Advances in Education 教育进展, 2026, 16(2), 1193-1198
Published Online February 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2026.162420

基于APOS理论的“函数概念”的教学设计

于陆洋[1]，朱晓丽[2]

[1]扬州大学数学学院，江苏 扬州
[2]扬州职业技术大学数学科学学院，江苏 扬州

收稿日期：2026年1月13日；录用日期：2026年2月14日；发布日期：2026年2月24日

摘 要

函数是高等数学的基础与逻辑主线，贯穿高等数学始终。既是高等数学的研究对象，也是实现各领域理论与应用相转化的关键工具。本文深入分析了理解函数的教学难点，以函数的概念为例，运用APOS理论开展教学设计研究，为突破这一教学重难点提供实践路径与参考方案。

关键词

APOS理论，函数概念，教学设计

Instructional Design of the “Function Concept” Based on the APOS Theory

Luyang Yu[1], Xiaoli Zhu[2]

[1]School of Mathematics, Yangzhou University, Yangzhou Jiangsu
[2]School of Mathematical Sciences, Yangzhou Polytechnic University, Yangzhou Jiangsu

Received: January 13, 2026; accepted: February 14, 2026; published: February 24, 2026

Abstract

The function serves as the foundation and logical thread of higher mathematics, running through the entire discipline. It is not only the core research object of higher mathematics but also a key tool for transforming theories into applications across various fields. This paper conducts an in-depth analysis of the pedagogical difficulties in understanding functions. Taking the concept of functions as a case study, it explores instructional design based on the APOS theory, aiming to provide insights for overcoming this prominent teaching challenge.

Keywords

APOS Theory, Function Concept, Instructional Design

文章引用: 于陆洋, 朱晓丽. 基于 APOS 理论的“函数概念”的教学设计[J]. 教育进展, 2026, 16(2): 1193-1198.
DOI: 10.12677/ae.2026.162420

1. 课题提出

高等数学中的函数概念是学生从初等数学迈向高等数学的关键节点，其“集合对应说”的抽象定义是高等数学初期极具挑战性的概念之一。长期以来，心理学与数学教育领域对数学学习的研究多聚焦于初中、高中阶段，虽在数学思维与能力培养方面取得了一定成果，但针对高等数学函数概念的研究相对匮乏。一直以来，函数是中学数学的核心内容[1]。众多学者指出基于 APOS 理论实施中学数学概念教学，有利于学生完整经历数学概念的形成过程[2] [3]。濮安山等学者在调查高中生对函数概念的理解时发现：高中生在函数概念的建构过程中，多数仅能达到 APOS 理论中的“操作阶段”与“过程阶段”，对“对象阶段”和“图式阶段”的认知较为薄弱[4]。而高等数学的函数概念以高度抽象性进一步加剧了学生的学习难度。基于此，本文以高等数学课程中的函数概念为研究对象，运用 APOS 理论开展教学设计研究，为高等数学概念教学的理论创新与实践优化提供参考。

2. 教学解析

2.1. 内容剖析

高等数学函数概念是高等数学的核心基础，是学生从初等数学过渡到高等数学的关键节点，是微积分、线性代数、概率论等学科的基础，同时也是学生将现实问题与数学工具建立联系的工具。函数的概念位于《高等数学(第四版)》第一章第一节，在介绍函数概念之前，首先引入的是集合与映射的概念，函数的概念是在集合和映射这两个内容的基础上得到的。

“函数的概念”从现实生活中的对应现象导入，以探求与建构集合间唯一对应关系的数学模型为主线展开：

建构集合间唯一对应关系现象的数学模型

→如何刻画生活和数学中的对应现象(如“日期→最高温度”的对应关系)

→如何刻画“非数集与数集、非数集与非数集的对应”(集合概念的推广)

→如何抽象出“两个非空集合 + 唯一对应法则”的共同特征(函数的形式化定义： $f: A \to B$)

→如何分析函数的本质要素(定义域、对应法则、值域的辨析与三要素的决定性作用)

→如何将函数视为独立对象(函数相等性判断、函数的运算与性质分析)

→不同函数模型之间的关系(数集函数与非数集函数的共性与差异)

→这些模型能刻画哪些现实问题？(如物理运动的“位移－时间”函数)

→更一般化的函数应用模型是什么？(复合函数、反函数、多元函数等延伸)

