Advances in Education 教育进展, 2026, 16(1), 837-843
Published Online January 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2026.161115

矩法估计教学设计与实施

刘春芳

沈阳航空航天大学理学院，辽宁 沈阳

收稿日期：2025年12月5日；录用日期：2026年1月5日；发布日期：2026年1月12日

摘　要

矩法估计是概率论与数理统计课程中参数估计的基础方法。本文以航空航天工程案例为特色，结合思政教育元素，以问题导向式教学模式，设计了时长45分钟的课堂教学内容。旨在帮助学生掌握矩法估计的原理、步骤及应用，将思政教育目标与知识教学目标深度融合，既落实掌握矩法估计方法的知识目标，又达成培养创新思维、数据诚信、责任意识等素养目标。最终实现知识传授、能力培养与价值塑造三位一体的教学目标。

关键词

矩法估计，航空航天工程案例，创新思维，思政教育

Teaching Design and Implementation of the Method of Moments

Chunfang Liu

School of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: December 5, 2025; accepted: January 5, 2026; published: January 12, 2026

Abstract

The method of moments is a fundamental approach to parameter estimation in the course of Probability Theory and Mathematical Statistics. A 45-minute classroom teaching content is developed based on the aerospace engineering cases feature and integrating ideological and political education elements and adopting a problem-oriented teaching model design. It aims to help students master the principles, steps, and applications of the method of moments, and deeply integrate ideological and political education objectives with knowledge teaching objectives. This not only fulfills the knowledge goal of grasping the method of moments but also achieves the literacy goals of cultivating

文章引用: 刘春芳. 矩法估计教学设计与实施[J]. 教育进展, 2026, 16(1): 837-843.
DOI: 10.12677/ae.2026.161115

innovative thinking, data integrity, and a sense of responsibility. Ultimately, it achieves the trinity teaching goal of knowledge imparting, competence development and value shaping.

Keywords

The Method of Moments, Aerospace Engineering Cases, Innovative Thinking, Ideological and Political Education

1. 引言

概率论与数理统计是高等院校理工科专业的核心基础课程，参数估计作为该课程的核心模块，是连接理论知识与工程实践的关键纽带。矩法估计作为参数估计的入门方法，其原理简洁、实用性强，不仅是学生理解极大似然估计等进阶方法的基础，更是解决工程实际数据处理问题的重要工具[1] [2]。航空航天工程作为高精尖技术领域，对数据处理的准确性、可靠性及工程人员的责任意识有着极高要求。然而当前矩法估计教学多以纯理论推导为主，存在“重公式、轻应用”、“重知识、轻素养”的问题：一方面，抽象的数学概念与学生熟悉的工程场景脱节，导致学生难以理解方法的实际价值；另一方面，教学过程中缺乏思政教育的有机融入，未能充分发挥课程育人功能，难以满足新时代对工科人才“知识 + 素养”的双重培养需求[3] [4]。

为此，本文基于建构主义理论和 PBL (Problem-Based Learning)教学法，以问题为导向，以学生为中心创设情境，引导学生主动建构知识。本教学设计以矩法估计为教学核心内容，以航空航天工程案例为特色载体，结合思政教育元素，采用问题导向式教学模式，让学生在工程问题中感知矩法估计的实用价值，实现基于情境的意义建构知识，设计时长 45 分钟的课堂教学内容。教学设计围绕“原理讲解－案例应用－思政渗透”三层逻辑展开。首先，通过工程实际问题引出矩法估计的必要性。然后，系统讲解方法原理与步骤。最后，结合航空航天案例强化应用能力，并融入数据诚信、责任意识等思政元素。

本文的研究价值在于：既弥补了传统教学中理论与实践脱节的不足，帮助学生夯实矩法估计的知识基础；又实现了思政教育与知识教学的深度融合，助力学生树立严谨的科学态度和强烈的工程责任意识，为理工科课程思政教学提供可借鉴的实践范式。

2. 导入环节(10 分钟)

在概率论学习中，我们通常假定随机变量的分布已知并展开分析，但实际问题中常面临“总体分布形式已知、参数未知”或“总体分布形式未知，仅关注总体数字特征”的场景。例如：无人机电池续航时间 X 服从正态分布，但平均续航时间和波动程度未知；民航客机起飞滑跑距离受海拔高度、气象条件、机型载重等多重随机因素影响，其具体分布特征往往难以预先明确。然而，该参数的均值作为机场跑道设计可靠性评估、航班运行安全管控的核心指标(例如需确保均值与跑道长度的适配性以降低失效风险)，具有极高的工程实用价值。如何在分布未知的前提下精准估计这一均值，是航空运行与机场工程领域的关键问题。解决这类问题的关键是从总体中抽取样本，利用样本信息推断总体的未知参数，这就是参数估计的核心任务。

