**Advances in Education** 教育进展, 2025, 15(12), 1792-1797
Published Online December 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2025.15122478

Hans汉斯

# 关于常数项级数课程教学创新性的研究

**李　琳**

沈阳航空航天大学理学院，辽宁 沈阳

收稿日期：2025年11月19日；录用日期：2025年12月22日；发布日期：2025年12月29日

## 摘　要

文章介绍了常数项级数在级数教学中的地位、作用、特点及重要性。对教学过程的创新性进行了深入的讨论，概述了常数项级数部分的基本内容和课程内容引入的方法，拓展了在教学过程中常数项级数的实际应用介绍，注重典型习题的举例和融入课程思政元素，并探讨了借助网络平台和AI工具引导学生深度参与课程内容学习的具体实施步骤。相应的教学过程创新性经验也可用于其他课程的教学，具有一定的可行性和较好的推广价值。

## 关键词

常数项级数，教学创新性研究，课程思政，AI教辅工具

# Research on the Innovation of Teaching in Constant Term Series Courses

**Lin Li**

College of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: November 19, 2025; accepted: December 22, 2025; published: December 29, 2025

## Abstract

**This paper introduced the status, role, characteristics, and importance of constant term series in series teaching. It deeply discussed the innovations in the teaching process. It outlined the basic content of the constant term series section and introduced the methods of introducing course content. In the teaching process, it expanded the practical application of constant term series. It emphasized the use of typical exercises as examples and incorporated ideological and political elements in the teaching process. It explored the detailed implementation steps of using online platforms and AI tools to guide students to deeply participate in course content learning. The corresponding innovative teaching process experience can also be applied to the teaching of other courses, with certain feasibility and good promotion value.**

文章引用: 李琳. 关于常数项级数课程教学创新性的研究[J]. 教育进展, 2025, 15(12): 1792-1797.
DOI: 10.12677/ae.2025.15122478

**Keywords**

**Constant Term Series, Innovative Research in Teaching, Ideological and Political Education in Course, AI Teaching Tool**



## 1. 引言

无穷级数源于数列极限理论，它将离散的数列项通过无限累加构建起连接离散与连续的桥梁，既是对“无穷”概念的具象化表达，也为数学从有限到无限的拓展提供了核心工具。常数项级数是无穷级数的起点与基石，其他的级数类型，如幂级数、傅里叶级数、函数项级数等均以常数项级数的理论为前提。常数项级数的理论结果为后续复杂级数的敛散性判定、求和运算提供根本理论依据，是无穷级数理论的“逻辑模板”，其定义、性质、判别法可直接迁移或拓展到其他级数类型。因此，对常数项级数部分的课程教学创新性研究具有十分重要的意义。

## 2. 课程基本内容及教学引入

常数项级数的基本内容围绕着定义、性质、敛散性判定及求和四大核心内容展开，是级数理论的基础框架。常数项级数的核心定义包括：1) 常数项级数的定义：由常数数列$\{u_n\}$构成的无穷项和表达式$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$叫做(常数项)无穷级数，其中$u_n$为级数的一般项[1]。2) 常数项级数的部分和：级数的前$n$项和称为级数的部分和，即$S_n=\sum_{i=1}^{n}u_i=u_1+u_2+\cdots+u_n$。3) 常数项级数的敛散性：若$\lim_{n\to\infty}S_n=S$ ($S$为有限常数)，则级数收敛，$S$为级数的和；若极限不存在(或为无穷)，则级数发散。

常数项级数的基本性质：1) 线性性质：收敛级数的线性组合仍收敛。2) 敛散性与有限项无关：去掉、添加或改变级数的有限项，不改变其敛散性(收敛时和可能变化)。3) 收敛级数的必要条件：若级数收敛，则$\lim_{n\to\infty}u_n=0$ (逆命题不成立)。4) 收敛级数的结合律：对收敛级数的项任意加括号，所得新级数仍收敛，且和不变(发散级数加括号可能收敛)。

常见的级数类型有正项级数、交错级数、任意项级数及一些特殊级数，如等比级数(几何级数)、调和级数等。敛散性判定方法：对于正项级数的判定可用比较判别法、比值判别法(达朗贝尔判别法)、根值判别法(柯西判别法)、积分判别法等；对于交错级数可采用莱布尼茨判别法进行判别。对任意项级数判别其是绝对收敛还是条件收敛。

对收敛级数求和的方法包括：直接求和方法，即利用部分和数列的极限求解，如等比级数求和；或采用间接求和方法，即利用已知级数的和，如几何级数、泰勒级数展开式；或通过线性运算、逐项求导、逐项求积公式等方法进行求和[1]。

