Advances in Education 教育进展, 2025, 15(12), 268-274
Published Online December 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2025.15122275

Hans汉斯

高等数学的概念边缘化与认知重构路径

魏 薇

上海工程技术大学数理与统计学院，上海

收稿日期：2025年10月29日；录用日期：2025年11月27日；发布日期：2025年12月5日

摘 要

高等数学作为高等教育核心公共课，对学生的知识建构和思维培养至关重要。然而，观察发现该课程中存在着明显的概念边缘化现象，学生普遍重技巧轻概念，学习效果不佳。本文基于教学实践，从学生认知偏差、教师教学失衡、评价体系导向偏差三个维度剖析概念边缘化的成因，及其在知识结构断裂、思维能力表层化等方面的危害，并结合APOS理论和概念的双重性，提出情景化引入、结构化分析、强化例题示范性、构建知识体系及改革评价方式的重构路径，为改善高等数学教学提供新视角，帮助学生实现从“会做题”到“懂数学”的转变，推动高等数学教育回归思维培养的本质。

关键词

高等数学，概念教学，操作性和结构性，APOS理论，重构路径

Conceptual Marginalization and Paths of Cognitive Reconstruction in Advanced Mathematics

Wei Wei

School of Mathematics, Physics & Statistics, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai

Received: October 29, 2025; accepted: November 27, 2025; published: December 5, 2025

Abstract

Advanced Mathematics, as a core public course in higher education, is crucial for students’ knowledge construction and thinking development. However, observations show that there is a prominent phenomenon of conceptual marginalization in this course: students generally prioritize skills over concepts, leading to unsatisfactory learning outcomes. Based on teaching practice, this paper analyzes the causes of conceptual marginalization from three dimensions—students’ cognitive biases,

文章引用: 魏薇. 高等数学的概念边缘化与认知重构路径[J]. 教育进展, 2025, 15(12): 268-274.
DOI: 10.12677/ae.2025.15122275

teachers' unbalanced teaching behaviors, and the guiding deviations of the evaluation system—as well as its harms such as the fragmentation of knowledge structure and the superficialization of thinking abilities. Combining the APOS Theory and the duality of concepts, the paper proposes reconstruction paths including contextualized introduction, structural analysis, strengthening the demonstration of example problems, knowledge system construction, and reforming evaluation methods. These paths provide a new perspective for improving Advanced Mathematics teaching, help students achieve the transformation from "being able to solve problems" to "understanding mathematics", and promote the return of Advanced Mathematics education to the essence of thinking cultivation.

Keywords

Advanced Mathematics, Conceptual Instruction, Operability and Conception, APOS Theory, Reconstruction Paths

1. 引言

高等数学作为高等教育阶段众多专业的核心公共课，其重要性不言而喻。它不仅是学生学习后续课程的知识基础，在激发逻辑推理能力、抽象思维能力和解决问题的应用能力等方面也发挥着十分重要的作用。因而，高等数学的教学质量及学习效果与学生专业素养的提升和学术潜力的挖掘密切相关。

然而，在高等数学的教学实践中，尽管教学改革在不断推进，教学方法也持续创新，但不少学生对该课程仍有畏难情绪，学习效果也不太理想。在长期的教学观察中，我们发现了一个尤为突出的现象：学生常常忽视高等数学中基本概念的学习。多数学生将学习重心过度放在计算方法和证明技巧上，认为“会做题就是学好了高数”，对许多定义的内涵缺乏深入理解。他们常常一拿到题就动手做，实际上根本没有解题思路，甚至连题意都看不懂。

例如，在一次期末答疑中，有位同学表示选项中的极限他都会算，但他不知道哪个极限是收敛的。如果将题目由“下列数列中收敛的是”改为“下列数列中极限存在的是”，他立刻就知道该如何解答了。这正是由于他忘记了收敛的概念，也没有意识到自己的问题在于概念不清。这种“重技巧、轻概念”的认知偏差成为学生在高数学习中陷入困境的深层原因之一。

关于概念教学的研究由来已久。教育心理学中，加涅[1] [2]将概念分为具体概念和定义性概念。他认为具体概念可以通过人的行为表现出来，是可观察的概念，可通过与学习者所处环境的直接相互作用而习得；定义性概念则是抽象的，是将物体或事件加以归类的规则，必须通过使用语言习得。加涅提出，辨别是概念学习的先决条件，概念学习的实质是通过“辨别－概括化－无关方面的变化”三个阶段来完成的。