这里有个关键问题：样本是随机选取的，基于样本计算的平均值(样本均值)也会随之波动，必然与总

体均值的真值存在偏差。比如第一次抽 10 块电池测得平均续航时间是 28 分钟，第二次抽可能就是 23 分钟，这种偏差是随机的，无法完全消除。为了让估计结果更可靠，人们自然会思考：能否找到一个“合理区间”，让这个区间包含总体参数真值的概率达到一个预设标准(比如 95%，这就是后续会学到的“置信度”)？这种通过区间来界定参数范围的方法，就是区间估计。它把点估计的绝对误差，转化为“误差在可控范围内”的概率保证——比如 95%置信区间意味着，反复抽样构建这样的区间，有 95%的区间能包含参数真值。点估计和区间估计是参数估计的两种基本方法。

本节课学习参数估计的基础方法点估计，其核心思想：设总体 X 的分布含有未知参数 θ，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应的样本观测值，构造一个适当的统计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 作为参数 θ 的估计量，代入样本观测值便得到估计值 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 作为参数 θ 的估计值。

提出引导性问题：① 如何合理构造统计量？这是点估计的关键；② 参数的估计值是否唯一？通过问题引发思考，自然引出点估计的两大常用方法——矩法估计和极大似然估计，本节课重点学习第一种经典方法：矩法估计。

【思政融入】从点估计到区间估计，体现了发现不足、优化创新的思维。点估计可能存在偏差，区间估计通过控制置信度降低误差，启示学生面对问题不能墨守成规，要以发展眼光探索更优方案，这种创新精神是统计学乃至各领域进步的核心动力。这也是我们学习统计方法时需要培养的核心素养。

3. 核心讲授：矩法估计(30 分钟)

3.1. 矩法估计背景(2 分钟)

矩法估计由英国统计学家皮尔逊于 1900 年提出，是参数估计中最基础、应用最广泛的方法之一[5] [6]。在实际问题中，其优势在于原理简单、计算简便。它既是复杂估计方法的理论基础，又适用于经济数据分析、生物统计、工程质量控制等多个领域，尤其贴合航空航天等工程场景的参数估算需求。

教学关键：引导学生理解矩法估计的本质，避免死记硬背，聚焦如何用样本特征推断总体参数的核心逻辑。

3.2. 理论基础：辛钦大数定律及其推论[1] (5 分钟)

(1) 辛钦大数定律：设随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是相互独立服从同一分布，且具有数学期望 $E(X_k) = \mu, k = 1, 2, \cdots$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$$

即 $\bar{X}$ 依概率收敛于参数 μ。

(2) 推论：设随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是相互独立服从同一分布且具有数学期望 $E(X_i^k) = \mu_k, k = 1, 2, \cdots$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k - \mu_k\right| < \varepsilon\right) = 1$$

记 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$，即 A_k 依概率收敛于 μ_k。

解读：当样本容量足够大时，样本矩会无限接近总体矩。而多数总体分布的参数(如正态分布的 μ 和 σ^2)与总体矩存在明确函数关系，因此可通过样本矩替代总体矩构建方程，求解未知参数，这是矩法估计的核心逻辑。

3.3. 案例导入：无人机电池续航参数估计(7 分钟)

案例：结合航空特色，选取大疆 Mini 4 Pro 智能飞行电池的极限续航测试数据(单位：分钟)：28，25，23，15，40，36，35，26。假设续航时间服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$\mu$ 和 σ^2 未知，如何通过样本估计这两个参数？

【思政融入】续航数据的精准估计直接影响无人机作业安全，数据造假、估算偏差可能导致飞行故障，引导学生树立数据诚信意识和实事求是原则；同时，航空设备参数估算关乎公共安全与社会责任，强化学生的严谨治学态度。

3.3.1. 问题导向式引导估计总体均值 μ

提问：μ 与总体的哪个矩相关？(总体一阶原点矩 $E(X)=\mu$)

依据辛钦大数定律，样本一阶原点矩 $\bar{X}$ 依概率收敛于 $E(X)$，因此令 $E(X)=\bar{X}$ (1)，得 μ 的矩估计量 $\hat{\mu}=\bar{X}$。样本一阶原点矩 $\bar{X}$ 就是一个非常好的可以估计参数 μ 的样本统计量。这就解决了矩法估计的核心问题。代入样本观测值，就可以得到参数的估计值。

