

基于图论的高中数学全概率公式教学探讨

王军威, 袁希颖, 李春阳

广东外语外贸大学数学与统计学院, 广东 广州

收稿日期: 2025年10月18日; 录用日期: 2025年11月18日; 发布日期: 2025年11月25日

摘 要

在高中数学中, 概率不仅是学生需要掌握的基础知识, 更是培养其随机思维的关键载体。全概率公式作为概率的核心公式, 为复杂事件概率的计算提供了严谨的逻辑框架, 已成为近年高考的热门考点。本文首先系统梳理全概率公式“样本空间建模→分割构造→公式推导”的逻辑链, 帮助学生理解公式的理论基础; 其次, 提出有向图模型, 并结合高考真题与教学案例, 从图论视角探索公式教学设计的新思路。

关键词

高中数学, 高考, 全概率公式, 图论

Discussion on the Teaching of the Total Probability Formula in High School Mathematics Based on Graph Theory

Junwei Wang, Xiying Yuan, Chunyang Li

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong

Received: October 18, 2025; accepted: November 18, 2025; published: November 25, 2025

Abstract

In high school mathematics, probability is not only a fundamental knowledge that students need to master, but also a key carrier for cultivating their random thinking. As a core formula in probability, the total probability formula provides a rigorous logical framework for calculating the probability of complex events. It has become a popular examination point in recent years' college entrance examinations. This paper first systematically sorts out the logical chain of the total probability formula, namely "modeling of sample space → construction of partition → derivation of formula", to help students understand the theoretical basis of the formula. Secondly, we propose a directed graph model

and, in combination with true questions from college entrance examinations and teaching cases, explore new ideas for formula teaching design from the perspective of graph theory.

Keywords

High School Mathematics, College Entrance Examination, Total Probability Formula, Graph Theory

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

概率论是研究随机现象的核心数学分支，已成为支撑现代科技发展的重要理论基石，其应用场景深度覆盖统计学、人工智能、金融市场、保险精算等多个领域。在高中数学中，概率部分既是解决生活中随机问题的有效工具，也是高考数学的必考内容。通过与排列组合、统计等结合，概率教学能够增强学生对数学工具的整体认知，通过将抽象概念转化为对抽奖、疫情传播、风险评估等现实情境的数学模型，有效承载数学核心素养的培育目标，体现高中数学的育人价值。

在高中概率部分，全概率公式是计算复杂概率的核心公式，在教学中具有承上启下的关键作用：“承上”是条件概率和乘法公式的综合应用，“启下”是后续学习贝叶斯公式的必要铺垫。全概率公式通过对复杂事件发生概率的分解，提供了一种有效的概率计算方法。新课标明确要求“结合古典概型，会用全概率公式计算概率”[1]。因此在近年高考中，全概率公式作为高频考点，常与互斥事件、条件概率结合，并以古典概型为载体出现在多选题或大题的某一设问中，重点考查学生对样本空间及其分割的理解、条件概率的计算能力以及公式适用条件的判断[2][3]。

然而，当前高中全概率公式教学面临着一些困境。在教学实践中，学生对公式概念理解流于表面，虽能机械套用却未能领悟其本质，难以将条件概率的已有认知与全概率公式形成有机联结。这些困境的根源在于教学过程中未重视样本点、样本空间及其分割等基本概念的教学，使学生缺乏分析概率问题的基本思维框架，最终导致学习停留在公式套用层面而难以实现深度理解。

针对上述问题，本文从“样本空间建模→分割构造→公式推导”的逻辑链出发，系统梳理全概率公式的理论基础；结合教材中实例的现实场景，给出每个例题的样本空间及其分割的规范表示，这有利于培养学生的数学抽象、逻辑推理、数学建模等核心素养，引导学生从现实问题过渡到抽象公式的深刻理解与掌握。基于图论知识，我们提出全概率公式的有向图模型，把公式的计算流程与有向路径对应起来，这种具象化呈现的方式能帮助学生更直观地看到不同有向路径对目标事件概率的贡献。相比于传统教学，该有向图模型大大降低了全概率公式理解的难度，有助于学生更清晰、准确、灵活地使用全概率公式解决概率计算问题。