奥苏贝尔[3] [4]认为概念学习主要有概念形成和概念同化两种方式。其中，概念形成多见于学前儿童，他们通过对大量具体实例的观察、比较和归纳，抽象出概念的本质特征来习得新的概念；年龄较大的儿童和成人习得概念的主要方式是概念同化，即利用已有的知识结构(旧概念)，通过理解新概念与旧概念的逻辑关系来学习新概念。

曹才翰、章建跃[5]将当代认知心理学理论应用于数学教育领域，通过结合数学概念的抽象性、逻辑

关联性等特点，通过补充数学实例和数学教学建议将奥苏贝尔的理论“数学化”。毛京中[6]提出“溯源背景、拆解定义、关联旧知、应用迁移”四步策略，并以导数概念为范例进行演示，为高等数学概念教学的后续研究提供了实践框架。陈惠勇[7]首次将数学史融入高等数学概念教学，构建了“历史溯源－逻辑建构”的教学新模式。他以定积分为例，通过历史脉络让学生理解概念的发展逻辑，丰富了概念教学的情境维度。关于数学概念学习的更多内容，可参见李善良[8]的《数学概念学习研究综述》。

近年来，关于高等数学的探讨多集中于教学方法创新、课程模式改革等层面，部分学者对概念教学的内涵和措施也进行了探讨。李会芳[9]将 APOS 理论与数学核心素养有机融合，针对高等数学概念教学中存在的问题，以数列极限为例给出了数学概念教学的实施过程。李静、寇冰煜[10]以 OBE 理念为指引阐述了高等数学概念课的教学设计思路，从不同维度阐释了无穷级数的概念和性质，并将科赫雪花作为案例来评估学生的学习效果。陈广锋、杨渭清和胡洪萍[11]结合高等教育人才培养需求，从五个方面阐述了关于大学数学概念教学的思考，旨在突破抽象概念的教学难点，培养学生的思维、表达和创新能力，助力高素质人才的培养。

目前，关于高等数学中概念边缘化问题的剖析还不够系统，针对性的教学操作也较为笼统。本文将基于教学实践，围绕高等数学概念边缘化这一核心问题，深入分析其成因与危害，结合教学实践提出基于认知重构的教学策略，为改善高等数学教学提供新视角，帮助学生真正建立起扎实的知识体系，实现从“会做题”到“懂数学”的转变。

2. 概念边缘化的多维原因

高等数学概念边缘化的困境并非单一因素的作用结果，而是学生的学习认知、教师的教学行为与评价体系的设计等方面交织的产物。

1) 学生层面：认知偏差与思维局限

学生对概念的忽视，本质上是学习目标与学习方式的双重偏差。从学习动机上看，多数学生将高等数学视为过关性考试科目，将解题得分作为唯一目标。这种功利化的倾向使他们直接套用公式、复制解题方法，从而陷入了“知其然不知其所以然”的学习误区。

从学习方法上看，高等数学中概念的抽象性与学生的思维发展存在阶段性的矛盾。刚刚步入大学的新生仍习惯用具象思维来理解事物，尚未完成对抽象概念的思维跃迁。Tall [12]指出，学生往往能熟练掌握符号运算，却难以将正式的定义转化为可操作的心理对象。Sfard [13]认为数学概念具有双重性，即操作性(即将数学概念视为动态过程、算法或一系列可操作的步骤)和结构性(即将数学概念视为静态的、独立存在的对象或结构)，其中，数学概念的操作性理解比结构性理解更具先导性。

例如，学生可以快速套用求导公式，精准求解 $y=x^2$、$y=\sin x$ 等函数的导数，却对导数的本质，即“增量之比的极限”这一内涵感到困惑，无法将抽象的极限本质与具体运算建立起联系。这种操作熟练度与概念理解度的倒挂，使学生选择了“跳过理解、直接计算”的逃避式学习策略。