代入样本数据：$\hat{\mu}=28.5$ (分钟)。

3.3.2. 问题导向式引导估计总体方差 σ^2

提问：σ^2 与总体的哪个矩相关？(总体二阶中心矩 $D(X)=\sigma^2$)。

回顾：$D(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$ (2)，需先估计总体二阶原点矩 $E\left(X^2\right)$，由推论，样本二阶原点矩 $A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $E\left(X^2\right)$，令 $E\left(X^2\right)=A_2$，代入 σ^2 的表达式得：

$\hat{\sigma}^2=A_2-\left(\bar{X}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=\frac{n-1}{n}S^2$，即

$$\hat{\sigma}^2=\frac{n-1}{n}S^2$$

代入样本数据：参数 σ^2 的矩法估计值 $\hat{\sigma}^2=57.75$。

【启发思考】若总体含 k 个未知参数，需用前 k 阶样本矩替代对应总体矩，构建 k 个方程求解——引出矩法估计的一般步骤。

3.4. 矩法估计的一般步骤(5 分钟)

设总体 X 的分布含 k 个未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$，当总体 X 为连续型总体，其概率密度函数为 $f\left(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$；或 X 为离散型总体，其分布律为 $P(x)=p\left(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$，其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 是未知参数(待估参数)，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，若总体 X 的前 k 阶矩存在，有 $\mu_i=E\left(X^i\right)=\mu_i\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$，$i=1,2,\cdots,k$，通常总体的前 i 阶矩是未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的函数。步骤如下：

(1) 定个数：明确待估参数的个数 k；

(2) 求总体矩：计算总体 1~k 阶原点矩 $\mu_i=E\left(X_i\right)=g_i\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$ ($i=1,2,\cdots,k$)，若某阶矩与参数无关，需延伸至 $k+1$ 阶矩；

(3) 建方程组：用样本 i 阶原点矩替代总体 i 阶矩，构建矩方程组：

$$\begin{cases}\mu_1\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)=A_1\\ \mu_2\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)=A_2\\ \qquad\vdots\\ \mu_k\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)=A_k\end{cases}$$

(4) 解方程组：求解上述方程组，得

$$\begin{cases}\hat{\theta}_1=\theta_1\left(A_1,A_2,\cdots,A_k\right)\\ \hat{\theta}_2=\theta_2\left(A_1,A_2,\cdots,A_k\right)\\ \qquad\vdots\\ \hat{\theta}_k=\theta_k\left(A_1,A_2,\cdots,A_k\right)\end{cases},$$

即为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的矩估计量；代入样本观测值可得矩估计值。

【注意】矩估计可能存在不唯一性：例如泊松分布 $P(\lambda)$ 的均值和方差均为 λ，既可用样本均值(一阶矩)估计 λ，也可用样本方差(二阶中心矩)估计 λ，需结合实际场景和统计性质选择最优估计量。

3.5. 巩固应用：例题解析(8 分钟)

例 1 航空发动机故障次数估计。

设某航空发动机出现故障的次数 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta-2\theta^2$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 是未知参数。

求 θ 的矩法估计量；

若已知取得样本观测值为 0，2，1，2，2，求 θ 的矩法估计值。

教师思考：用步骤化拆解降低学习难度，航空发动机案例的选取既贴合专业，又能通过航空发动机出现故障的次数的背景，强化数据计算需精准的严谨意识，让学生及时巩固方法，培养独立解题能力。

解：(1) 本题目只有一个未知参数，故只需要建立一个方程。

① 求出总体的一阶原点矩 $E(X)=3-4\theta$，

② 建立矩方程，令 $E(X)=\bar{X}$，即解方程 $3-4\theta=\bar{X}$，

③ 解方程，$\hat{\theta}=\dfrac{3-\bar{X}}{4}$ 是参数 θ 的矩法估计量。

(2) 当把样本观测值代入，即得参数 θ 的矩法估计值 $\hat{\theta}=0.4$。

【思政融入】航空发动机故障估计直接关乎飞行安全，计算需“零误差”，严谨是工程师的第一素养。强化学生数据计算零误差的严谨意识。

例 2 均匀分布参数估计

设总体 X 服从参数为 a,b 的均匀分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，求参数 a,b 的矩法估计量。

解：本题目有两个未知参数，故需要建立两个方程。

① 求出总体的一阶原点矩 $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$，二阶中心矩 $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$，