本文提出的全概率公式有向图模型也符合心理学家 Allan Paivio 提出的双重编码理论(dual-coding theory)。该理论表明，人类大脑有两个截然不同但又相互关联的信息处理系统：一个用于言语，另一个用于非言语的对象。这两种系统可以同时或者分别工作，而且输入到一个系统中的信息，也可以被另一个系统所存储并处理[4][5]。双重编码理论强调：同时以视觉形式和言语形式呈现信息能够增强记忆和识别。全概率公式的数学符号语言属于语言编码，而本文提到的图论方法则是通过可视化的有向图将其进行非语言编码。这种非语言编码的方式可以帮助学生直观感受到全概率公式的视觉场景。通过数学符合公式

和有向图可视化两种编码方式的结合让学生在头脑中形成全概率公式的双重痕迹, 这样既避免了学生机械的套公式计算, 也大大提升知识点的提取效率, 降低抽象认知的难度。

2. 全概率公式的理论基础

对于全概率公式, 人民教育出版社 2020 年 A 版普通高中教科书数学选择性必修第三册[6]叙述如下:

全概率公式(total probability formula): 一般地, 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是一组两两互斥的事件,

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$, 且 $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 则对任意的事件 $B \subseteq \Omega$, 有 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$ 。

证明: 因为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥且 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$, 则

$$P(B) = P(B\Omega) = P(B(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)) = P(BA_1 \cup BA_2 \cup \dots \cup BA_n),$$

由于 $BA_1, BA_2, \dots, BA_n$ 也为两两互斥的事件, 利用概率的有限可加性和乘法公式, 可得

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(BA_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)。$$

这里指出: 全概率公式的具体证明过程可根据学生实际情况开展。然而, 在课堂教学中, 我们发现: 学生对样本空间的分割这一概念理解不深入, 在具体题目中不能准确给出相应的分割, 从而导致不能正确使用全概率论公式。接下来, 我们将从分割的定义[7]与具体例子出发帮助学生深化对分割的理解。

样本空间的分割(a partition of the sample space): 设 Ω 为随机试验 E 的样本空间, $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是一组事件, 若(i) $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$; (ii) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$, 则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个分割。

对于教材中引例“摸球模型”[6], 我们给出相应的样本空间及其分割。这里采用教材中的记号, 用 R_i 表示事件“第 i 次摸到红球”, B_i 表示事件“第 i 次摸到蓝球”, $i = 1, 2$ 。此外, 我们用 $\omega_1, \dots, \omega_a$ 表示 a 个红球, 我们用 $\omega_{a+1}, \dots, \omega_{a+b}$ 表示 b 个蓝球。则该不放回两次摸球模型的样本空间表示为

$\Omega = \{\omega_j \omega_k | 1 \leq j, k \leq a+b, j \neq k\}$, Ω 中含有 $(a+b)(a+b-1)$ 个样本点, 其中每个样本点 $\omega_j \omega_k$ 表示“第 1 次摸到球 ω_j 和第 2 次摸到球 ω_k ”。根据第 1 次可能的摸球结果, 可找到 Ω 的一个分割

$R_1 = \{\omega_j \omega_k | 1 \leq j \leq a, j \neq k\}$, $B_1 = \{\omega_j \omega_k | a+1 \leq j \leq a+b, j \neq k\}$, 且 $R_1 \cap B_1 = \emptyset$, $R_1 \cup B_1 = \Omega$ 。显然, R_2 可将其表示为 $R_2 = \{\omega_j \omega_k | 1 \leq k \leq a, j \neq k\}$, 通过进一步计算得出 $R_2 = R_2 \cap \Omega = R_2 \cap (R_1 \cup B_1) = R_1 R_2 \cup B_1 R_2$ 。此时, 直接利用全概率公式得

$$P(R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1) + P(B_1)P(R_2|B_1) = \frac{a}{a+b} \times \frac{a-1}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \times \frac{a}{a+b-1} = \frac{a}{a+b}。$$

教师在此讲解过程中, 通过规范的样本空间和分割表示, 引导学生从具体样本点出发理解事件关系。这种教学思路能帮助学生实现从具体到抽象的思维提升, 进一步深化对样本空间和分割概念的理解。在讲解后, 教师进而提出启发性问题: “对于这个摸球模型, 同学们还能找到样本空间的其它分割吗?” 通过小组讨论, 引导学生找到其它的分割, 比如 R_2 和 $B_2 = \{\omega_j \omega_k | a+1 \leq k \leq a+b, j \neq k\}$ 也是 Ω 的一个分割, 这是因为 $R_2 \cap B_2 = \emptyset$, $R_2 \cup B_2 = \Omega$ 。另外, $(a+b)(a+b-1)$ 个基本事件 $\{\omega_j \omega_k\} (1 \leq j, k \leq a+b, j \neq k)$ 也构成 Ω 的一个分割。