2) 教师层面：教学方法的失衡与概念构建的断裂

教师的教学行为对学生的学习重心有直接引导作用。部分教师在概念教学中存在失衡现象：在课堂上直接抛出定义，不讲述概念产生的历史背景和现实需求，不详细分析概念中每句话的必要性；在例题讲解中只解释如何使用公式解题，却不分析如何从题干中寻找解题线索、如何根据题干中的概念寻找解题思路和解题方法。例如，在讲解拉格朗日中值定理时，如果直接呈现定理内容和证明步骤，而不说明“为何要构建辅助函数”、“如何构建辅助函数”、“导数的局部性质与函数的整体性质是如何连接起来的”，就会导致学生无法理解该定理的深层意义。这种疏忽使学生在高等数学的学习中停滞于操作性理解，无法建立完整的结构性理解，即无法将符号运算内化为核心要义，达到“看见某个术语，就自动将

其转化为相应概念及其内涵”的高度。

3) 评价体系层面：考核机制的导向偏差

考核方式对学生学习的导向作用则更为直接。调查显示，高等数学课程的期末考试仍以计算为主，包括计算题，应用题，以及填空题和选择题中的部分题目，占比高达 70%。概念理解类题目仅出现在少数填空题和选择题，以及证明题中，如“利用定义计算导数”、“理解原函数与不定积分之间的关系”等，占比较低。这种过度侧重计算的评价体系，向学生传递了“概念不重要，会做题就行”的错误信号，使学生的学习重心进一步倾斜。

3. 概念边缘化的危害

概念作为知识体系的基础，其边缘化不仅会影响学生在高等数学课程上的学习效果，还会对他们的长期知识建构和思维发展等产生系统性危害。

1) 知识结构的断裂

高等数学中的概念并非一个个孤立点，而是形成了相互关联的逻辑网络：极限是连续、导数、积分等定义的基础；导数与微分从不同角度描述了函数的局部性质；定积分与不定积分通过牛顿–莱布尼茨公式连接。这些内容共同构成了微积分的核心框架。当学生忽视定义时，他对每个概念的理解都只能停留在“点”的层面，无法形成完整的概念链条和知识网络。

例如，如果对导数的认知只限于斜率，不能掌握其“增量之比极限”的本质，就无法理解“可导必连续，连续不一定可导”的逻辑关系；如果忽视定积分的“连续累积”本质，就会导致后续学习重积分、曲线积分等知识时十分困难；如果不理解连续性是中值定理的前提条件，那么在运用中值定理证明“当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)<x$”这类问题时，无法建立“构造函数–验证连续可导条件–应用定理”的逻辑链条，最终因知识结构断裂而无从下手。

2) 思维能力的表层化和应用能力的弱化

根据概念的双重性[13]，数学概念的形成过程正是从操作性理解向结构性理解的思维训练过程，只有同时掌握这两种特性才能真正理解某一概念。例如，在极限的概念中，既有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的具体操作，也有“$\varepsilon-\delta$ 语言”的严谨表述，从前者到后者的过程中深刻蕴含着从直观到抽象、从模糊到精确的转化。

如果对概念的理解停滞在操作性层面，学生就只会机械记忆结论、模仿解题步骤，无法体会概念形成过程中的核心逻辑：为什么用 $\varepsilon-\delta$ 语言定义极限？$\varepsilon-\delta$ 语言是如何通过数值关系具体刻画无限接近的？也难以在学习过程中培养从特殊到一般的抽象数学思维，如罗尔中值定理是如何一步步拓展至拉格朗日中值定理、柯西中值定理的？如何利用罗尔中值定理构造辅助函数证明拉格朗日中值定理和柯西中值定理？进而在面对新问题时，他们无法利用概念的本质将实际问题转化为数学模型，也无法生成个性化的解题思路。最终，逐渐偏离培养学生应用能力和创新能力的教学目标，还会让学生产生学习高等数学有什么用的迷茫。

4. 高等数学概念教学的重构路径

概念教学的重构应以学生为中心，从概念的形成、概念的剖析、概念体系的构建、概念的应用等路径协同推进。

1) 概念的形成：情景化引入

根据杜宾斯的 APOS 理论[14]，概念教学需要经历“操作(action)-过程(process)-对象(object)-图式(schema)”四个阶段的不断循环，其中“操作”是指学生通过具体的、直观的体验感知概念的存在。学生

