

破解“消元困境”——转化思想在初中代数教学中的形成培养研究

平姗姗, 王占琳

昌吉学院数学与数据科学学院, 新疆 昌吉

收稿日期: 2025年10月26日; 录用日期: 2025年11月25日; 发布日期: 2025年12月2日

摘要

基于新课程标准对数学思想方法的培养要求, 探赜转化思想在代入消元法教学过程中的应用价值和实践路径。分析转化思想以“化繁为简”的核心内涵, 揭示二元一次方程组教学中的关键作用, 就是将复杂问题转化为熟知的一元方程求解过程。并结合建构主义理论和数学认知理论, 采用以学生为主体的教学设计, 利用问题引导和活动探究, 来理解消元原理, 掌握转化方法。

关键词

代入消元法, 转化思想, 教学设计, 问题解决

Breaking the “Elimination Dilemma”: Research on the Formation and Cultivation of Transformational Thinking in Junior High School Algebra Teaching

Shanshan Ping, Zhanlin Wang

College of Mathematics and Data Science, Changji University, Changji Xinjiang

Received: October 26, 2025; accepted: November 25, 2025; published: December 2, 2025

Abstract

Based on the requirements of the new curriculum standards for the cultivation of mathematical thinking and methods, this paper explores the application value and practical paths of the transformation

idea in the teaching process of the substitution elimination method. It analyzes the core connotation of the transformation idea, which is “simplifying the complex”, and reveals its key role in the teaching of systems of linear equations in two variables, that is, transforming complex problems into the familiar process of solving one-variable equations. Combined with constructivist theory and mathematical cognitive theory, a student-centered teaching design is adopted, using problem guidance and activity exploration to understand the principle of elimination and master the transformation method.

Keywords

Substitution Elimination Method, Transformation Idea, Teaching Design, Problem Solving

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

新课程标准明确指出, 数学教学要注重数学思想方法的渗透, 培育学生的数学核心素养。转化思想作为数学中最基础、最重要的思想方法之一, 贯穿在数学学习的整个过程[1], 是连接着数学理论与实际应用的关键纽带, 更是培养学生逻辑思维和问题解决能力的重要载体。代入消元法作为解方程组的核心思想方法, 背后蕴藏的转化思想正和新课程标准对数学思想方法培养的要求高度契合, 因此本文深入研究代入消元法教学设计中转化思想的应用。

2. 转化思想与代入消元法概述

“化繁为简、未知变已知”的逻辑策略, 对数学学习起到承上启下的作用, 不仅可以加深对已有知识的理解, 而且可以增强思维的综合性、立体性[2], 为高中函数、解析几何等知识的学习奠定基础。通过具体形象思维转化为抽象逻辑思维, 从现实生活中发现数学问题, 这对提升学生学力、发展学生数感具有重要意义[3]。

2.1. 转化思想的内涵与价值

转化思想是一种特殊的思维方式, 将难题转化为熟悉容易解决的易题。在初中数学教学过程中, 转化思想应用普遍, 在方程模块的体现尤为重要。其思想在初中数学中持续发挥作用, 体现在数与形的转化、等价转化、类比转化等方面[4]。主要涉及“数与代数”和“图形与几何”等知识领域, 核心作用就是将复杂问题简化, 把不熟悉的内容转化为熟悉知识, 将已有的知识应用于解决新的数学问题, 从而推动知识的迁移与链接, 奠定深度学习的基础[5]。转化思想主要是以分析、比较等思维过程, 通过选取合适的数学方法, 对难以直接解答的问题进行巧妙的转换, 高效解决问题。张奠宙指出, 转化思想是指经过头脑的重组和转化, 把没有解决的数学问题与已经存在的知识经验建立关联, 转化为能够解决的问题并对问题进行解答的一种手段和方法[6]。

