Advances in Education 教育进展, 2025, 15(12), 1359-1363
Published Online December 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2025.15122421

连续函数与课程思政的有机融合

王　蕾

太原师范学院数学与统计学院，山西　晋中

收稿日期：2025年11月10日；录用日期：2025年12月12日；发布日期：2025年12月23日

摘　要

文章主要以连续函数为例，针对传统数学分析课程教学中存在的问题，重组教学内容，在数学分析课程中融入思想政治教育。通过将知识传授与价值引领相结合，提升学生学习兴趣，助力学生全面发展。

关键词

连续函数，课程思政，数学文化

Organic Integration of Continuous Function and Curriculum Ideology and Politics

Lei Wang

School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: November 10, 2025; accepted: December 12, 2025; published: December 23, 2025

Abstract

This paper mainly takes continuous functions as an example, aiming at the problems existing in the teaching of traditional mathematical analysis courses, reorganizes the teaching content, and integrates ideological and political education into the course of mathematical analysis. By combining knowledge impartation with value guidance, this paper can enhance students' learning interest and help students develop comprehensively.

Keywords

Continuous Function, Curriculum Ideology and Politics, Mathematical Culture

文章引用: 王蕾. 连续函数与课程思政的有机融合[J]. 教育进展, 2025, 15(12): 1359-1363.
DOI: 10.12677/ae.2025.15122421

1. 引言

《数学分析》是数学系最重要的基础课，是许多后继课程如实变函数、微分方程、概率论与数理统计等课程的必备基础，开设对象为数学本科各专业一、二年级的学生。其主要内容为极限理论、一元微积分学、多元微积分学、级数理论等。课程的目的在于通过系统的学习与严格的训练，使学生全面掌握数学分析的基本理论知识；具备熟练的运算能力与技巧；培养学生严格的逻辑思维能力与推理论证能力；提高建立数学模型，应用微积分解决实际应用问题的能力[1]。

函数的连续性是数学分析的主要内容之一，也是函数理论中最基本和最重要的问题之一，描述了变量之间最基本的连续关系概念，具有承上启下的作用。

2. 教学与育人目标

2.1. 知识传授目标

1) 深刻理解函数在一点连续的定义，并能熟练写出函数在一点连续的各种等价叙述。

2) 深刻理解单侧连续函数的概念，清楚“连续”与“单侧连续”的关系。

2.2. 能力培养目标

1) 培养学生由浅入深的逻辑思维能力，由直观到抽象的抽象概括能力。

2) 通过揭示函数连续性的实质，培养和提高学生的辩证逻辑思维能力。

2.3. 情感价值目标

1) 通过几何直观图引入连续性的精确定义，培养学生的辩证思维，提升学生对唯物辩证法的理解。

2) 函数在某点处连续的定义，体现了很多事物的变化都是连续的，利用拔苗助长的故事，教导学生必须遵循事物原本的规律。

3) 通过教师与学生、学生与学生的交流，让学生体会交流思想的重要性，培养团队协作精神。

4) 在授课过程中，充分发挥学生的主动性，体现学生的首创精神。

3. 教学策略与课程思政教学实施过程设计

3.1. 教学策略

采用“问题驱动式”教学与“合作互助式”教学相结合的授课方式，通过讲授法、对比法、课堂讨论法、练习法与任务驱动法的教学方法，构建本节课内容，并将思政元素融入其中。

3.2. 课程思政教学实施过程设计

要求教师查找相关知识和例题；要求学生回忆函数极限的定义并且预习函数在一点的连续性及单侧连续函数的概念。

3.2.1. 导引

1) 引入魏尔斯特拉斯等数学家在战乱、贫困中仍坚持研究的故事。他们以坚韧不拔的意志追求真理，

其爱国情怀与科学精神，正是激励学生探索未知、报效祖国的生动教材。

2) 从几何形象上粗略地说，连续函数在坐标平面上的图像是一条连绵不断的曲线。当然我们不能满足于这种直观认识，而应研究函数连续性的精确定义，让学生理解连续定义的本质是从定性描述到定量刻画的思想飞跃，是数学追求逻辑严谨、杜绝模糊性的核心精神的体现，是对数学理性精神的深层共鸣。

3.2.2. 互动讲解

1) 函数在点 x_0 连续的定义

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若[2] [3]

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

例如：函数 $f(x) = 2x+1$ 在点 $x=2$ 连续，因为

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2}(2x+1) = 5 = f(2)$$

又如，函数 $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，因为

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

通过举例，让学生先直观感受函数在一点连续的概念，启发学生总结该概念的重要含义。

注意：① $f(x)$ 在 x_0 连续包含三层含义：

i) $f(x_0)$ 在 x_0 有定义；

ii) 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；

iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$。

② 若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$。

可见，“$f(x)$ 在 x_0 点连续”意味着极限运算 $\lim\limits_{x \to x_0}$ 与对应法则 f 可交换顺序。

该结论在中学做题时学生已经熟练应用，但是不知原因，这里给出了解释，告诫学生要学会思考，将前后知识融会贯通。

2) 函数在点 x_0 连续的增量式定义

若记 $\Delta x = x - x_0$，$\Delta y = f(x) - f(x_0)$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ 可等价地叙述为 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，于是函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的定义为：

定义 2 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若[2] [3]