对概念的理解开始于对概念存在意义的感知，也是概念双重性中操作性理解的起点。情景化引入是“操作”阶段的关键方法，也是消除概念抽象性的有效手段。例如，在讲解无穷级数时，可以通过格兰迪级数(1−1+1−1+…)的悖论引发认知冲突：为什么这个级数的部分和序列在 0 和 1 间振荡却不可求和？由此引出级数收敛的概念，让学生明白用部分和序列的极限定义级数收敛的必要性。

以定积分的概念为例，在正式介绍定义前，首先通过曲边梯形面积的分割和近似计算，让学生亲自计算不同分割份数下的近似面积，如将$[0,1]$区间 4 等分、8 等分计算 $y=x^2$ 下方的面积，感受“分割越细，近似值越精确”的动态过程，为接下来学习定积分的概念奠定操作层面的认知基础。

2) 概念的剖析：结构化分析

概念的结构化分析是将定义拆解为逻辑模块，分层解读每一部分的内涵与必要性，帮助学生理清概念形成的过程，对应 APOS 理论的“过程”阶段，这也是推动概念双重性从操作性向结构性进行过渡。例如，对于定积分的概念：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，任取 $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$，作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$，并作和 $S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，令 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，若当 $\lambda\to 0$ 时，和 S 总趋于确定的极限 I，则称 I 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$。

从定义中可以看出，定积分是通过“分割－近似－求和－取极限”的过程而得到的一个精确值，其本质是极限；当 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限存在时，才将该极限定义为定积分；在定义中有两个“任意”：区间 $[a,b]$ 的划分是任意的，点 ξ_i 的选取是任意的，也就是说，无论区间 $[a,b]$ 如何划分，也无论选取 $[x_{i-1}, x_i]$ 中的哪一点作为 ξ_i，都不会影响极限 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 的值；最后指出，该定义是有条件的，要求函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，并反问学生为什么要有这个条件？如果没有这个条件会怎么样？进一步深化学生对定积分这一概念的认知。

3) 概念的运用：例题的示范性

例题示范的核心是展示如何从概念出发构建解题思路，对应 APOS 理论中“过程”到“对象”的转化阶段，推动学生将概念的结构性理解内化为解题思维工具，将隐形的数学思维过程显性化，回答“为什么这么想”而非只展示“怎么做”。

例如，利用定积分的定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 时，先将区间 $[0,1]$ 进行 n 等分，分点为 $x_i=\frac{i}{n}(i=1,\cdots,n)$。那么每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度都为 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，方便后续计算。另外，既然点 ξ_i 的选取也是任意的，同样为了方便计算就取 $\xi_i=x_i\,(i=1,\cdots,n)$。故，

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^2\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{6n^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}。
\end{aligned}
$$

再比如，在多元函数中介绍可微和连续的关系时，有如下定理：

函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微，则函数在该点连续。

要证明：

函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微⇒函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，

首先可以根据可微和连续的**定义**将问题转化为证明：

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\Rightarrow\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)\text{。}$$

然后寻找这两个式子之间的**联系**，即增量。由增量的**定义**可得：

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\text{。}$$

因而问题又转化为证明：

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\Rightarrow\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)\text{。}$$

再次寻找这两个式子之间的**联系**：

均出现了 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)$。

对 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$ 移项，从而推出：

证明 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\left(f(x,y)+A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\right)=f(x,y)$ 即可，

即，$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\left(A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\right)=0$。

显然，$\Delta x\to0,\ \Delta y\to0$ 时 $A\Delta x$ 和 $B\Delta y$ 的极限均为 0。由高阶无穷小的**定义**可得，$o(\rho)$ 也是一个无穷小量。最后，按照上述思路进行整理，就完成了多元函数中可微必连续的证明。整个过程通过反复运用核心概念，不断在已知条件和待证结论中寻找关联，进而寻找证明思路，直到最终搭建起完整的逻辑推理链条。

4) 概念体系的构建：思维导图与知识图谱

思维导图与知识图谱的构建对应于 APOS 理论的“对象”阶段(将概念视为独立认知对象)和“图式”阶段(形成概念网络)，是概念双重性中结构性理解的最终固化形式。思维导图从核心概念出发，以树状层级的形式拆解要素(如几何意义、性质、计算、应用等)，突出知识结构的清晰性；知识图谱则将每个概念作为节点，通过网状连接展示概念间的逻辑关系，明确“为什么有关联”、“如何关联”，帮助学生突破知识碎片化的局限，构建系统的网状知识结构。

