时跨班比较难以成立，建议先在小范围试点、再逐步推广。

7. 结论与推广

这一轮建设从四个学期的期末成绩开始，诊断出推理论证薄弱、综合计算不牢、概念辨析不清、低分集中、专业差异大五个问题，再把它们转成具体的建设任务，以知识点为主键建成了包含知识图谱、问题图谱、能力图谱、思政图谱、易错点图谱、分层题库、学习路径和实践项目的课程体系，并导入在线课程平台。三个学期的检验结果是：控制学生构成后，实验组平均分高 5.39 到 6.14 分，都在 0.005 水平上显著，及格率高 10 至 13 个百分点，80 分及以上比例接近翻倍；提升主要发生在中位数和中上分段。

有两点体会。第一，课程建设的内容怎么定，最好交给数据。以学情数据决定先做什么、以知识点为主键决定怎么组织，建设成果才不会和课堂两张皮。第二，这套东西可以推广，但要讲条件：图谱和题库一次建成后能反复用，使用班级越多人均投入越低，组织方式也能移植到高等数学、概率论与数理统计等同类基础课；前提是统一命题与统一阅卷，按本校教材和大纲重建图谱，题库持续更新，并让图谱真正进入备课和命题环节。下一步准备补上入学成绩作为协变量，并采集平台学习行为数据，同时把补强环节前移，重点解决最低分段的学生。

基金项目

1) 2025 年新疆大学教育教学改革研究项目“智能时代知识图谱赋能《线性代数》深度教学的策略与实践研究”(XJU-2025JG14)。

2) “天山英才”培养计划教育教学名师项目。

参考文献

[1] 余跃玉, 唐海军. 《线性代数》的教学反思与实践探索[J]. 四川文理学院学报, 2023, 33(5): 75-80.

[2] 崔晓梅, 刘丽波. 工科线性代数课程教学现状分析及应对策略研究[J]. 吉林化工学院学报, 2023, 40(2): 5-8.

[3] 胡彬, 王泽文, 张文. 大学数学基础课的课程思政建设策略与实践[J]. 吉林教育, 2023(20): 43-45.

[4] 杨晓梅, 赵建平. 线性代数教学的反思与创新[J]. 教育进展, 2024, 14(6): 424-428.

[5] 教育部关于一流本科课程建设的实施意见[EB/OL]. https://www.gov.cn/gongbao/content/2020/content_5480494.htm, 2019-10-24.

[6] 赵建平, 杨晓梅. 线性代数[M]. 北京: 北京大学出版社, 2025.

[7] Sweller, J. (1988) Cognitive Load during Problem Solving: Effects on Learning. *Cognitive Science*, **12**, 257-285. https://doi.org/10.1207/s15516709cog1202_4

[8] Roediger, H.L. and Karpicke, J.D. (2006) Test-Enhanced Learning: Taking Memory Tests Improves Long-Term Retention. *Psychological Science*, **17**, 249-255. https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.2006.01693.x

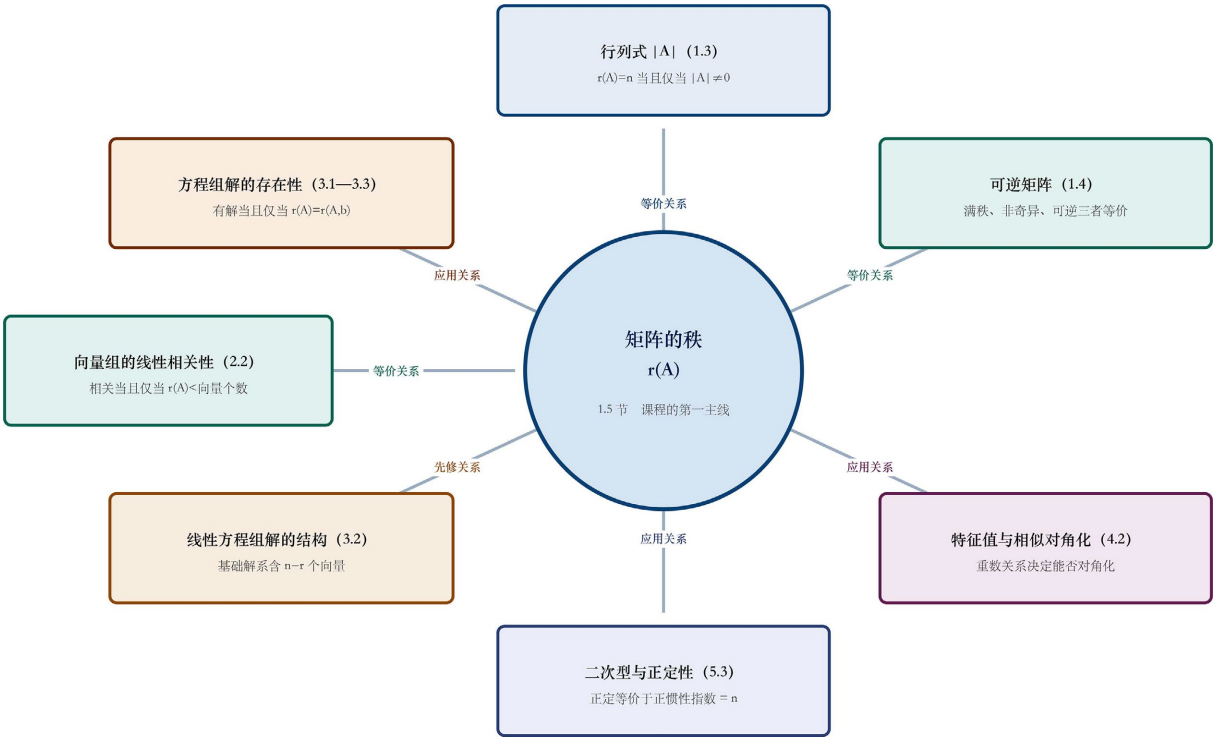
[9] Black, P. and Wiliam, D. (1998) Assessment and Classroom Learning. *Assessment in Education*: *Principles*, *Policy & Practice*,

