Advances in Education 教育进展, 2026, 16(2), 326-330
Published Online February 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2026.162300

Hans汉斯

两个关于幂级数及其和函数收敛性问题的教学探讨

刘立华

盐城师范学院数学与统计学院，江苏 盐城

收稿日期：2025年12月29日；录用日期：2026年1月26日；发布日期：2026年2月4日

摘　要

幂级数及其和函数的性质是高等数学教学中的难点之一。本文主要探讨日常教学实践中遇到的问题。通过讨论发现，核心问题源于对和函数定义的误解。因此，作者认识到重视学生提出的问题的重要性，并尝试采用适当方法解答疑问，从而提升课堂教学效果。同时，这一过程也有助于教师改进教学技能，并培养高等数学教学中概念意象渗透原则的意识。

关键词

幂级数，收敛区间，逐项可积，连续

Two Teaching Discussions on the Convergence of Power Series and Their Sum Functions

Lihua Liu

School of Mathematics and Statistics, Yancheng Normal University, Yancheng Jiangsu

Received: December 29, 2025; accepted: January 26, 2026; published: February 4, 2026

Abstract

Power series and the properties of their sum functions represent one of the challenging teaching points in advanced mathematics. This article primarily discusses issues encountered during routine teaching practice. Through discussion, it was discovered that the core issue stems from a misunderstanding of the definition of the sum function. Consequently, the author recognizes the importance of valuing questions raised by students and attempts to use appropriate methods to address their queries, thereby enhancing classroom teaching effectiveness. Simultaneously, this process also helps teachers improve their teaching skills and fosters an awareness of the permeation of the

文章引用：刘立华. 两个关于幂级数及其和函数收敛性问题的教学探讨[J]. 教育进展, 2026, 16(2): 326-330.
DOI: 10.12677/ae.2026.162300

concept imagery principle in advanced mathematics instruction.

Keywords

Power Series, Convergence Interval, Integrable Term by Term, Continuous

1. 引言

由阿贝尔定理[1]以及柯西－阿达玛定理[2]知道，通常的幂级数都有收敛半径 R (这里的 R 可以是 $+\infty$)，除了幂级数的收敛半径 $R=0$ 的特殊情况外，一般的幂级数的收敛区间为 $(-R,R)$，在收敛区间内，幂级数及其和函数具有良好的性质，如幂级数在收敛区间内具有连续性，逐项可导性，逐项可积性，和函数在收敛区间内具有连续性，任意阶可导等。对于高数的教学而言，这些性质的证明在平时的教学中一般不予证明，主要以应用为主[3]-[5]。然而在教学实际中学生提出的问题，作为教师本人还需要对幂级数和函数的定义要有更加清晰的了解，以便于给学生更好的答疑解惑。

2. 幂级数及其和函数性质的教学探讨

在现行广泛选用的同济(第八版)高数教材中，笔者先列出书本上关于幂级数函数的三个性质，然后主要针对学生对于性质 1 和 2 提出两个问题作教学探讨。

性质 1： 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域上 I 上连续。

性质 2： 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域上 I 上在其收敛域上可积，并有逐项可积公式

$$\int_0^x s(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \left(x \in I\right), \tag{2.1}$$

逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径。

性质 3： 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，且具有逐项求导公式

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \left(|x| < R\right), \tag{2.2}$$

逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径。

对于上述的性质 1，2，3 通常在收敛区间内的讨论是容易的，然而幂级数及其和函数在收敛区间的端点处性质的教学是个难点，理论上的分析在[2]中已经有较完善的叙述，然而本文主要以问题提出和举例说明的方式进行阐述。接下来，我们假设幂级数的收敛半径为 $R>0$，则收敛区间为 $(-R,R)$，收敛域有四种可能，分别为：$(-R,R),(-R,R],[-R,R),[-R,R]$。

问题 1： 性质 1 表明和函数 $s(x)$ 在幂级数的收敛域上是连续的，然而如果幂级数的收敛区间是 $(-R,R)$，而和函数 $s(x)$ 在 $x=R$ ($x=-R$)处存在左(右)连续，是不是意味着幂级数本身在 $x=R$ ($x=-R$)处收敛？

对于问题 1，我们似乎可以举一个例子表明和函数 $s(x)$ 在 $x=R$ （$x=-R$）处左(右)连续不意味着幂级数本身在 $s(x)$ 处收敛。例如设幂级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 收敛区间为 $(-1,1)$，收敛域亦为 $(-1,1)$，易知其和函数为

$$s(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n,\quad x\in(-1,1), \tag{2.3}$$

显然函数 $s(x)$ 在 $x=-1$ 处是连续的，而上述等式右端的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $x=-1$ 处不收敛。这里再举一个例子，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$，收敛域为 $(-1,1)$，其和函数为

$$s(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^x x^{2n},\quad x\in(-1,1), \tag{2.4}$$

显然(2.4)左端的和函数 $S(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，故在端点 $x=\pm1$ 处连续，然而等式右端其幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ 在 $x=\pm1$ 处发散。所以性质 1 表明了幂级数在收敛区间的端点处收敛，意味着和函数在该端点处是单侧连续的，反之似乎不成立，即和函数在幂级数收敛区间的端点处单侧连续，推导不出其幂级数在该端点处收敛。然而，仔细观察式(2.4)对等式两边(2.4)两边分别取在 $x=-1$ 处的右侧极限，于是得到

$$\frac{1}{2}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-x}\neq\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\infty,\quad x\in(-1,1), \tag{2.5}$$