我们顺便指出: 教材中例 4 “餐厅选择模型”[6]的样本空间及其分割是模糊的, 学生通常不理解具体的样本点如何表达。其实, 若记 A_i 表示事件“第 i 天去 A 餐厅用餐”, B_i 表示事件“第 i 天去 B 餐厅用餐”, $i = 1, 2$, 则该随机试验的样本空间为 $\Omega = \{AA, AB, BA, BB\}$, 其中每个样本点比如 AA 表示“第 1 天去 A 餐厅用餐和第 2 天去 A 餐厅用餐”, 其他类推。相应地可给出 Ω 的一个分割: A_1 和 B_1 , 这里

$A_1 = \{AA, AB\}$, $B_1 = \{BA, BB\}$ 。当然, 教师要及时指出本例的样本空间 Ω 虽含有限个样本点, 但其样本点的出现不是等可能, 因此不能简单套用古典概率计算, 要按照题目给出的条件用全概率公式进行计算。

3. 基于图论的全概率公式教学设计

学生在学习全概率公式之前, 已对事件、样本空间、条件概率等知识初步认识, 但还未系统掌握对抽象的概率进行分解与合成。在传统的全概率教学中, 学生往往并未完全理解全概率公式的动态关联, 而是通过机械地记忆去使用公式, 这使得学生并不能真正掌握对全概率公式的使用。为解决此教学困境, 本文的全概率教学设计将从图论角度为学生提供事件关系的空间化表征, 从而引导学生将抽象的公式逻辑转化为具象的路径分析, 促进学生对全概率公式的深度理解。同时, 通过典型例题的渐进式讲解逐步把图论思想融入全概率教学, 引导学生掌握图论的有向图分析方法。

首先是对图论的理解。图论主要研究图的性质和结构, 其中的图是由节点和边所构成的图形, 这种图形常用来建模复杂系统之间的关系。全概率公式作为计算复杂事件概率的一个公式, 适合用图论来给出新解释。在课堂教学中, 我们通过简单的有向图作为示例, 介绍图论的一些基本知识(如节点、边、权重等), 重点讲解有向路径的概念, 让学生理解有向路径就是从一个起始节点沿着连续有向边指向目标节点的线路。

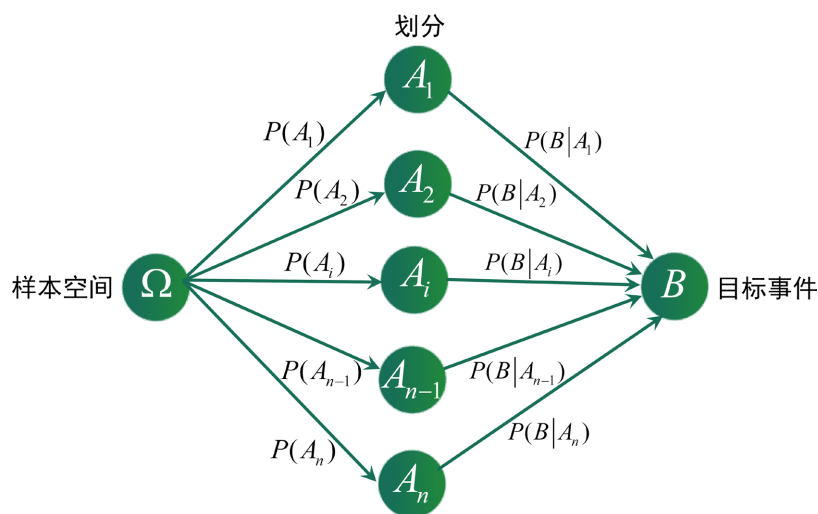


Figure 1. The directed graph representation of the total probability formula

图 1. 全概率公式的有向图表示

根据全概率公式的形式, 我们将其计算概率的过程建模为一个有向图 G (如图 1 所示): G 含 $n+2$ 个节点, 它们表示相关的随机事件(包括样本空间 Ω , $A_1, A_2, \dots, A_n$, 以及目标事件 B); 含 $2n$ 条有向边, 它们表示随机事件之间的关系。把概率 $P(A_i)$ 标记为有向边 $\Omega \rightarrow A_i$ 的权重, 把条件概率 $P(B|A_i)$ 标记为有向边 $A_i \rightarrow B$ 的权重。根据概率的乘法公式, 先沿着有向路径各阶段概率相乘, 即 $P(A_i)P(B|A_i)$; 然后根据概率的加法公式, 不同有向路径到达同一目标事件 B 的概率相加, 即得到最终目标事件的概率 $P(B)$, 具体计算流程详见表 1。