转化思想是一种特别重要的数学思想方法, 关于它的表述, 其本质上基本是相似的, 就是建立在已有的、简单的、具体的、基本的理论知识基础之上, 经过一系列的数学过程对问题进行巧妙地转换。在数学中, 求解一个复杂的方程组时, 可能通过代换、消元等方法将其转化为一个比较简单的方程来进行求解。在几何中, 把不规则图形的面积计算问题转化为规则图形面积的组合或差来解决。

2.2. 代入消元法的本质

代入消元法是解二元(或多元)一次方程组的一种基本方式, 原理上是将一个方程中的某个变量用另一个变量的表达式去表示, 随后把变换的表达式代入到另一个方程中去, 从而起到消去一个变量的作用, 将二元方程组转化为一元方程求解的过程。具体步骤如下:

1) 从二元一次方程组中选择一个方程, 解出其中一个变量, 用另外的一个变量表达式去表示它。对于方程组:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

可以从第一个方程中解出 x , 得到:

$$x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$$

2) 把所得的表达式代入到另一个方程中, 消去 x , 得到一个关于 y 的一元一次方程:

$$a_2 \left(\frac{c_1 - b_1y}{a_1} \right) + b_2y = c_2$$

简化后:

$$\frac{a_2c_1 - a_2b_1y}{a_1} + b_2y = c_2$$

进一步整理:

$$\begin{aligned} a_2c_1 - a_2b_1y + a_1b_2y &= a_1c_2 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y &= a_1c_2 - a_2c_1 \\ y &= \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{aligned}$$

3) 将所求得 y 的值代回到第一步中所得 x 的表达式中, 可求出 x 的值。

$$x = \frac{c_1 - b_1 \left(\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)}{a_1}$$

简化得:

$$\begin{aligned} x &= \frac{c_1(a_1b_2 - a_2b_1) - b_1(a_1c_2 - a_2c_1)}{a_1(a_1b_2 - a_2b_1)} \\ x &= \frac{a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 - a_1b_1c_2 + a_2b_1c_1}{a_1(a_1b_2 - a_2b_1)} \\ x &= \frac{a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2}{a_1(a_1b_2 - a_2b_1)} \\ x &= \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{aligned}$$

代入消元法的原理和转化思想内在联系在于, 经过代入和消元的过程, 把二元(或多元)方程组转变为

一元方程求解,这正是转化思想中“复杂与简单的转化”的具体体现。利用代入消元法,将复杂的二元方程组问题转变成简单较易的一元方程问题,提高解题过程和效率。

3. 代入消元法教学设计中转化思想应用的理论基础

3.1. 建构主义学习理论

建构主义是由人主动和有意义的建构,换种说法就是人在已有知识经验的基础之上对新学知识进行调整和加工,从而促进对新内容的有意义建构[7]。由于每个人的原有经验有所差异,对于同一事物的理解不一致,这就需要多和他人进行交流、合作和探究,从而有助于提高人的探究和创造能力。

建构主义学习理论主要观点由知识观、学习观、学生观、教师观四方面决定[8]。例如,先让学生回顾一元一次方程的具体解法,再而引导学生思考如何把二元一次方程组中的一个方程变换,代到第二方程,消去一个未知数,变为熟知的一元一次方程。在这过程中,学生借助已知知识,自主探索转化方式,逐步构建对代入消元法的深度理解,形成新的知识框架体系。

3.2. 数学认知理论

数学认知理论认为学生在学习新知识时,经历感知、理解、应用等认知过程。是一种经过学生主观变换后的数学知识框架,是数学知识结构与学生心理结构相互作用的产物,主要内容包括数学知识和数学知识在头脑里的组织方式和特征[9]。

在学习代入消元法上,首先感知方程组的形式,进而通过理解转化思想,将复杂的二元方程组转化为熟知的一元方程。这一过程是学生认知结构的重组和扩展。转化思想帮助学生突破从二元到一元的难点,使他们能够利用已有的一元方程知识解决问题。通过转化思想,不仅加深了对方程组的理解,还提升了数学思维能力,促进了认知结构的优化。