② 建立矩方程组，令 $\begin{cases}E(X)=\bar{X}\\ D(X)=\dfrac{n-1}{n}S^2\end{cases}$，

③ 解方程组得，$\begin{cases}\hat{a}=\bar{X}-\sqrt{\dfrac{3(n-1)}{n}}S\\ \hat{b}=\bar{X}+\sqrt{\dfrac{3(n-1)}{n}}S\end{cases}$ 是参数 a,b 的矩法估计量。

4. 探究“异常数据处理”思辨环节(3 分钟)

4.1. 场景构建

给出民航客机起落架承重测试数据(单位：吨)：12.5，12.8，12.6，12.7，18.2，12.9 (假设承重设计标准与数据分布匹配，18.2 为明显异常值)，任务是用矩法估计总体均值以验证承重是否达标。

4.2. 分组讨论

两组分别持观点——A 组“剔除异常值，因 18.2 可能是测试误差，否则会高估承重风险”；B 组“保留异常值，因航空数据需完整，异常可能反映结构隐患”。

4.3. 观点碰撞

每组派代表阐述理由，教师引导聚焦核心矛盾“数据准确性 vs 数据完整性”“个人判断 vs 工程规范”。

4.4. 思政升华

总结“异常数据处理三原则”——① 先查源头：联系测试人员确认是否为仪器故障/操作失误(培养严谨求证习惯)；② 再守规范：若为真实数据，需纳入分析并追溯异常原因(强化“数据即责任”意识)；③ 终保安全：航空领域无“小异常”，任何数据决策都要以生命安全为底线(深化工程责任担当)，实现价值认同从“说教”到“内化”。

5. 课堂小结与作业布置(5 分钟)

5.1. 小结

矩法估计的核心是样本矩替代总体矩，理论基础为辛钦大数定律，步骤简洁、适用性广(仅需总体矩存在)。但需注意其局限性：小样本下估计精度较低，可能存在估计量不唯一的情况，后续可通过极大似然估计等方法优化。

5.2. 作业

拓展应用：强化工程场景下的参数估计应用能力。

某民航客机起飞滑跑距离服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，现有 10 组测试数据(单位：米)：2100，2050，2200，2150，2080，2120，2180，2090，2130，2110。试用矩法估计总体均值 μ 和方差 σ^2。

6. 总结

本文围绕概率论与数理统计课程中的矩法估计教学展开，针对传统教学“理论与实践脱节”“知识与素养割裂”等问题，基于建构主义和 PBL 教学法构建了“航空航天案例为载体、思政元素为内核、问题导向为方法”的课堂教学设计。该教学设计通过三层核心逻辑实现教学目标：以航空航天工程实际问题为切入点，将抽象的矩法估计原理与工程场景结合，有效降低了学生对数学方法的理解门槛，落实了“掌握原理、步骤及应用”的知识目标；以数据诚信、责任意识、创新思维培养为落脚点，将思政教育有机融入案例分析与实践应用环节，实现了“知识传授”与“价值引领”的同频共振，达成了素养培育目标；以问题导向式教学贯穿全程，通过“提出工程问题－推导理论方法－解决实际问题”的闭环设计，激发了学生的主动思考能力，提升了教学效果。

实践表明，该教学设计既弥补了传统矩法估计教学的不足，让学生体会到数学方法在航空航天工程

中的实用价值，又充分发挥了课程思政的育人功能，为工科基础课程的教学改革提供了可操作、可复制的实践方案。未来可进一步拓展案例覆盖范围，结合虚拟仿真技术丰富教学形式，开展长期教学效果跟踪研究，持续优化教学设计，助力理工科人才“知识、能力、素养”的协同提升。

基金项目

职业教育内涵建设，编号：320125001。

参考文献

[1] 闻良辰, 主编. 概率论与数理统计[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2023: 3.

[2] 盛骤, 主编. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020: 11.

[3] 李明泉. 浅析矩估计法的教学[J]. 济南职业学院学报, 2009(2): 79-81.

[4] 刘春芳. 概率论与数理统计课程创新教学研究[J]. 创新教育研究, 2025, 13(10), 527-533. https://doi.org/10.12677/ces.2025.1310822

[5] 王颖. 矩估计法的教学课堂设计[J]. 佳木斯职业学院学报, 2016(7): 275-276.

[6] 宋丽娟, 王开发, 罗明奎, 等. 矩估计法的微课堂教学设计[J]. 数理医药学杂志, 2016, 29(2): 315-316.