在设计教学过程时，从学生熟悉的高中“变量说”出发，通过操作阶段的生活与数学情境对应感知、过程阶段的定义抽象与新旧概念对比、对象阶段的函数性质与运算的对象化分析、图式阶段的知识网络与学科关联整合，逐步实现从“具体操作”到“抽象对象”再到“系统图式”的认知发展。

2.2. 学情分析

对于大一的本科生，普遍掌握高中阶段的“变量依赖型”函数定义，能熟练计算具体函数(一次、二次、三角函数)的函数值、绘制图像，解决“求解析式、解方程、求最值”等问题，这些都是对大学阶段

的有利基础。高等数学中的函数概念是“集合对应说”的抽象定义，无法将高中函数与“集合、映射”等概念关联，也意识不到“定义域、对应法则”是函数的本质要素，从而导致对函数概念的构建和理解有一定的困难。认知水平方面，正处于“具体形象思维”向“抽象逻辑思维”的过渡阶段，面对高等数学函数的抽象性，容易陷入认知瓶颈[5]。

2.3. 教法思考

基于学习内容与学生的已有认知基础，从知识内容方面考虑，定义由“变量依赖型”向“集合对应型”的抽象跃迁。这种跃迁不仅是形式上的拓展，更是认知上的质变——从“函数是变量间的变化过程”升级为“函数是独立的数学对象”。这一矛盾是学生后续理解函数性质(连续性、可导性)、掌握微积分工具的逻辑前提。“如何建构刻画更一般的两个非空集合间对应关系的数学模型”是研究函数概念的认知需求，“集合对应说”的函数定义是进一步学习的对象。20 世纪 90 年代起，APOS 理论被引入到中国的数学界，它是为数不多的以数学学科为特点建立的教学理论[6]，该理论认为学生在学习概念的过程中需要经过四个阶段，分别是活动(Action)、过程(Process)、对象(Object)以及图式(Schema) [7] [8]。由此，运用该理论将学习内容置于学生认知基础的框架下进行合理的教学设计。具体地，将生活情境案例、几何直观工具和小组探究活动作为学习函数概念的有力支撑，用“具体情境操作－抽象过程概括－对象性质分析－图式体系整合”的方法研究函数的集合对应本质，紧扣 APOS 理论四个环节，设置系列“问题链”和“探究任务”，教学设计遵循 APOS 理论，契合学生从具体到抽象的知识建构过程。

3. 过程设计

3.1. 创设情境，活动建构概念

问题 1：在日常生活中，存在很多“一个事物对应另一个事物，且每个事物都有唯一结果”的现象，即一一对应关系，你能找到类似的实例吗？(预设：日期对应气温，学生姓名对应学号，超市商品数量对应总价等。追问：以上现象有什么共同的特征？)

探究 1：如下几个现实情景。情景 1：某高校大一(1)班的学生成绩登记表；情景 2：某地 1 日~15 日的最高气温走势图；情景 3：数学中的二次函数 $y = x^2$ 的图像。

活动：分别写出三个情景中集合 A，B 并指出集合 A，B 中元素类型，同时用→表示情景中具体的元素对应关系。

小组讨论：3 个情景是否分别满足“存在两个非空集合”，“元素之间有对应法则”，“集合 A 中每个元素对应 B 中唯一的元素”？

引导学生归纳上述生活与学习中的这些现象具有“两个集合之间，一个元素对应唯一元素”的特点，生活中这种“唯一对应”的现象，是函数概念的核心本质，从而引出课题“高等数学中的函数概念”。

【设计意图】用校园与生活中熟悉的实例唤醒学生对“唯一对应”现象的感知，引导学生列举实例，帮助学生体会这种对应关系的广泛性，抽象共同特性——“两个非空集合间的唯一对应”，揭示函数概念的本质。当教师选择学生熟悉又普遍存在的对应现象引入概念时，可以抓住学生的注意力，激发学习的兴趣，为后续函数概念建构奠定认知基础。

3.2. 探究发现，过程归纳整理

问题 2：数学是自然规律的高度概括与抽象，你能用数学的语言刻画“一个元素对应唯一元素”这种现象的规律吗？

预设：

情景 1 中，每个学生学号对应唯一的成绩；

情景 2 中，每一个日期对应一个最高气温；

情景 3 中，每一个实数 x 对应唯一非负实数 y，如 $x=-2$， $y=4$， $x=-1$， $y=1$。

结论：以上场景都包含两个非空集合，存在对应法则，使得第一个集合中任意一个元素，在第二个集合中都有唯一元素与之对应。

问题 3：面对这一现象，我们能否提出一个概念(或者模型) 来刻画它们呢？

【函数的概念】设数集 $D\subset R$，称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数，记为 $y=f(x),x\in D$，其中 x 为函数的自变量，y 称为函数的因变量，D 称为函数的定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$。当 x 取遍定义域 D 中的所有数值时，对应的函数值的全体构成的集合称为函数 $f(x)$ 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即 $R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$。