4. 转化思想的应用现状及问题

4.1. 转化思想的应用现状

初中数学知识体系由代数和几何两个部分构成,代数部分和几何部分都蕴含了转化思想[10]。尤其在代数领域中的解方程、函数等内容中体现得尤为突出。当前在解方程组的教学中,教师普遍通过具体案例引导学生将二元一次方程组转化为一元一次方程来求解,即复杂问题转化为简单问题。这种转化思想不仅帮助学生理解数学知识的本质,还促进了学生逻辑思维能力的提升。然而在实际教学中,转化思想的应用仍存在一定的局限性,部分教师更注重解题步骤的机械传授,而忽视了对思想方法的深入渗透,导致学生难以灵活运用转化思想解决新问题。

4.2. 学生学习与教师教学的过程分析

学生学习需经历从具体问题到抽象模型的转化过程,如通过代入消元法将二元方程化为一元方程,并在“感知→理解→应用”的认知中完成知识内化。部分学生在“理解”环节存在困难,表现为变量替换或代入操作不熟练。教师应通过问题引导、知识类比帮助学生构建知识体系,并设计分层练习,从简单到复杂逐步提升难度,结合典型错误分析强化关键步骤的掌握。学生学习的主要困难在于对问题结构的整体把握不足,难以选择合适的转化路径,且对抽象转化思想的理解有限,尤其在方程组系数不为1时易产生畏难情绪。教师教学的不足表现为过于侧重解题技巧而忽视转化思想的实际应用,且教学设计缺乏循序渐进性,未能有效衔接学生已有知识导致新旧知识脱节。

因此在教学中应明确转化思想的逻辑步骤,结合生活实例增强学生的理解动机,并实施分层教学,

针对不同学生设计梯度练习, 及时纠正典型错误, 从而提升教学实效性, 促进学生从被动学习转向主动应用。

5. 代入消元法教学设计中转化思想的具体应用

5.1. 教学目标设计

领会解二元一次方程组的方法。根据方程组的情况, 能恰当地应用“代入消元法”解方程组。经历解二元一次方程组的过程, 理解并能应用代入消元法解二元一次方程组的方法。感悟代入消元法所体现的化未知为已知的转化思想, 体会解二元一次方程组中的“消元”思想, 即通过消元把解二元一次方程组转化成解一元一次方程, 由此感受“化归”思想的广泛应用, 初步发展学生的运算能力。

5.2. 教学过程设计

一、复习导入

问题 1: 把下列方程 $2x - y = 3$ 改写成为用 x 的式子表示 y 和用 y 的式子表示 x 。

预设: 学生回答: $y = 2x + 3$, $x = \frac{1}{2}(3 + y)$ 。

教师总结: 先移项, 再将系数化为 1。

问题 2: 上节课我们解决了种棉大户租用大、小采棉机的问题, 同学们还记得是怎样设未知数, 怎么列一个二元一次方程组的吗?

预设: 学生回答: 设这个种棉大户租用了 x 台大型采棉机, y 台小型采棉机。

直接列式 $\begin{cases} x + y = 6 & \text{①} \\ 2x + y = 8 & \text{②} \end{cases}$ 。

追问 1: 那我们上节课是怎么得到这个二元一次方程组解的呢?

(学生回忆并回答上节课的列表法解二元一次方程组) 板书。

教师概括这是一个实际问题, 首先找到满足方程①的 5 对解, 然后把 5 对解带入到方程②的左边, 只有 $x = 2, y = 4$ 时方程②的左边和右边都等于 8。因此我们就得到这个方程组的解了。

追问 2: 那这个方程组的解该怎么表示呢?

预设: 同学表示不同的形式, 教师总结, 即上下并排先写 $x = 2$, 再写 $y = 4$, 再用大括号括起来。

追问 3: 这个方法方便吗?