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

函数在点 x_0 连续第一种定义，刻画的是动态值和静态值相吻合，而第二种增量式定义，体现的则是一种稳定性，即当自变量变化很小的时候，因变量的变化也很小。延伸到生活中，很多事物的变化都是连续的，像植物的生长、气温的变换，知识的积累等，不能急于求成，必须遵循它原本的规律，比如学习、知识的积累需要时间和付出持久不懈的努力，妄图寻求捷径的想法是不科学的，只能事与愿违。古人用拔苗助长的故事比喻违背事物发展的客观规律，急于求成，反而坏事。

例 1 证明 $\sin x, \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上任何一点都连续[2] [4] [5]。

DOI: 10.12677/ae.2025.15122421

证明：令 $y=\sin x$，对 $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$，由于

$$\Delta y=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\cos\frac{2x_0+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}$$

又

$$0\le|\Delta y|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\le 2\left|\frac{\Delta x}{2}\right|=|\Delta x|,$$

据迫敛性知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则函数 $\sin x$ 在 x_0 点连续，故由 x_0 的任意性知，$\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上任何一点都连续。

同理可证 $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上任何一点都连续。

余弦函数和正弦函数类似，所以采用“合作互助式”与“练习法”教学。教师根据学生做题情况总结出步骤：计算 Δy ——考察 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y$ 为 0——判断连续性。

3) 函数在点 x_0 连续的 $\varepsilon-\delta$ 式定义

定义 3 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若对任意 $\varepsilon>0$，存在正数 δ，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 都有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续[2]-[3]。

$\varepsilon-\delta$ 式定义将连续性的直观感受锻造成精密逻辑架构：用 ε 设定函数值波动范围，用 δ 锁定自变量变化区间。每个量词都如钟表齿轮般环环相扣，彰显数学家以严格推理雕琢数学真理的工匠精神——在动态变化的函数世界中，用绝对的严谨构筑起确定性的桥梁。

注意：函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，不仅要求 $f(x)$ 在 x_0 点有定义，而且要求 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限等于 $f(x_0)$，因此这里在极限的“$\varepsilon-\delta$”语言叙述中把 “$0<|x-x_0|<\delta$”换成了“$|x-x_0|<\delta$”。

通过“对比法”教学，引导学生深刻理解概念的重要含义，告诫学生不能混淆。

借此点明“抓住事物本质，以不变应万变”的辩证唯物主义思想。虽然函数和数列表现形式不同，但数学家用统一的“精确控制”思想内核(通过任意小的 ε 来刻画无限逼近的过程)解决了问题。

例 2 证明函数 $f(x)=xD(x)$ 在点 $x=0$ 连续，其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数[2] [4] [5]。

证明：由 $f(0)=0$ 及 $|D(x)|\le 1$，对于任意的 $\varepsilon>0$，为使

$$|f(x)-f(0)|=|xD(x)|\le|x|<\varepsilon$$

只要取 $\delta=\varepsilon$，即可按 $\varepsilon-\delta$ 定义推得 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续。

4) 左右连续的概念

对于 $f(x)$ 在 x_0 的左、右极限的概念，我们给出左右连续的定义如下：

定义 4 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某左(右)邻域内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)\quad\left(\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)\right)$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 点左(右)连续[2] [3]。

5) 连续与左右连续的关系

由极限与单侧极限的关系不难得出：

定理 4.1 函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的充分必要条件为：$f(x)$ 在 x_0 点既左连续又右连续[2] [3]。

例 3 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\ge 0\\ x-2, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 的连续性[2] [4] [5]。

解 因为

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(x+2) = 2 = f(0)$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}(x-2) = -2 \neq f(0)$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 右连续，但不左连续，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续。

通过例题引导学生总结出一般考查分段函数的连续性时采用单侧连续判断。

4. 课程思政教学实施成效与反思

4.1. 课程思政教学实施成效

1) “价值塑造”方面，教学过程中通过课堂讨论法，引导学生体会社会主义核心价值观——和谐、友善。借助函数在某点连续的几种不同概念的描述，告诫学生学习、知识的积累需要付出时间和持久不懈的努力，妄图寻求捷径的想法是不科学的，只能事与愿违。

2) “知识传授”方面，通过直观图导入连续的概念，激发学生的学习兴趣，通过新旧知识的对比、举例练习以及课堂讨论，加强学生对知识的理解与掌握。

3) “能力培养”方面，通过本节课知识的传授，锻炼学生的实践能力、人际交往能力以及表达能力，让学生灵活地运用所学知识。

4.2. 课程思政教学实施反思

1) “课程思政”方面，本案例将思政元素有机融入教学各环节，旨在培养学生的辩证思维，深化其对唯物辩证法的理解，向学生传达不怕吃苦、勇于奉献的价值观。

2) “知识传授”方面，本案例以几何直观图激发学生的学习兴趣，引入函数连续的精确概念，教学过程中注重知识的前后衔接，兼顾理论知识与应用，使学生更容易接受新知识。

3) “能力培养”方面，本案例采用对比法、课堂讨论法、练习法与任务驱动法的教学方法进行讲授，系统地提升了学生的抽象概括能力和辩证思维能力。

基金项目

山西省高等学校科技创新项目(2024L304)；太原师范学院教学改革项目(JGLX25077)。

参考文献

[1] 费时龙, 李海青, 任洪光. 新形势下数学分析教学改革的探索与实践[J]. 阴山学刊, 2017, 31(1): 124-126.

[2] 华东师范大学数学系. 数学分析: 上册[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2010: 115.

[3] 同济大学数学系. 高等数学(第六版): 上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[4] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.

[5] 谢惠民, 恽自求, 易法槐, 等. 数学分析习题课讲义: 上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.