Advances in Education 教育进展, 2025, 15(12), 428-434
Published Online December 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2025.15122297

CPFS结构理论下高中数学概念教学策略

——以“函数的概念”为例

尹升文

吉首大学数学与统计学院，湖南 吉首

收稿日期：2025年11月1日；录用日期：2025年11月30日；发布日期：2025年12月9日

摘 要

数学概念是构成数学知识体系的基本单元，对培养学生的数学推理与问题解决能力具有奠基性作用。本文基于CPFS结构理论，系统分析其内涵及在高中数学概念教学的价值，结合“函数的概念”教学这一核心内容，提出了“注重概念生成，构建概念网格”与“适时教学反思，促进概念有效应用”的教学策略，旨在通过“生成－联系－反思”的系统设计，帮助学生完善概念体系，发展学生的数学核心素养，为终身学习奠定基础。

关键词

CPFS结构，数学概念，函数概念，教学策略

Teaching Strategies for High School Mathematics Concepts under the CPFS Structure Theory

—A Case Study of “The Concept of Function”

Shengwen Yin

School of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: November 1, 2025; accepted: November 30, 2025; published: December 9, 2025

Abstract

Mathematical concepts serve as the fundamental building blocks of mathematical knowledge systems, playing a foundational role in cultivating students’ mathematical reasoning and problem-

文章引用: 尹升文. CPFS 结构理论下高中数学概念教学策略[J]. 教育进展, 2025, 15(12): 428-434.
DOI: 10.12677/ae.2025.15122297

solving abilities. This paper systematically analyzes the connotation and educational value of CPFS structural theory in high school mathematics concept instruction. Focusing on the core teaching content of “the concept of functions”, it proposes two pedagogical strategies: “concept generation-focused development and conceptual framework construction” and “timely teaching reflection to enhance effective application”. Through a systematic design of “generation-connection-reflection” processes, the study aims to help students refine their conceptual systems, develop core mathematical competencies, and establish a solid foundation for lifelong learning.

Keywords

CPFS Structure, Mathematical Concept, Function Concept, Teaching Strategy

1. 引言

数学概念是数学知识体系的“细胞”，每一个概念通过内在逻辑关联形成结构化的知识网络，它既是学生理解数学的基石，也是发展数学核心素养的关键载体。《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》明确指出，需要加强学生对基本概念和基本思想的理解和掌握，促进其核心素养的发展[1]。可见，数学概念对数学教学至关重要，它的掌握程度影响着数学问题的解决。然而，在实际教学中，数学概念教学却面临着诸多问题：其一，教学方式单一。教师多采用“讲授法”直接传递概念结论，学生被动接受，他们缺乏对概念本质的主动探究，难以将概念内化为个性化的认知结构[2]；其二，重解题轻概念。部分师生将数学学习的目标窄化为“解题技巧训练”，忽视概念教学的基础性作用，导致学生的“概念域”与“概念系”不完善，在应用概念时可能会出现各种各样的问题；其三，师生忽视教学反思。数学概念的高度抽象性与逻辑性使得学生在应用时易出现偏差，若缺乏及时的修正与反思，错误认知将持续累积，从而阻碍概念的深度理解[3]。这些问题都反映了一个核心问题：如何帮助学生从“表层记忆”转向“本质理解”，从“孤立认知”转向“系统建构”。

针对数学概念教学存在的问题，需要从理论层面重新审视数学概念教学的本质。数学概念教学的理论演进始终与学习心理学的发展紧密关联。建构主义理论强调知识是学习者在原有的认知基础上主动建构的产物，但它未系统关注数学知识之间的内在逻辑联系[4]；APOS 理论描述概念形成的“活动–过程–对象–图式”四种心理阶段，强调学生对数学概念的建构过程，但却缺乏对概念网格化关联的刻画[5]。CPFS 结构理论是喻平教授结合心理学的特点和学生数学学习特有的心理规律，它不仅融合了建构主义理论的“主动建构”思想，还考虑到 APOS 理论的概念的建构过程，为概念学习提供了系统化的认知结构。[6]在函数概念教学方面，自狄利克雷提出现代函数定义以来，教学研究经历了从“变量说”到“映射说”再到如今的“对应关系说”的演进，虽然多重表征理论和 HPM 理论研究虽然丰富了教学手段，但却未能有效解决认知结构碎片化的问题。本文以函数教学为例，通过对比 CPFS 结构理论和经典理论，论证其在破解“碎片化”难题中发挥着独特的价值，并为教学实践提共路径支持。