预设: 学生回答不方便。

教师总结: 确实, 这个方法需要尝试多次, 当常数系数为分数或者小数时这个方法会更复杂, 下面我们来探究学习解二元一次方程组的方法(教师板书课题: 解二元一次方程组)。

【设计意图】 让学生复习已有知识, 为后面用消元法解二元一次方程组中的消元及解题过程等新知识的学习打好基础。复习导入环节对应着建构主义学习理论中的“激活已有的学习经验”, 通过回顾旧知, 为新知识的建构提供固着点, 引发学生的认知冲突, 激发学习动机。

二、探索新知

设这个种棉大户租用了 x 台大型采棉机, y 台小型采棉机:

$$\text{则} \begin{cases} x + y = 6 & \text{①} \\ 2x + y = 8 & \text{②} \end{cases}$$

问题: 同学们想到这个方程组的解法了吗?

预设：学生困惑。

教师引导：当我们遇到一个新问题的时候，总是要把它转化成之前已经学过的知识点，那之前你学过哪一类方程的解法问题？停顿(学生答一元一次方程)。

那么我们就想办法把这个问题转化成以前已经学过的一元一次方程。

追问 1：那你能列出对应的一元一次方程吗？

预设：学生回答：设这个种棉大户租用了 x 台大型采棉机， $6-x$ 台小型采棉机(板书：将一元一次方程与二元一次方程组形成左右对比板)。

探究 1：对于这个实际问题中的二元一次方程组 and 一元一次方程，大家分析一下它们之间有什么相同点和不同点？

预设：学生思考并回答，相同的是大型采棉机的数量都是 x 台，不同的是小型采棉机的个数在二元一次方程组中是 y ，在一元一次方程是 $6-x$ 。

教师在学生的回答基础上进一步引导分析：我们知道二元一次方程组中的 y 和一元一次方程中的 $6-x$ 都代表小型采棉机的个数，具有相同的实际意义，因此这里的 $y=6-x$ (中间板书 $y=6-x$)。

追问 2：那这里的 $y=6-x$ 与我们二元一次方程组中的第一个方程有什么关系呢？

预设：学生回答：方程组的①式中我们用含有 x 的式子表示出 $y=6-x$

追问 3：这一步我们是由方程组中的①得到的，接着我们再来比较一下二元一次方程组中的第二个方程和这个一元一次方程有什么相同的地方？

预设：学生回答：这两个方程相同之处是大型采棉机都是 $2x$ ，不同之处是小型采棉机一个是 y ，一个是 $6-x$ 。

追问 4：那我们如何把方程组中第二个方程化成这个一元一次方程呢？

预设：学生回答： y 用 $6-x$ 替代。

教师强调：我们将②式中的 y 换成 $6-x$ ，这样就能把二元一次方程中方程②化成一元一次方程，这一步我们称之为代入。解出一元一次方程的 x 。再将 x 的值带入到第一个方程①，解出 y 的值。

下面老师把刚才的分析思路完整地板书出来：

$$\begin{cases} x+y=6 & \text{①} \\ 2x+y=8 & \text{②} \end{cases}$$

解：由①，得

$$y=6-x \quad \text{③}$$

把③代入②，得

$$2x+(6-x)=8$$

解这个方程，得

$$x=2$$

将 $x=2$ 代入③式，得

$$y=4$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases} x=2, \\ y=4. \end{cases}$$

探究 2: 那我们怎么确定这个方程组的解是正确的呢?

下面我们需要对方程组的解进行验证, 我们把 $x=2$, $y=4$ 带到方程①的左边, 左边等于右边, 再把 $x=2$, $y=4$ 带到方程②的左边, 左边等于右边, 所以 $x=2$, $y=4$ 就是方程组的解。

教师归纳: 我们回顾一下整个解方程组的过程, 有两个非常关键的环节: 2 个代入。

第一步代入是把①式用 x 表示 y 的式子③带到方程②中, 然后就将含有两个未知数的方程换成只含有一个未知数的方程, 起到了消除未知数的目的, 也就是消元的目的, 因此我们把这种方法叫代入消元法。

第二个代入主要是求另外一个未知数的解, 将求得的 x 值代入方程③求出 y 的值。

追问 1: 第一个代入将③式代入②式, 那可不可以代到方程①式中呢?