由此可见, 与传统教学中对公式的机械记忆与直接套用不同: 图论教学方法是通过可视化的有向图将全概率公式的推导过程转变为使学生能够直观体会概率的流动与合成过程。

为加深学生对如上流程的理解, 教师可选取教材中的练习作为例题, 引导学生自主探究按如上流程完成。接下来, 我们以 2024 年一道上海高考真题详细展示全概率公式的图论建模及问题解决过程。

Table 1. Calculation process of the total probability formula based on graph theory
表 1. 基于图论的全概率公式计算流程

步骤	计算内容
第一步	写出随机试验的样本点和样本空间
第二步	精准给出样本空间的分割，绘出对应的有向图
第三步	根据乘法公式，计算每条有向路径的概率
第四步	根据全概率公式，将每条有向路径的概率求和得到目标事件的概率

例(2024 上海高考真题)某校举办科学竞技比赛，有 A_1 、 A_2 、 A_3 三种题库， A_1 题库有 5000 道题， A_2 题库有 4000 道题， A_3 题库有 3000 道题。小申已完成所有题，他 A_1 题库的正确率是 0.92， A_2 题库的正确率是 0.86， A_3 题库的正确率是 0.72。现他从所有的题中随机选一题，正确率是多少？

解析：根据题意，这里的正确率指小申做题目正确的概率。如果加上“题库 A_1 、 A_2 、 A_3 中的题目互不重复”，该题的叙述就更严谨了。该随机试验的样本点就是 A_1 、 A_2 、 A_3 三种题库中的题目，若记 ω_j^i 表示题库 A_i 中的第 j 道题目，则 $A_1 = \{\omega_1^1, \omega_2^1, \dots, \omega_{5000}^1\}$ ， $A_2 = \{\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_{4000}^2\}$ ， $A_3 = \{\omega_1^3, \omega_2^3, \dots, \omega_{3000}^3\}$ 。于是，样本空间 $\Omega = \{\omega_1^1, \omega_2^1, \dots, \omega_{5000}^1, \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_{4000}^2, \omega_1^3, \omega_2^3, \dots, \omega_{3000}^3\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 。这说明 Ω 中共有 12000 个样本点， A_1 、 A_2 、 A_3 是 Ω 的一个分割。这就完成了表 1 中计算流程的第一、二步。

此外，根据小申在每个题库中的正确率，我们不妨假设题库 A_1 中前 92% 题目是小申能做正确的题目(即 $\omega_1^1, \omega_2^1, \dots, \omega_{4600}^1$)，题库 A_2 中前 86% 题目是小申能做正确的题目(即 $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_{3440}^2$)，题库 A_3 中前 72% 题目是小申能做正确的题目(即 $\omega_1^3, \omega_2^3, \dots, \omega_{2160}^3$)。于是目标事件 $B =$ “任选一题且能做正确”的样本点表示为 $B = \{\omega_1^1, \omega_2^1, \dots, \omega_{4600}^1, \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_{3440}^2, \omega_1^3, \omega_2^3, \dots, \omega_{2160}^3\}$ ，其共含有 10200 个样本点。从而，可以绘出该题的有向图表示，如图 1 所示(此时取 $n = 3$)。

下面进行表 1 的第三步，计算每一条路径的概率。由于 $P(A_1) = \frac{5000}{12000} = \frac{5}{12}$ ， $P(A_2) = \frac{4000}{12000} = \frac{4}{12}$ ， $P(A_3) = \frac{3000}{12000} = \frac{3}{12}$ ， $P(B|A_1) = 0.92$ ， $P(B|A_2) = 0.86$ ， $P(B|A_3) = 0.72$ ，则三条有向路径的概率可分别计算： $P(A_1) \times P(B|A_1)$ ， $P(A_2) \times P(B|A_2)$ 和 $P(A_3) \times P(B|A_3)$ 。到表 1 的第四步，根据全概率公式，目标事件的概率为三条有向路径的概率之和，即

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i) = \frac{5}{12} \times 0.92 + \frac{4}{12} \times 0.86 + \frac{3}{12} \times 0.72 = \frac{17}{20}.$$

在此类例题中，传统解法中更侧重于直接代入公式计算，虽然使用起来看似很简洁但未体现随机事件分解的思维逻辑过程。而本文采用的图论教学方法则通过有向图直观展示了从选题库到题目正确的两阶段过程，使学生清晰看到每一路径对目标事件概率的贡献。通过对这种路径分析思维的学习，学生可将知识迁移至与此例题类似的具有多阶段、多来源的概率求解问题，例如常见的产品质量检测、疾病诊断等场景，帮助学生实现从解一题到会一类题的教学目标。