课程内容教学引入：在授课过程中，为激发学生的学习兴趣，教师可从古希腊哲学家芝诺提出的经典悖论“阿基里斯追龟”问题[2] [3]入手。阿基里斯是古希腊的跑步健将，其跑步速度远超乌龟。假设乌龟先出发$S$米到达B点，阿基里斯才开始从A点追赶。当他跑完这$S$米时，乌龟已向前爬了$BB_1$米；当他再跑完这$BB_1$米时，乌龟又向前爬了$B_1B_2$米；当他跑完$B_1B_2$米时，乌龟又爬了$B_2B_3$米；……，如此循环下去，如图1所示，似乎他永远追不上乌龟。但在现实中，他一定能追上甚至超越乌龟。这个看似

矛盾的问题，核心就在于“无限个小段的和是否为有限值”，而这正是要学习的常数项级数的本质问题。通过引入有趣的问题达到引导学生思考的目的。

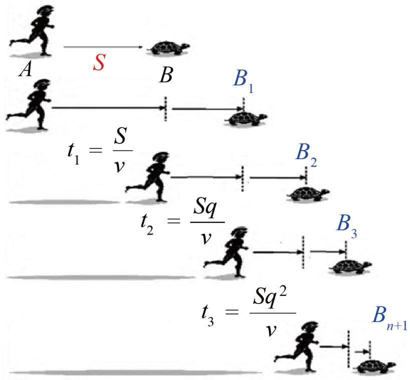


**Figure 1.** The process of Achilles chasing the tortoise
**图 1.** 阿基里斯追龟过程

可通过量化阿基里斯的追赶距离和所用时间来观察无限求和不一定是无限大，其关键在于看部分和是否趋近于固定值(收敛性)。如图 1 所示，设阿基里斯的速度为$v$，乌龟的速度为$qv$ $(0<q<1)$，追龟过程中，可求出他跑完AB段、$BB_1$段、$B_1B_2$段、……、$B_nB_{n+1}$段的时间分别为$t_1=\frac{S}{v}$、$t_2=\frac{Sq}{v}$、$t_3=\frac{Sq^2}{v}$、……、$t_{n+1}=\frac{Sq^n}{v}$。他追赶乌龟所用的时间为：

$T=t_1+t_2+\cdots+t_n+\cdots=\frac{S}{v}+\frac{Sq}{v}+\frac{Sq^2}{v}+\cdots+\frac{Sq^n}{v}+\cdots=\frac{S}{v}\left(1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots\right)$。由此可将该问题转化为讨论常数项级数中的等比级数(几何级数) $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots\ (a\neq 0)$的敛散性问题。

由部分和的定义可知，$S_n=\frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}$。当$|q|<1$时，级数收敛；当$|q|\geq 1$时，级数发散。因此，阿基里斯追上乌龟所用时间为$\frac{S}{v}\cdot\frac{1}{1-q}$，他一定可以追上乌龟。

本例通过分析追龟过程的本质拆解悖论，探讨了无限过程中的“有限总和”问题，从而引入常数项无穷级数相关概念，在激发学生学习兴趣的同时也可帮助同学们理解相关基本概念。

## 3. 在教学过程中拓展实际应用的案例

在对常数项级数部分的讲授过程中，不仅要关注对基本概念、性质、收敛性判别方法及求和方法的理论介绍，还要注意将相关的知识与学生所需学习的专业知识相结合，帮助学生从所学专业的角度理解其对应的实际应用，使得理论问题得以具象化呈现。

针对经济管理专业的学生，在其学习永续年金概念时，可借助等比级数来解释永续年金的数学模型[4]，将抽象的数学工具转化为实际的资产定价方法，永续年金是级数在金融领域的典型应用场景。在介绍项目净现值的计算时，其本质是有限项现金流折现级数的求和，核心是用有限项级数量化项目未来收益的价值。在考虑供需平衡下的价格波动变化趋势时，可借助交错级数量化累计影响，达到辅助判断价格波动趋势与累计收益的目的。若交错级数的项的绝对值逐渐减小(满足莱布尼茨收敛条件)，说明价格波动幅度收窄，可能趋于稳定；若绝对值持续扩大，说明波动加剧，风险升高。由上述应用场景可以看出，掌握级数工具可帮助管理者更精准地进行资金规划、投资决策与市场预测，是进行量化分析的重要手段。

针对理工科的同学讲解相关内容时，级数部分也有非常广泛的应用场景，如在计算机专业中，级数部分是关于数值计算、算法优化、模拟仿真部分的核心数学工具，可将复杂问题转化为可迭代、可近似的计算问题。编程中的数学库(如 C++的 cmath、Python 的 math 模块)和 MATLAB 的底层实现可通过泰勒级数展开转化为多项式求和问题；在信息专业中，对探测目标进行定位误差分析时，可借助泰勒级数将一阶权值推导至高阶，解决在低信噪比情况下定位精度差的问题[5]。在物理学中，级数是求解引力场计算、天体运动分析、辐射传输建模[6]的有力工具，可通过级数展开法将复杂天体物理方程近似为可求解的形式，为天体物理研究和观测解读提供关键支撑等。