预设: 同学回答不行, 起不到解方程的目的, 只能带到②。

追问 2: $x=2$ 可以代入③式, 那可不可以代到方程①和方程②呢?

预设: 学生回答可以。

追问 3: 那代入哪个方程最简单?

预设: 代入③式最简单。

追问 4: 你还有其他的方法去求值吗? (3 种) 学生板演, 教师指正。

总结一下解方程组的主要步骤: 将其中一个简单方程中的某个未知数用含有另一个未知数的代数式表示出来, 记为③式, 并将③式代入另一个方程中, 从而消去一个未知数。化二元一次方程组为一元一次方程, 先解出一个未知数的值, 再将值代入③式解出另一个未知数的值。

【设计意图】: 用一元一次方程与方程组求解相同的实际问题, 来培养学生观察分析问题以及概括总结的能力, 通过师生合作探究, 逐步引导学生合理思考, 通过提示问题的不同解决方法提升学生的思维能力。激发学生学习新方法的欲望, 培养学生探索创新的能力。探究环节是本节课教学的核心, 充分体现了建构主义的“脚手架”原则和认知理论的“知识同化与顺应”过程。教师通过一系列递进式的问题链, 为学生搭建思维支架, 引导学生主动探究, 完成从二元到一元的认知结构重组, 深刻体验转化思想的实质。

三、巩固练习

例 1: 用代入法解方程组

$$1) \begin{cases} x-y=3 \\ 3x+8y=14 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y+2x=8 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$$

解答过程: 学生板演, 教师指正略。

预设学生有 4 种解法, 教师总结。

得出解后, 带着学生一起验证解的正确性, 以验证结果说明方法的正确性。

【设计意图】: 巩固代入消元法的解题思路, 加深对代入消元法的理解, 提高解题技巧, 增强学生对方程组解概念的理解, 培养学生解二元一次方程组的运算能力。巩固练习环节对应着认知理论中的“应用与迁移”阶段, 通过变式练习, 促进学生对转化思想的深度理解和自动化应用。

四、课堂小结

1) 同学们这节课我们学习了哪些内容?

2) 在代入消元法解二元一次方程组的时候, 第一个代入作用是什么呢?

3) 用代入消元法解二元一次方程组的基本步骤是什么?

【设计意图】: 本环节在课程结束后, 由学生回答小结的内容, 当堂复习回顾本节所学内容, 加深学生对新知识的印象。这个环节符合建构主义的“意义建构”和认知理论的“结构化存储”要求, 帮助学

生梳理知识脉络, 形成系统化的认知图式。

五、布置作业

1、用代入法解下列方程组:

$$1) \begin{cases} y = x + 3 & \text{①} \\ 7x + 5y = 9 & \text{②} \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x + y = 15 & \text{①} \\ 3x - 2y = 3 & \text{②} \end{cases}$$

【设计意图】: 巩固代入消元法的解题思路, 加深对代入消元法的理解, 提高解题技巧, 增强学生对方程组解概念的理解, 培养学生利用二元一次方程组解决实际问题的能力。

六、教学反思

在进行“代入消元法”教学时, 遵循了“由浅入深、循序渐进”的教学原则, 引导学生观察未知数的系数, 发现系数是 1 的未知数时, 针对这个未知数进行等式变换, 然后代入到另一个方程, 体现消元的本质。在这个教学过程中, 学生的学习难点就是当未知数的系数不是 1 的情况, 用含有一个字母的代数式表示另一个字母时, 教师应该引导学生熟练进行等式变换, 这个过程教师往往忽略训练的深度和广度, 要注意把握训练的尺度。