2. CPFS 结构的组成

2003 年，喻平教授结合心理学的特点和学生数学学习特有的心理规律，提出了 CPFS 结构理论，它是由概念域、概念系、命题域、命题系四部分组成，是数学学习中特有的认知结构，为教师的概念教学

设计提供了一种新的思路方法[6]。概念域是指某个数学概念中所有的等价的图式，它的形成意味着学生知道这个概念可以从多个等价的角度来理解和定义，并且能在不同情境下灵活运用这些等价定义[6]。例如，对于“函数的概念”，其中概念域可以包括：从变量的角度可解释为“函数是描述一个量(自变量)如何随着另一个量(因变量)的变化而变化”；也可以从映射的角度解释为“函数是两个集合 A,B 之间的一种特殊对应关系，$f:A\to B$”；还可以从有序对解释为“函数是其定义域和值域之间满足特定条件的有序对集合”等。概念系是有数学抽象关系或逻辑关系中的一组概念形成的概念网格。概念系强调了数学知识间的联系性，构建了旧知与新知的桥梁，让学生将知识构建成一个完整的知识体系[6]。例如，可以写出以“函数”为结点的概念网格，使知识不再孤立。我们从中可以发现：概念域是概念系的子图式。命题域是典型命题的等价命题集与连接这些命题之间的互推关系所形成的结构，等价命题网格图式就称为典型命题的命题域[6]。例如，函数概念的命题域可以从直观文字描述到严格的数学定义，再到几何判定和计算实现等多种逻辑等价的命题形式。命题系是在一个命题集中，每一个命题都至少与其它一个命题相交，这样该命题就划分为半等价命题的图式。根据概念系和概念域，我们不难发现，命题系可作为命题域的自然推广。

3. CPFS 结构在概念教学中的意义

CPFS 结构通过“知识网格化”与“关联结构化”，系统解决了数学教学中“碎片化”与“迁移难”的痛点。

3.1. 助力知识化单元整体建构，破解“碎片化”难题

CPFS 结构将知识和思想融为一体，能系统地解决数学教学知识碎片化、知识点迁移困难等痛点问题，并为深度理解数学概念和落实学科核心素养提供了结构化路径。通过构建概念域和概念系，可以促进知识网格化，深化学生对概念本质的理解，增强概念的可辨性；通过整合命题域和建立命题系，能够强化知识之间的逻辑关系，形成一套可迁移的方法体系。并且在数学教学实践中，CPFS 结构为教师整体教学设计提供了新的方向，同时也重构了复习和评价体系，使教学从单纯的灌输转变为对学生认知结构的诊断与修复，并指导教师进行单元主动跨章节知识网格的构建，有助于学生将头脑中的知识内化成自己的 CPFS 结构[7]。

3.2. 提升问题解决能力，构建“知识到应用”的桥梁

解决数学问题的核心是从已知条件中提取关键有效信息，建立起问题与知识的联系。在传统学习中，学生的知识常常孤立储存，遇到数学问题时，往往需要在头脑中逐一搜寻相关知识，这不仅浪费时间，还可能遗漏关键信息。优良的 CPFS 结构能够提升学生的问题表征能力[8]。其中“域”包含多个等价表征和相关表征，“系”将知识联系成知识网格，使知识具有逻辑关联性。“域”和“系”将知识网格化，形成“关系集群”，不仅能帮助学生在头脑中快速寻找与问题相关的知识，还能帮助学生从不同问题中找到共性，实现“多题归一”，在解决综合问题时，实现不同知识模块的迁移。因此 CPFS 结构可以构建“知识到应用”的桥梁。

3.3. 培养终身学习能力，奠定可持续发展难题

数学学习的终极目标不仅是让学生掌握数学知识，更重要的是帮助学生形成“自主学习、自主建构知识”的能力。CPFS 结构本质是思想和方法的结合，是一种可迁移的“学习方法”。学生在构建 CPFS 结构的过程中，逐渐掌握“梳理知识、建立关联”的学习策略，这种策略不仅可以迁移到今后的数学学习中，还能迁移到其他学科的学习中，从而培养学生终身学习的能力。