## 4. 授课中注重典型习题举例和融入课程思政

在讲解常数项级数时，由于级数的类型非常丰富，而且判断级数敛散性的方法也十分多样，同学在刚接触相关内容时，最直接的反应就是要记的内容太多，知识显得比较零散，不好确定用何种方法判定所给级数的敛散性。因此，在授课过程中要注重讲解典型题目，做好定理间的类比和推广。可在详细讲解等比级数、调和级数和 $p$-级数($p > 1$)的敛散性后，再分别举例说明如何应用各种判别法判定级数的敛散性，如可用比较判别法判定 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ 的敛散性、用比值判别法判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的敛散性、用根值判别法判定 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$ 的敛散性、用部分和极限来判定级数 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n-1)}+\cdots$ 的敛散性、用柯西审敛原理判定 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ 的敛散性、用莱布尼茨判别法判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}$ 的敛散性等。

在收敛级数的性质中，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，其逆命题不成立，可通过介绍格兰迪级数[7] $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 来说明此问题。该级数因意大利数学家格兰(Guido Grandi)的深入研究而得名。其特殊之处在于“部分和震荡不收敛”，是常数项级数中极具代表性的发散级数。

瑞典数学家科赫(Koch)于 1904 年提出的科赫雪花是分形几何中最经典的图形之一[2] [3]。它的生成规则是以等边三角形为初始图形，将原边分为三段，以中间段为底边，向外作一个新的等边三角形并移除原边的中间段，保留新生成的三角形的两条腰，使原边变为由 4 段等长小线段组成的折线段。通过无限次重复上述步骤得到的图形如图 2 所示。

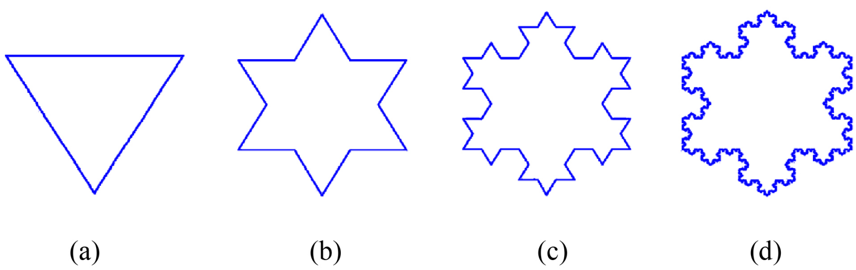


**Figure 2.** The formation process of Koch snowflake
**图 2.** 科赫雪花的生成过程

为方便计算，可设图 2(a)中的三角形边长为 $a$。观察图形特点，可得出 2(a)中图形的周长 $s_0=3a$，面积 $A_0=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$。图 2(b)中的图形周长为 $s_1=3\times 4\times\frac{1}{3}a$，面积为 $A_1=A_0+3\times\frac{1}{9}A_0$。图 2(c)中的图形周长为

$s_2 = 3\times\left(\frac{4}{3}\right)^2 a$，面积为 $A_2 = A_0 + 3\times\frac{1}{9}A_0 + 3\times\frac{1}{9}A_0\times\frac{4}{9}$。由此可推得第 $n$ 次迭代后，形成的图形周长为 $s_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n s_0$，面积为 $A_n = A_0 + \frac{1}{3}A_0 + \frac{1}{3}A_0\cdot\frac{4}{9} + \cdots + \frac{1}{3}A_0\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n$。

科赫雪花的周长 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$，面积 $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_0 + \frac{1}{3}A_0\left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^n + \cdots\right] = \frac{8}{5}A_0$。科赫雪花的核心特征是“自相似性”和“无限迭代生成”，其边界长度趋于无穷，但面积始终有限，体现了“有限空间中包含无限细节”的分形特性。该例子可拓展同学的知识面，帮助他们加深对常数项级数相关概念的理解。

在相关内容的教学中，可引入课程思政的内容。我国古代数学家在解决实际问题时也涉及到无穷级数的思想，如刘徽的割圆术[8]。他以圆内接正六边形为起点，每次将边数翻倍($6 \to 12 \to 24 \to \cdots \to 2^n \times 6$)，计算每次新增的小三角形面积。圆面积约等于初始正六边形面积与所有新增小三角形面积之和，随着边数的无限增加，总面积无限逼近圆面积，其过程等价于构造并逐步求和一个收敛的常数项级数，是常数项级数“无穷求和逼近定值”思想的早期实践，说明了古代中国数学已具备朴素的极限与无穷级数思维。在授课时，可借此例展现我国古代数学的领先程度，激发学生的民族自信心和自豪感，让学生感受在学习和科研过程中要有“循序渐进、精益求精”的治学精神，理解传统数学智慧对现代理论的启发意义。同时，还可推荐相关的数学史及科学家传记等资料，鼓励学生自主感悟家国情怀与科学精神。

