

基于违约风险模型的泊松过程教学设计

周从金*, 王开永

苏州科技大学数学科学学院, 江苏 苏州

收稿日期: 2026年1月6日; 录用日期: 2026年2月6日; 发布日期: 2026年2月14日

摘要

泊松过程是最简单的一类计数过程, 在实际生活中有着广泛的应用, 一些复杂的计数过程借助某些变换也可以简化成泊松过程的情形进行考虑。然而, 在高校随机过程课程的教学安排中, 泊松过程相关内容的讲解往往比较抽象, 导致学生对这部分知识的理解比较浅显, 难以有效培养其理论应用能力。本文以住房抵押贷款违约模型的构建为具体案例, 采用理论与应用相结合的教学方法, 将泊松过程的定义与性质融入建模实践, 逐步推进学生对泊松过程的学习。在此过程中, 学生的逻辑思维能力, 以及运用所学理论知识解决实际问题的能力均得到了锻炼。

关键词

泊松过程, 案例教学法, 住房抵押贷款, 违约

Instructional Design for the Poisson Process Based on a Default Risk Model

Congjin Zhou*, Kaiyong Wang

School of Mathematical Sciences, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu

Received: January 6, 2026; accepted: February 6, 2026; published: February 14, 2026

Abstract

The Poisson process is the simplest type of counting process and is widely used in practice. Even complex counting processes can often be simplified to the form of a Poisson process through appropriate transformations. However, in the teaching of the stochastic processes course in universities, the explanation of content related to the Poisson process tends to be abstract. This results in students having only a superficial understanding of this knowledge, making it difficult to effectively cultivate their ability to apply theories in practice. Taking the construction of a default model for

*通讯作者。

residential mortgage loans as a specific case, this paper adopts a teaching method that integrates theory with application. It incorporates the definitions and properties of the Poisson process into modeling practice, thereby facilitating students' progressive learning of the Poisson process. Throughout this process, students' logical thinking ability is honed, and their capacity to apply the theoretical knowledge they have learned to solve practical problems is developed.

Keywords

Poisson Process, Case-Based Teaching, Residential Mortgage Loan, Default

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随机过程是连接概率论与实际应用的核心课程,也是数学、工程相关专业的基础课程。在金融、经济和交通等许多领域,随机过程均是刻画不确定环境下事件演化规律的合理数学工具,例如股票价格的随机波动、通信系统的信号传输等,都需要使用随机过程构建模型并求解。该课程的教学目标不仅是让学生掌握抽象的定义、性质与计算方法,更关键的是要培养学生将实际问题转化为随机模型的建模思维,实现从理论到应用的能力提升。

泊松过程是随机过程理论中重要的一种计数过程,常用来刻画一段连续时间内事件发生的次数,其在经济学、物理学和天文学等领域有着广泛的应用,一些复杂的计数过程借助某些变换也可以简化成泊松过程的情形进行考虑。1943年,瑞典数学家帕尔姆在电话业务问题的研究中使用了泊松过程[1]。后来,辛钦研究服务系统问题时进一步地发展了相关理论。作为最基础且应用最广泛的计数过程,泊松过程是学生最先接触的随机过程,其教学地位尤为关键。从随机过程教学逻辑和框架上看,泊松过程承接概率论中泊松分布、指数分布和分布函数等知识点,同时又为马尔可夫过程等复杂过程的学习奠定了思维基础。因此,泊松过程的学习是学生接触、理解和应用随机过程理论的关键,引导学生领悟泊松过程的内涵具有重要的教学价值。更多泊松过程的内容可参见[2]-[4]。

在传统的泊松过程课程中,教学方法多倾向抽象化的概念阐述和公式化的数学推导,缺乏与现实应用相关的建模引导与应用探索。在此教学方式下,学生容易对课程内容产生抵触心理,不利于后续教学的开展。为解决此问题,许多教师将新式教学方法引入随机过程的教学,如案例教学法、实验教学法和混合式教学设计等,提升了学生对课程内容的理解和兴趣,其中案例教学法是典型的理论与实际相结合的重要教学方法之一。