5.3. 教学中可能出现的问题及对策

问题一: 学生在将一个未知数用含另一个未知数的代数式表示时出现困难, 尤其是在系数不为 1 或为负数时。

对策: 教师应在探索新知环节后, 增加专项基础练习。教学中强调等式的基本性质, 为学生提供清晰的思维和操作的“脚手架”。这对应了建构主义理论中为学习者搭建适当支架以跨越“最近发展区”的原则。

问题二: 学生在代入过程中, 容易混淆代入的对象和目的, 导致代入原方程或循环代入。

对策: 在教师归纳“两个代入”环节时, 要采用对比和强调的策略。明确第一个代入的目的是“消元”, 必须代入另一个方程; 第二个代入的目的是“回代求解”, 代入变形后的表达式最简便。可以通过正误辨析的例题, 强化学生对操作逻辑的理解。这利用了认知理论中通过对比和强化来修正错误认知图式的机制。

问题三: 部分学生会对“转化思想”的理解停留在记忆步骤层面, 难以体会消元的作用, 在遇到新问题时无法主动运用转化思想。

对策: 在教学过程中, 教师要有意识地渗透转化思想。在导入环节点明“化新为旧”的目标, 在探索环节引导学生反思“我们是如何把复杂问题变简单的”, 在小结环节不仅要总结解方程组的步骤, 更要总结思想。布置作业时可增加一道简单的拓展题或者开放题, 鼓励学生尝试应用转化思想解决问题。实现建构主义所倡导的深层意义的建构, 而不是表层知识的灌输。

6. 结论与展望

在代入消元法的教学设计中, 转化思想的应用展示出显著的有效性和可行性。将二元一次方程组转化为一元一次方程求解过程, 可以直观理解“变未知为已知”的核心思维, 这种复杂到简单的思维路径降低了知识难度。比如, 在“鸡兔同笼”问题上建立模型, 通过变量设置将实际问题变化为方程组, 利用代入消元法逐步拆分, 实现问题的有效解决, 深化了对“转化”数学思想的认知。

转化思想是学生建构新旧知识的主要枢纽。在回忆一元一次方程解法的基础之上, 利用代入消元法实现知识的变迁, 进而形成对线性方程组解法的系统理解, 避免孤立记忆算法的机械学习。转化思想同时培养了学生逻辑推理能力和问题拆解意识。在深化分析方程组结构、选择消元变量的过程中, 经历观

察、假设、验证的思维条理, 能帮助提高数学抽象能力和批判性思维, 为后面学习多元方程组及函数等知识奠定重要思维基础。

参考文献

- [1] 义务教育数学课程标准(2022 版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [2] 陈蓓, 喻平. 情境认知理论对中学数学教学的启示[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2023(2): 8-14.
- [3] 王红权, 李馨. 从系统的观点看一元二次方程的解法教学设计[J]. 数学教育学报, 2019, 28(3): 94-97.
- [4] 卢虹英. 运算技能形成的教学策略: “代入消元法解二元一次方程组”的教学思考[J]. 福建中学数学, 2019(7): 30-32.
- [5] 厉芸芸. 让转化思想在小学数学课堂中生根发芽[J]. 天津教育, 2019, (10): 59-60.
- [6] 张莫宙. 数学方法论稿[M]. 上海: 上海教育出版社, 2012.
- [7] 郭清莲. 基于建构主义学习理论的单元教学设计的研究[D]: [硕士学位论文]. 抚州: 东华理工大学, 2024.
- [8] 刘瑞睿. 小学数学“图形与几何”领域转化思想应用研究[D]: [硕士学位论文]. 秦皇岛: 河北科技师范学院, 2024.
- [9] 柴文斌. 构建数学教学模型, 发展学生数学素养[J]. 教育科学论坛, 2017(31): 72-74.
- [10] 任印怀. 巧变图形结构, 渗透转化思想——以角平分线和垂直平分线为例[J]. 中学数学, 2025(8): 83-84.