【设计意图】学生亲身体验数学概念的形成过程是数学概念建构的有效方法，外在的动作催生内在的思维。本阶段对三个情景进行深入分析，通过对三个情景的反复分析，让学生加强对函数概念的三个基本元素的认识，并不断进行分析、内化，通过个体提问、小组讨论和同桌交流等方式，层层深入，引导学生自主发现函数概念的数学特征。

问题 4：对照函数概念的定义，能否将三个情景具体表示出来？

观察和思考：

对于情景 1，A={学生学号}，B={成绩}，f：学生学号→成绩；

对于情景 2，A={日期}，B={最高气温}，f：日期→最高气温；

对于情景 3， $A=\{x\mid x\in R\}$， $B=\{y\mid y=x^2,x\in R\}$， $f:x\to x^2$。

教师给出情景 4：某班的学生(集合 A)与选修课(集合 B)，每个同学可以选择 1~2 门选修课，追问：这种对应关系是否为函数？为什么？

预设：对于集合 A 中的每一个元素，在集合 B 中都有唯一确定的元素与之对应。

在“某班级学生(集合 A)与选修课(集合 B)，每位学生可选 1~2 门课”的情境中：集合 A 中的一个学生(元素)，在集合 B 中会对应 1 门或 2 门课程(元素)，即对应不唯一，不满足函数“唯一对应”的核心要求，所以不是函数。

【设计意图】通过多次的重复活动后，学生的思维会呈现出自动化特点。此时引导学生对概念进行一般化，认识数学概念的实质，实现对概念的认识从感性上升到理性，建构概念。为了帮助学生强化定义的核心，通过具体的情景分析到抽象的函数概念定义对过程进行细化，同时给出情景 4 加深学生对函数概念的理解，减轻了学生的认知负荷，更有利于学生对函数概念的认知、理解与构建。

3.3. 简单应用，深化对象理解

探究 2：判定下列各组中的两个函数是否相同：

(1) $f(x)=2\ln x,g(x)=\ln x^2$；

(2) $f(x)=\sqrt{x^2},g(x)=x$；

(3) $y=\sin x,u=\sin v$。

预设：第(1)题：部分学生易忽视定义域差异，仅依据“ $2\ln x$ 与 $\ln x^2$ 化简后形式相似”，误判两函数相同。未注意到 $f(x)=2\ln x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，而 $g(x)=\ln x^2$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，定义域不同。

第(2)题：学生易错误化简对应法则，误以为 $\sqrt{x^2}=x$，忽略 $\sqrt{x^2}=|x|$ 的本质，从而误判两函数对应法

则相同。

第(3)题：部分学生可能因自变量、因变量的符号不同(x 与 v，y 与 u)，误以为不是同一函数，未理解“函数的本质与变量符号无关，只要定义域和对应法则相同，函数就相同”。

设计意图：结合 APOS 理论，通过三组典型差异化案例(分别聚焦“定义域差异”“对应法则差异”“变量符号差异但本质相同”三个维度)，以“反例(第 1、2 题) + 正例(第 3 题)”的组合形式，多角度揭示“函数相同的判定依据是定义域和对应法则完全相同”的本质内涵。

问题 5 函数 $y=2x+1\left(x\in R\right)$ 是否存在逆对应？若存在，这个逆对应是函数吗？你能推广到一般情况吗？

探究 3 观察函数 $y=x^2\left(x\in R\right)$ 和 $y=x^2\left(x\in\left[0,+\infty\right)\right)$ 的对应关系，分析它们的逆对应是否为函数，你能发现反函数存在的关键条件吗？

结论：若函数的对应是一一对应的(即对定义域内任意 x，有唯一 y 与之对应；同时对值域内任意 y，有唯一 x 与之对应)，则其逆对应也是一个函数，称为原函数的反函数。即：若原函数 $y=f\left(x\right)$ 满足一一对应，则存在反函数 $x=f^{-1}\left(y\right)$(习惯记为 $y=f^{-1}\left(x\right)$)，且原函数的定义域是反函数的值域，原函数的值域是反函数的定义域。