上海交通大学[15]在《高等数学》课程中采用了“初建－优化－拓展”三阶段思维导图训练，通过 AI 比对学生三次导图的结构复杂度、知识点覆盖率和逻辑连贯性生成个性化改进建议，使思维导图从作业工具升级为元认知训练载体，实现了知识图谱在学习层面的高阶应用。

例如，定积分的思维导图和知识图谱可按如下方式进行构建：

定积分→本质(极限过程)，

条件(有界、可积)，

意义(几何：曲边梯形面积：变速路程)，

计算(牛顿－莱布尼茨公式)；

极限→定积分(定积分是特殊和的极限)，

导数→定积分(牛顿－莱布尼茨公式建立逆运算关系)，

定积分→重积分(多维空间的推广)。

以此推动学生将定积分纳入微积分知识体系，理解其在整体框架中的定位。

5) 评价方式改革：让概念被重视”

考核方式对学生的学习有着重要导向作用。因而，要在多元评价体系中强化对概念理解的考查，全面检验学生对概念的结构性理解和操作性转化能力。例如，在过程性评价中引入概念辨析作业(如讨论无界函数是否可积)，在终结性评价中增加概念理解类试题的比重或设计开放性问题(如用定积分定义解释牛顿－莱布尼茨公式)，让学生从为解题而学回归为理解而学。

高等数学概念边缘化的困境是知识传授与思维培养的失衡，概念教学的重构则需要学生、教师与教学体系的协同变革。高等数学教育的终极目标，不仅是让学生掌握知识，更是让他们学会“用数学的眼光观察世界，用数学的思维分析问题”。让教学回归概念正是实现这一目标的关键一步。

基金项目

本文受上海高校青年教师资助培养计划项目和上海工程技术大学 2025 年度“课程专属智能体创建与应用”课程建设项目(项目编号：i202521006)资助。

参考文献

[1] Gagné, R.M. (1977) The Conditions of Learning. 3rd Edition, Holt, Rinehart and Winston.

[2] Gagné, R.M. 学习的条件和教学论[M]. 皮连生, 等, 译. 上海: 华东师范大学出版社, 1999.

[3] Ausubel, D.P., Novak, J.D. and Hanesian, H. (1978) Educational Psychology: A Cognitive View. Holt, Rinehart and Winston.

[4] Ausubel, D.P. (1963) The Psychology of Meaningful Verbal Learning. Grune & Stratton.

[5] 曹才翰, 章建跃. 数学教育心理学[M]. 第 2 版. 北京: 北京师范大学出版社, 2006.

[6] 毛京中. 高等数学概念教学的一些思考[J]. 数学教育学报, 2003, 12(2): 84-86.

[7] 陈惠勇. 数学史观下的数学概念教学新模式[J]. 高等数学研究, 2007, 10(5): 101-103.

[8] 李善良. 数学概念学习研究综述[J]. 数学教育学报, 2001, 10(3): 17-22.

[9] 李会芳. 核心素养视域下基于 APOS 理论的高等数学概念教学探究[J]. 教育观察, 2024, 13(13): 62-65.

[10] 李静, 寇冰煜. 基于 OBE 理念的高等数学概念课教学设计[J]. 高等数学研究, 2025, 28(1): 120-122.

[11] 陈广锋, 杨渭清, 胡洪萍. 关于大学数学课程中概念教学的思考[J]. 教育进展, 2018, 8(3): 269-272.

[12] Tall, D. (1996) Advanced Mathematical Thinking & The Computer. *Proceedings of the 20th University Mathematics Teaching Conference*, Nottingham, 1996, 1-8. https://www.researchgate.net/publication/228817138_Advanced_Mathematical_Thinking

[13] Sfard, A. (1991) On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, **22**, 1-36. https://doi.org/10.1007/bf00302715

[14] Dubinsky, E. (1991) Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In: Tall, D. Ed., *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, 95-123. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

[15] 顾盼. AI 赋能: 智启《高等数学》, 教学革命进行时...... [EB/OL]. https://www.math.sjtu.edu.cn/Default/newsshow/tag/MDAwMDAwMDAwMLGectuGtKF2, 2025-05-27.