5, 7-74. https://doi.org/10.1080/0969595980050102.

[10] Ericsson, K.A., Krampe, R.T. and Tesch-Römer, C. (1993) The Role of Deliberate Practice in the Acquisition of Expert Performance. *Psychological Review*, **100**, 363-406. https://doi.org/10.1037/0033-295x.100.3.363.

附录 A. 知识图谱局部结构示例

为便于核查核心建设内容，本附录以“矩阵的秩”这一枢纽节点为例，给出课程图谱在局部范围内的节点、关系类型与关联问题(见图 A1)，并在表 A1 中逐条列出关系说明与对应的驱动问题。



注：节点名称后括号内为教材章节号，连线上的文字标注关系类型(等价、先修、应用)。

Figure A1. A local knowledge-graph structure centred on the “rank of a matrix”
图 A1. 以“矩阵的秩”为中心的局部知识图谱

Table A1. Relation types and linked questions for the nodes in Figure A1
表 A1. 图 A1 中节点之间的关系类型与关联问题

关联节点(章节)	关系类型	关系说明	关联问题
行列式$\|A\|$ (1.3)	等价	$r(A)=n$ 当且仅当$\|A\|\neq 0$	行列式在度量什么？为什么$\|A\|=0$就不可逆？
可逆矩阵(1.4)	等价	满秩、非奇异、可逆三者等价	如何判断一个矩阵能否“做除法”？求逆有哪几条路？
向量组的线性相关性(2.2)	等价	列向量组线性相关，当且仅当秩小于向量个数	什么叫做真正意义上的独立？如何用秩判定？
线性方程组解的存在性(3.1~3.3)	应用	$Ax=b$ 有解，当且仅当$r(A)=r(A,b)$	方程组有没有解、有多少解？
线性方程组解的结构(3.2)	先修	基础解系含 $n-r$ 个向量，秩决定自由未知量的个数	基础解系为什么恰好有$n-r$个向量？

续表

特征值与相似对角化(4.2)	应用	几何重数不超过代数重数，重数关系决定能否对角化	什么时候矩阵不能对角化？
二次型与正定性(5.3)	应用	正定等价于正惯性指数等于 n，秩给出判别入口	正定性与最优化中的“最优”有什么关系？

附录 B. 分层题库题目示例

下面给出两道分层题库中的题目示例，每题均标注对应的知识点编号、难度等级与能力目标。

示例 1. 选择题(概念辨析)

对应知识点：K2.2.01 线性相关与线性无关

难度等级：基础

能力目标：概念辨析能力

题干：设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为三维向量组，若 $\alpha_1=2\alpha_2$，则下列结论正确的是(　)。

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 一定线性相关；　　B. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 一定线性无关；

C. α_2,α_3 一定线性无关；　　D. 当且仅当 $\alpha_3=0$ 时线性相关

参考答案：选 A。显然有：$1\alpha_1+(-2)\alpha_2+0\alpha_3=0$，故向量组线性相关。

示例 2. 综合证明与计算题

对应知识点：K1.5.02 矩阵的秩；K4.1.04 特征值的性质；K4.2.03 可对角化的充要条件

难度等级：较难

能力目标：综合推理与逻辑表达能力

题干：设 A 为 n 阶矩阵，满足 $A^2=A$，且 $r(A)=r(0<r<n)$。

(1) 求 A 的全部特征值；(2) 证明 A 可以对角化，并写出与 A 相似的对角矩阵；(3) 求行列式 $|3E-A|$。

参考答案：(1) 设矩阵 A 的特征值为 λ，由 $A^2=A$ 得 $\lambda^2=\lambda$，故特征值只能取 0 或 1；

(2) 设特征值 1 的特征子空间维数为 m。由 $A(E-A)=O$ 得 $r(A)+r(E-A)\le n$，又 $r(A)=r$，故 $r(E-A)\le n-r$，于是 $m=n-r(E-A)\ge r$；而特征值 0 的特征子空间维数为 $n-r$，两个特征子空间之和不超过 n，即 $m+(n-r)\le n$，故 $m=r$，从而 $m+(n-r)=n$，A 存在 n 个线性无关的特征向量，可以对角化，且 A 相似于 $\mathrm{diag}\left(\underbrace{1,\cdots,1}_{r},\underbrace{0,\cdots,0}_{n-r}\right)$；

(3) 由特征值的性质得：$|3E-A|=2^r3^{(n-r)}$。