4. 高中概念课教学的问题

当前高中数学概念教学与 CPFS 结构的核心要求存在显著差距，主要表现为：

首先，概念生成不足：在概念教学中，教师直接传授结论，学生未经历“具体→抽象”的概念形成过程，难以构建丰富的“概念域”(如仅从变量角度理解函数，忽略映射、有序对等等价定义) [2]。其次，概念联系薄弱：忽视概念间的逻辑关联(如函数与方程、图像、实际问题的联系)，导致“概念系”松散，学生无法将知识联结为整体；最后，反思机制缺失：缺乏对概念形成过程与应用过程的反思，学生难以辨析认知误区(如忽略定义域、混淆变量对应关系)，阻碍概念的深度内化[3]。

5. 基于 CPFS 结构高中函数概念教学策略

以“函数的概念”教学为例，提出两大核心策略，通过“生成－联系－反思”的系统设计，帮助学生完善概念体系，落实 CPFS 结构的核心要求。

5.1. 注重概念生成，构建概念网格

CPFS 结构强调“概念域”与“概念系”的构建，需引导学生从多元视角理解概念，并建立新旧知识的关联网络。在函数教学中，可通过“情境驱动－抽象归纳－深度辨析”的路径，推动学生亲身经历概念生成过程。

5.1.1. 情境导入：多视角感受函数关系

情境 1 (解析式)：随着中国经济的高速发展，高铁成了大多数人出行的重要交通工具，它大大减短我们出行的时间。某高铁在行驶的过程中，最高速可达到 350 km/h，可在这一速度上匀速行驶半个小时。那么在这段时间内，行驶的距离 S 和时间 t 的关系式为：$S = 350t$。

情境 2 (解析式)：某电气维修公司要求工人每周工作至少 1 天，至多 6 天。如果公司确定的工资标准是每个人 350 元，而且每周付一次工资，那么你认为该怎样确定一个工人每周的工资？一个工人的工资 w (单位：元)是他工作天数 d 的函数吗？

情境 3 (图象法)：如图 1 是某个城市的一天的温度变化图，你能尝试用两个数集表示温度和时间吗？

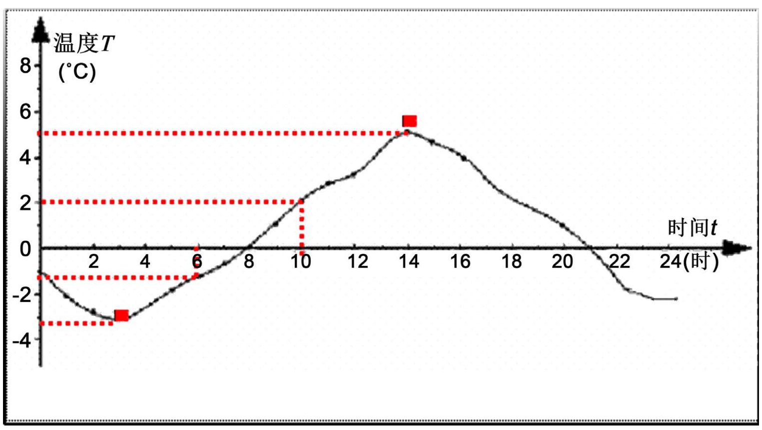

Figure 1. Temperature change graph
图 1. 温度变化图

情境 4 (表格法)：国际上常用恩格尔系数 $r\left(r = \dfrac{\text{食物支出金额}}{\text{总支出金额}} \times 100\%\right)$ 反映一个地区人民生活质量的

高低，恩格尔系数越低，生活质量越高。如表 1 是我国某省城镇居民恩格尔系数变化情况，从中可以看出，该省城镇居民的生活质量水平越来越高。

Table 1. Changes in Engel's coefficient of urban residents in China
表 1. 我国某城镇居民恩格尔系数变化情况

年份 x	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
恩格尔系数 r (%)	36.69	36.81	38.17	35.69	35.15	33.53	33.87	29.89	29.35	28.57

通过问题链(如“变量如何变化？”“对应关系是否唯一？”“能否用数集描述？”)引导学生从具体实例中提取共性特征，激活已有认知(如初中的变量关系)，为抽象概念奠定基础。

5.1.2. 归纳抽象，提炼函数本质

观察表 2 汇总，用精准语言表达函数有什么共同的特征？

Table 2. Summary table
表 2. 汇总表

现实情境	自变量数集	对应关系	因变量数集
情境 1	$A=\{0\le t\le 30\}$	$S=350t$	$B=\{0\le S\le 175\}$
情境 2	$t=\{1,2,3,4,5,6\}$	$S=350t$	$W=\{350,700,1050,1400,1750,2100\}$
情境 3	$t=\{0\le t\le 24\}$	图	$T=\{-3\le T\le 5\}$
情境 4	$x=\{2006,2007,2008,2009,2010,2011,2012,2013,2014,2015\}$	表	$r=\{36.69,36.81,38.17,35.69,35.15,33.53,33.87,29.89,28.57\}$