对于等式(2.4)而言，是对于所有的 $x\in(-1,1)$ 恒成立，为什么等式(2.4)两边取在 $x=-1$ 处的右侧极限就不相等了？当然我们可以把这种结果作为问题 1 的回答，但是仔细思考，总是令人不安!这也是在教学过程中所遇到的问题，学生问了该问题之后，作为教师如何合理地回复？在实际教学中，该问题实际上涉及到极限顺序的交换问题，即探讨在幂级数收敛区间的端点的极限顺序是否可以交换，也就是说等式 $\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to1^-} x^n$ 是否成立？事实上，我们对和函数本身的理解有问题，幂级数的和函数实际上是幂级数部分和 $s_n(x)$ 的极限，也就是说幂级数(2.4)左端的和函数是

$$s(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} x^i=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x},\quad x\neq1. \tag{2.6}$$

即于是实际上是讨论如下等式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{2.7}$$

在收敛区间的端点 $x=\pm1$ 的单侧极限是否存在。根据文献[2]，可以证明等式(2.7)等式的左端(右端)在收敛区间的端点处收敛，都可以导致右端(左端)在相应的端点处收敛，并且两边在该端点处取单侧极限，两边相等。可以容易看出部分和 $s_n(x)$ 的极限 $s(x)$ 表达式如下

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x}=\begin{cases}\text{极限不存在}, & x=-1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & x\in(-1,1),\\ \infty, & x=1.\end{cases}$$

对于刚才列举的第二个例子(2.4)也可以作类似的解释。由以上的讨论得到问题 1 的结论:问题 1 中不

必讨论所谓的逆命题。本质上是讨论幂级数在收敛区间的端点出的极限顺序的交换问题。而我们之所以产生两个所谓的反例事实上是对幂级数和函数的理解有错误。

问题 2：对于性质 2 说明幂级数在收敛域上具有逐项可积性，逐项可积后的新级数的收敛域是包含原级数的敛域。但是逐项积分后和函数在端点处连续是否意味着逐项积分后级数在该端点处收敛呢？例如考虑幂级数

$$\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+1)x^n,\quad x\in(-1,1), \tag{2.8}$$

对于任意的 $x\in(-1,1)$，由性质 2，对式(2.8)两边同时积分，得到

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x&=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+1)x^n\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}(n+1)x^n\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n+1}=\frac{x}{1+x},\end{aligned} \tag{2.9}$$

观察(2.9)得到，逐项积分后的新级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n+1}$ 的收敛域为 $(-1,1)$，而其和函数 $\frac{x}{1+x}$ 在端点 $x=1$ 处连续，故在端点 $x=1$ 处左侧连续，而其幂级数在 $x=1$ 处发散。(2.9)似乎表明了

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n+1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x}{1+x}=1/2$$

但是极限 $\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n+1}$ 不存在。这里似乎又产生了一个矛盾。事实上，对于问题 2，实际上和问题 1 一样，主要是对幂级数和函数的定义理解有误，对于(2.9)的右端应该修正为

$$\int_0^x\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x-(-1)^{n-1}x^n}{1+x}=s(x), \tag{2.10}$$

于是幂级数(2.8)积分后的和函数 $s(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上是收敛的且 $s(x)=x/(1+x)$ ，而在 $x=\pm1$ 处发散。也就是说问题 2 本身不必讨论所谓的逆命题，之所以找出所谓的逆命题不成立的反例，原因在于对幂级数和函数本身的理解有误。

3. 结语

关于幂级数内容的教学，性质 1，2，3 的掌握以及熟练应用是教学的难点之一。本文所讨论的两个问题，本质上是关于函数项级数极限的交换问题，具体表现在幂级数在有限收敛区间端点处的收敛性和其和函数在该端点处的单侧连续性之间的关系。而问题 1 和问题 2 中提出的所谓的两个逆命题本身是关于对幂级数和函数定义的准确理解。考虑幂级数的收敛性等价于考虑和函数的收敛性，在教材[2]中有非常清晰的论述。通过对于幂级数的讨论发现在实际教学中要重视学生提出的每一个有价值的问题，并且从学生和问题本身出发，努力挖掘问题背后的矛盾点，清晰有力地为学生答疑解惑同时也有益于提高教师的教学能力。最后我们也认识到在高数教学中，学生对于数学概念的理解与学生个人的经历相关，学生在提出问题的过程中正是数学概念由抽象到具体的转化，这正是在认知神经学中所提出的概念意像认知原理[6]的一次生动的体现。另外在与学生的互动中，同时也加深了老师与学生的互动，帮助学生对和函数的认知有了清晰的重构，即所谓幂级数的和函数就是在收敛域上幂级数部分和的极限，至于其和函

数的解析表达式是初等的，以及其解析表达式在幂级数的收敛域外还是连续甚至是可导的，这是表明幂级数对于初等函数的表示有一定的局限性。

参考文献

[1] 同济大学数学科学学院. 高等数学[M]. 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2023.

[2] 张筑生. 数学分析新讲[M]. 北京: 北京大学出版社, 2012.

[3] 韩建新. $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 型幂级数收敛域的求法[J]. 高等数学研究, 2022, 23(5): 10-12.

[4] 寇冰煜, 毛磊, 张燕, 马凤丽. 幂级数收敛半径的计算[J]. 高师理科学刊, 2021, 41(3): 71-73.

[5] 阳平华, 张清平. 对幂级数性质的分析研究[J]. 黑龙江科学, 2022, 13(21): 96-98.

[6] Sfard, A. (1991) On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, **22**, 1-36. https://doi.org/10.1007/bf00302715