4. 全概率公式的传统树状图模型与有向图模型比较

传统的全概率公式以树状图为可视化工具，其核心是通过层级分支实现的。为体现本文以有向图呈现全概率公式的独特价值，现从认知负荷、概念迁移、思维能力培养等三个方面对两者进行比较。

在认知负荷方面，利用树状图解决全概率公式的问题时，如果出现分割事件过多会导致分支过多，信息过载的问题。而有向图以节点、边以及有向路径为核心，所有分割事件节点与目标事件节点的分布

不需要按层级排列, 学生不需要处理冗余的分支, 可以快速聚焦, 认知负荷大大下降。

在概念迁移方面, 树状图虽然可以迁移至分步计数原理, 但无法迁移至后续的贝叶斯公式, 即逆向路径, 导致学生需要重新记忆公式。而有向图很好的解决了这个问题, 只需要将边的方向进行翻转便可以得到逆向路径时的概率, 无缝衔接了贝叶斯公式。同时有向图还可以迁移至其它学科, 例如生物学中的概率遗传图等, 达到跨学科学习的效果。

在思维能力培养方面, 树状图主要锻炼学习者的分类归纳与结构化思维能力; 而有向图则有助于培养系统性思考、发现事物间关联以及拓展思维广度的能力。作为系统性思维的重要工具, 有向图要求使用者不仅要识别各个独立要素, 更要理解这些要素之间如何通过相互作用形成复杂的反馈机制。

5. 结论

针对当前高中数学全概率公式教学中存在的问题, 本文从随机试验的样本空间和分割出发系统梳理了全概率公式的理论基础, 并给出了教材例题中样本空间及其分割的严格数学表达, 这有利于引导教师在课堂中重视基本概念的教学, 加深学生对公式内涵的理解, 避免仅停留在死记硬背公式的层面。受图论启发, 我们提出了全概率公式的有向图表示, 为学生构建直观、可视化的理解模型, 从而提高课堂教学效果。图论方法适用于具有明确阶段划分、多条件路径的全概率问题, 例如常见的摸球问题、题库抽题、多路径决策等。但本教学方法也存在一些需要注意的地方, 比如部分学生可能对图论的基本概念理解较慢, 导致在构建有向图时出现困难。这时, 教师在教学中应引导学生掌握利用图论解决全概率公式的方法, 并在典型例题讲解中反复强化。除此之外, 对于不同基础的学生, 教师可采用渐进式分层渗透教学的策略: 首先, 对于基础薄弱的学生, 教师可以先从简单实例入手, 掌握有向图的基本知识; 其次, 对于能力较强的学生, 教师可尝试复杂情境的建模与路径分析。同时教师也应注重对比传统全概率公式解题法与基于图论的解题法, 让学生在比较中体会图论的直观性与逻辑清晰性。

总之, 将图论思想引入高中数学全概率公式教学是一次有益的尝试, 通过不断优化教学过程和方法, 有望为高中数学教学质量的提升以及学生综合能力的培养发挥积极作用。

基金项目

广东省本科高校教学质量与教学改革工程建设项目“经管类大学数学课程教研室”(2023 年)、“经济统计与数据科学课程教研室”(2024 年)和“数学思维与应用课程教研室”(2022 年), 校级本科课程思政改革示范项目“经管类大学数学课程思政示范团队”(2024 年), 校级教学研究与改革立项建设项目“新文科背景下大学数学课程群数智化改革与实践”(2024 年)。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 周小兴, 朱丽华. 活用全概率公式破解概率计算题——以 2023 年高考概率考题为例[J]. 数理化解题研究, 2024(22): 73-75.
- [3] 江中勤. 条件概率与全概率公式整体教学案例[J]. 中学数学, 2025(7): 31-33.
- [4] Clark, J.M. and Paivio, A. (1991) Dual Coding Theory and Education. *Educational Psychology Review*, 3, 149-210. <https://doi.org/10.1007/bf01320076>
- [5] 陈霞, 朱秀梅, 唐剑岚. 优化数学课件设计的基本原则——基于双重编码理论[J]. 内蒙古师范大学学报(教育科学版), 2010, 23(8): 86-91.
- [6] 人民教育出版社课程教材研究所. 普通高中教科书 A 版·数学(选择性必修第三册) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [7] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. 概率论与数理统计教程[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.