## 5. 借助网络平台和 AI 工具引导学生深度参与课程内容的学习

近几年随着人工智能的飞速发展，许多网络平台和智能体的出现可有效帮助同学查找学习资料、方便同学进行自学并帮助老师组织教学[9]。

以雨课堂为例，教师可将自己的教案、PPT 资料和习题上传到平台。课前学生可通过调用智能 AI 学伴进行知识要点的了解，对即将学习的内容进行预习。在授课过程中，教师可打开学伴，讲到重点及难点部分，通过与学伴对话，生成详细的讲解内容，并将生成的内容发送至每位同学。可让 AI 学伴生成典型习题，随时进行课堂测验，让学生通过投稿方式积极参与课堂教学。教师可通过雨课堂的投稿系统，及时查看学生的课程参与度、对所授知识点的理解情况，具体了解每位同学的答题细节，从而判断学生对相关内容的掌握情况，便于教师随时根据学情调整授课难度和授课进度。课后，若同学有未理解透彻的部分，可根据雨课堂生成的课程回放有针对性地回看相关的讲解，记录未理解的地方并通过雨课堂与老师互动进行答疑解惑。学生也可通过学伴总结所学内容的关键问题、查看知识图谱了解常数项级数各个知识点之间的联系，从而加深对所学内容的理解。教师还可以不定期在雨课堂系统发布测验，了解学生完成测验的时间、所做题目的准确率以及学生的学习态度等。

除了雨课堂平台，学生还可选择豆包、KIMI、ChatGPT、DeepSeek 等工具预习常数项级数概念、敛散性基本判定法等相关内容，随时提问，由 AI 及时解答并推送典型例题。教师授课时可播放使用 GeoGebra 制作的“刘徽割圆术动态演示动画”展示正六边形→正 12 边形→正 24 边形逐步逼近圆的过程，同时用 AI 配音同步讲解割圆术与级数思想的关联。可引导学生利用 AI 工具编写级数求和代码，深刻体会级数思想在数值计算中的应用等。可用 DeepSeek 定制任务，延续学习效果。如学生向 DeepSeek 输入指令“根据常数项级数，生成敛散性判断基础题、设计级数在物理振动分析中的应用探究题和拓展题，附带解题步骤提示”等。指导学生使用 DeepSeek 汇总常数项级数的核心知识点，生成“常数项级数、敛散性判定、性质和实际应用”的知识图谱，方便学生复习。学生课后有疑问可随时通过 DeepSeek 咨询，它会以引导式提问帮助学生自主解决问题，而非直接给出答案。学生亦可通过在多个智能体之间的切换提问来检验

问题回答的正确性。

## 6. 结语

本文针对常数项级数部分教授过程中的教学创新性进行了研究。总结了常数项级数的定义、基本性质、敛散性判别方法等知识点，并探讨了增加学习趣味性问题的课程引入方法：在教学过程中结合学生所学的专业，有针对性地拓展级数部分的实际应用案例；注重选取典型例题讲解相关知识，并在授课过程中融入课程思政来激发学生的学习热情；结合网络平台和借助 AI 工具辅助同学学习，增加学生学习的主动性与课程教学的参与度，达到提高学生自主学习能力的目的。

## 参考文献


[1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第八版. 北京: 高等教育出版社, 2023.

[2] 邱宏. 常数项级数概念引入的一种教学设计[J]. 教育教学论坛, 2017(30): 200-201.

[3] 方卫东, 兰小华. 关于《高等数学》课的教学思考[J]. 中华文化论坛, 2009(7): 244-245.

[4] 石丽君. 与专业相结合的问题驱动式教学法在高职数学课堂上的应用——以年金计算为例[J]. 中国市场, 2015(24): 264-266.

[5] 蔡傲潮, 莫世奇, 陈峰, 姚晔东. 基于级数展开的位置误差加权定位方法[J]. 海军航空大学学报, 2024(39): 322-328.

[6] 汪宏七, 赵高祥. 在强烈各向异性散射大气中用离散坐标法进行辐射强度计算[J]. 中国科学, 1989(12): 1330-1339.

[7] 朱永婷, 吴奇明. 课程思政视域下“常数项级数”的教学案例[J]. 大学数学, 2023(39): 25-30.

[8] 李静, 寇冰煜. 基于 OBE 理念的高等数学概念课教学设计——以常数项级数的概念为例[J]. 高等数学研究, 2025(28): 120-122.

[9] 周震, 张婷婷, 刘艳丽, 司思. 人工智能在我国高校教育教学中的应用研究综述[J]. 中国现代教育装备, 2025(19): 20-23.