将四个情境放入一张表格中进行对比分析，聚焦核心问题：

在这些情境中，两个变量的共同联系是什么？能否用两个数集(自变量集 A 和因变量集 B)和对应法则 f 描述这种关系？(对于 A 中的每一个数，在 B 中都能找到唯一的值与之对应)函数定义在这四个情境中是等价的吗？(从不同情境中感受函数概念的形成，加深概念的理解)，最终引导学生归纳出高中函数的定义：函数的概念：一般地，设 A,B 是非空的实数集，如果对于集合 A 中的任意一个数 x，按照确定的关系 f，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应，那么就称 f： $A\to B$ 为称集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $y=f(x),x\in A$，其中，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域，集合 $\{f(x)|x\in A\}$ 叫做函数的值域。

5.1.3. 深化辨析，完善概念网格

通过对比与追问(如“情境 1 与情境 2 的函数定义域为何不同？”“若 $S=350t$ 中 t 可取任意实数，函数关系是否变化？”)，引导学生从“变量对应”“映射关系”“定义域限制”等多角度理解函数，构建以“函数”为核心的“概念系”(关联变量、对应法则、定义域、值域等概念)，完善认知网格。

5.2. 注重判断与联结，构建命题网格蓝图

在函数概念教学的基础之上，函数性质教学是学生发展逻辑推理能力的关键环节。下面以“函数的单调性”为例，通过“情境导入－命题生成－联系拓展－反思应用”的路径，完善命题域和命题系。

5.2.1. 情境导入：从多角度感知单调性

情境 1 (生活实例)：若学生每天完成固定的作业，随着天数的增加，那么作业的累计完成度会随着天

数的增加而增加。

在我们的日常学习中，随着学习量的增加，那么我们积累的知识就会越来越多，但是如果我们没有及时记忆的话，那么我们就遗忘的越多，能记忆知识的数量就会越来越少。

情境 2 (函数图像)：在我们的日常学习中，接触着各种各样的知识，但是如果我们没有对这些知识及时复习，对知识的记忆量会随着时间增加而逐渐减少。记忆量与时间的关系如图 2 所示：

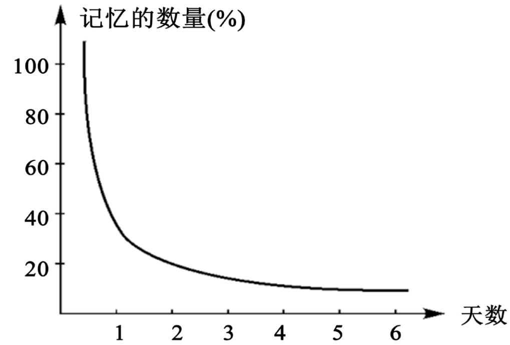

Figure 2. Ebbinghaus curve
图 2. 艾宾浩斯曲线

情境 3 (解析式)：分析二次函数 $f(x)=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上的变化情况。

通过这些情境，学生从图像、代数和应用多个角度感知单调性，为命题域的构建奠定基础。

5.2.2. 命题生成：通过等价表述构建命题域

引导学生归纳单调性的多种等价命题，形成命题域。以下以增函数为例，展示命题域蓝图：

定义表述	若函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增，则对于 $\forall x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$
导数表述	若 $f(x)$ 在区间 D 上可导，则 $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 在 D 上单调递增
图象特征表述	若函数图像在区间 D 上从左至右呈现上升趋势，则函数 $f(x)$ 单调递增
差商表述	对 $\forall x_1,x_2\in D$，且 $x_1\neq x_2$，若 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则该函数 $f(x)$ 单调递增

通过表格对比，让学生理解这些命题的等价性及适用条件(如导数表述需函数可导为前提)。类比单调递增让学生尝试自己独立构建单调递减的命题域表格。帮助学生完善“命题域”，理解单调性的等价命题集。