探究 4 以 $y=2x+1$ 及其反函数 $y=\left(x-1\right)/2$ 为例，画图分析原函数与反函数的图像关系，你能总结出一般性结论吗？

预设：引导学生通过图像发现两者图像关于直线 $y=x$ 对称。设置“所有存在反函数的函数，其图像与反函数的图像都关于直线 $y=x$ 对称吗？”的互动讨论，强化对反函数图像性质的理解。

【定义】如果对于函数 $y=f\left(x\right),x\in D$ 的值域 $f\left(D\right)$ 中的任一值 y，总有唯一确定的 $x\in D$，使得 $f\left(x\right)=y$，那么按照函数的定义 $x=f^{-1}\left(y\right)$ 是 y 的函数，称这个函数为函数 $y=f\left(x\right),x\in D$ 的反函数。相对于这个反函数而言，也称原来的函数 $y=f\left(x\right),x\in D$ 为直接函数。

【设计意图】根据 APOS 理论，反函数概念的建构需以原函数的“对象化”认知为前提。通过对具体函数的操作分析(探究 3)、规律归纳(结论推导)、图像关联(探究 4)，学生在“操作→过程→对象”的阶段中逐步完成反函数概念的建构，同时明确原函数与反函数在定义域、值域、图像上的内在联系，为后续学习函数的单调性、奇偶性等知识搭建认知桥梁。

3.4. 回顾反思，综合形成图式

【例 1】求函数 $f\left(x\right)=\ln\left(x+3\right)/\left(x^2-1\right)+\sqrt{4-x}$ 的定义域，详细说明每一步限制的依据。

【思考题】 若函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=x_0$ 处可导，对函数的定义域和对应法则有什么隐含要求？“集合对应说”的函数本质如何支撑“导数”的定义(即瞬时变化率的刻画)？

【设计意图】根据 APOS 理论，本阶段对函数概念进行更高层次的心理加工与整合，深化对概念的认识与理解。例题 1 聚焦复杂函数定义域的求解，引导学生从“集合元素合法性”角度分析问题，巩固对函数本质的认知。思考题则引导学生将函数概念与后续微积分知识关联，体会“集合对应说”作为高等数学逻辑基石的价值，沟通函数概念与导数、变化率等知识的联系，形成从“概念建构”到“学科应用”的知识网络。

小结和作业

小结：集体回顾函数、反函数等概念，分享本节课的学习收获。

作业：判断几组函数中的两个函数是否相同，求解给定函数的定义域与反函数，并完成周期函数相关内容的课外阅读。

【设计意图】判断每组中的两个函数是否相同，到求几个函数的定义域，引导学生对函数概念的操作、过程、对象以及认知结构中相关概念进行整合，在头脑中形成关于函数概念的综合心理图式，实现知识的巩固与内化，为后续高等数学学习(如微积分、线性代数)奠定扎实基础。

4. 行动启示

APOS 理论指导下的函数概念教学，以概念的建构为目标，以问题探究为主要教学方式，以数学素养培养为本位；利用校园生活、日常消费等现实实例创设情境，把“集合对应”这一抽象关系形象化、直观化、数学化；以生活中的非数集对应和数学中的数集函数为典型载体，让学生逐步通过操作感知、过程抽象、对象固化、图式整合来感受、建构、理解函数概念，突破从“变量依赖”到“集合对应”的认知难点。于是，高等数学中的概念就转化成学生丰富的情景联系与主动构建，引导学生主动对函数概念的本质进行思考和研究。

参考文献

[1] 张奠宙, 张广祥. 中学代数研究[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[2] 宋洁静. 基于 APOS 理论的高中数学概念深度学习教学设计研究[D]: [硕士学位论文]. 开封: 河南大学, 2023.

[3] 范雪, 任全玉. 基于 APOS 理论的数学概念教学设计——以“指数函数的概念”为例[J]. 创新教育研究, 2024, 12(8): 451-456.

[4] 濮安山, 史宁中. 从 APOS 理论看高中生对函数概念的理解[J]. 数学教育学报, 2007(2): 48-50.

[5] 杨莹, 王宝丽. “专创融合”理念下高等数学教学改革探索[J]. 高教学刊, 2025, 11(13): 78-81.

[6] 鲍建生, 周超. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海: 上海教育出版社, 2009.

[7] 程华. APOS 理论的内涵及其对中学数学概念教学的启示[J]. 教学与管理, 2010(24): 65-66.

[8] 李会芳. 核心素养视域下基于 APOS 理论的高等数学概念教学探究[J]. 教育观察, 2024, 13(13): 62-65.