5.2.3. 联系拓展：建构命题系强化知识网格

可将单调性放入更广的命题网格之中，形成命题系，强化它与导数、极值等概念的逻辑关联：

导数的联系	通过几何直观(如切线斜率)引导学生理解 $f'(x)>0$ 与函数递增的关系，并讨论 $f'(x)=0$ 的点(如驻点)对单调性的影响。
极值的联系	探究单调性与极值的关系，例如“严格单调函数无极值”“单调区间端点可能取得最值”。
方程的联系	分析单调函数 $f(x)=0$ 的根的唯一性，并引申到反函数存在性定理。
其他性质的交叉	对比奇偶性、周期性，如“奇函数在对称区间上单调性一致”等命题。

这部分构建了“命题系”，即半等价命题的网络，确保 CPFS 结构全面应用。例如，学生通过命题系能看到单调性与导数的充分必要性差异，从而深化迁移能力。

5.3. 适时教学反思，促进概念有效应用

在概念教学过程中，适时开展教学反思能够促进学生概念有效应用的重要环节。教师应在概念教学的不同阶段，如引入概念后、例题讲解后、练习反馈后以及单元总结时，引导学生与自身对概念的理解过程进行回顾与审视，如在函数的概念教学过程中，教师可以让学生思考“我是如何形成这个概念的？”“这个概念的关键特征是什么？”“它在哪些问题中得到了应用，又是如何应用的？”等，帮助学生澄清认知误区，强化对概念本质的把握。此外，教师还要鼓励学生建立概念反思笔记或概念应用案例库，记录自己在不同情境中运用概念的经验与反思，有助于其逐步形成“反思－调整－应用”的良性循环，从而真正实现概念从“理解”到“应用”的有效转化，提升数学问题解决能力与核心素养。

在函数的概念与性质的实际教学中教师可以采取这样的反思行为：

首先在引入函数的概念后，教师可以问学生：“我们是怎样从生活中的变量关系一步步抽象出函数定义的？”“你认为函数最核心的特征是什么？”“你是怎样理解‘函数是描述两个数集之间的特殊关系’这一数学本质”等数学问题，加深学生对函数概念的理解。其次，在例题讲解后，教师可让学生反思“我们怎样判断它可以构成函数关系？用了哪些函数的基本要素”，帮助学生将抽象概念与具体问题相联系，加强概念的应用。在练习反馈后，可组织学生思考“我在解题时是否正确理解了函数的定义域、对应关系与值域？有没有因忽略一些重要的因素？”通过这样的思考可强化学生对概念细节的把握。最后，在进行单元总结时，教师鼓励学生建立“函数概念的反思笔记”，记录自己在不同问题情境下如何识别函数关系，建立函数模型。在函数性质的教学中，教师可以问学生“单调性有多种表述，在解题中，该如何选择最优的方法呢”，引导学生审视命题域和命题系。

通过持续的反思，学生能够逐步形成“反思－调整－应用”的良性循环，不仅可以加深对概念的理解，更能促进概念向应用迁移，提升学生数学核心素养的发展，真正实现概念从“理解”到“应用”的有效转化。

6. 结语

CPFS 结构理论为高中数学概念教学提供了系统的认知视角与实践路径，本文通过“生成－联系－反思”的系统设计，不仅帮助学生构建逻辑严密、联系紧密的概念认知体系，更能培养其数学抽象、逻辑推理、数学建模等核心素养，为后续终身学习奠定坚实基础。在未来的教学中，教师应进一步强化 CPFS 结构，结合具体概念特点，设计分层、递进的概念生成与反思活动，从而推断数学概念教学从“知识传递”向“认知建构”转型，切实提升数学教育的育人价值。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准: 2017 年版 2020 年修订[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[2] 张隆亿. 指向深度学习的高中数学概念课问题链教学探索[J]. 教学与管理, 2024(19): 35-39.

[3] 胡红. 高中数学概念教学常见问题的分析[J]. 数学教学通讯, 2023(21): 59-61.

[4] 杨维东, 贾楠. 建构主义学习理论述评[J]. 理论导刊, 2011(5): 77-80.

[5] 郑雪梅. 高中数学概念教学探讨[J]. 教育现代化, 2017, 4(31): 179-180.

[6] 喻平, 单墫. 数学学习心理的 CPFS 结构理论[J]. 数学教育学报, 2003(1): 12-16.

[7] 高清, 沈南山. CPFS 结构统整的高中数学单元教学设计[J]. 数学通讯, 2024(24): 8-10+29.

[8] 喻平. 个体 CPFS 结构与数学问题表征的相关性研究[J]. 数学教育学报, 2003(3): 10-12+16.