案例教学是一种以学生为中心对现实问题和某一特定事实进行交互式探索的过程[5]。通过对现实问题的引入、讨论和解决,可以较好地锻炼学生解决实际问题的能力。案例教学法在课程中的应用,本质上是认知心理学规律在教学实践中的具体体现。通过构建主动学习机制等一系列的培养路径,案例教学法可以避免教学内容的空洞、抽象等困境,具有生动直观、能够调动学生积极性等优势。许多学者对案例教学法在课程教学中的应用进行了探讨。通过对案例教学模式应用于随机过程课堂教学实际效果的考察,姜培华[6]概括了案例教学在实践过程中需要注意的问题,提出案例选择应遵循可行性与针对性原则,并强调要发挥学生主体和教师主导作用,以激发学生学习兴趣、提升其解决实际问题的能力,进而提高课程教学质量与效果。魏艳华等[7]构建了经济水平状态转移的马氏链教学案例,探讨了我国省市区经济

水平转移规律及空间环境影响, 完成了马氏链相关内容的教学。更多案例教学法的教学研究见[8]-[11]。

本文采用案例教学法, 将住房抵押贷款借款人的违约行为融入泊松过程的教学, 结合思想政治教育等方式, 深化教学效果, 逐步引导学生在建模过程中深入理解泊松过程的概念和性质。从现实中常遇到的偿付贷款问题出发, 帮助学生们提高理论素养和实践能力。

2. 教学内容

2.1. 违约建模与泊松过程的联系

信用风险是贷款人和投资者经常面临的一类房地产金融风险, 它是指借款人未能履行合同中约定的义务而造成经济损失的风险。作为银行重要信贷资产之一的住房抵押贷款, 其蕴含的信用风险一旦爆发, 将会危及金融市场和经济体系的安全。银行等贷款人经常面对的信用风险之一是违约风险, 即借款人不能履行贷款协议按时偿付贷款而出现终止贷款的可能性。如果借款人都能按照贷款合同上签订的合约偿付贷款, 则其偿付贷款产生的现金流是确定的, 银行等贷款人在管理信贷资产时就不需要评估和防控违约风险。然而, 由于外部经济环境或内部个人因素的影响, 借款人可能会选择拒绝偿付贷款, 导致现金流具有不确定性, 造成了银行等贷款机构管理信贷资产时的困难。更多住房抵押贷款的内容可参见[12]-[14]。

对银行等贷款机构而言, 面对诸多贷款合同所构成的贷款池, 预测一定时间内违约贷款数量和探究违约事件发生时间间隔的规律, 也即对违约行为进行建模, 是其管理过程中的重要任务之一。而这一实际需求, 恰好与泊松过程的核心教学内容相契合——泊松过程作为刻画连续时间内离散突发事件的经典计数过程, 其单位时间内事件发生的平均速率可直接对应贷款池中贷款的平均违约速率, 一定时间区间内事件发生次数服从泊松分布能精准描述某一时间段内违约贷款的数量分布, 相邻事件到达时间间隔服从指数分布则可量化相邻违约事件发生时间间隔的随机性。在教学中, 通过将贷款人的违约建模需求转化为泊松过程的应用场景, 既让学生直观理解相关抽象概念的实际意义, 又能够引导学生掌握使用泊松过程建模的思维逻辑, 实现从理论知识到实践应用的深化, 还能够帮助学生体会数学工具在风险管理中的应用价值。

2.2. 重难点分析

2.2.1. 重点内容

(1) 泊松过程的概念: 通过对住房抵押贷款、违约风险及贷款人建模需求的介绍, 引入泊松过程的定义。重点阐明和引导学生理解泊松过程的本质特征和应用场景, 实现从数学抽象到实践具象的转化。明晰泊松过程定义中的各个条件与应用背景的对应关系, 让学生切实理解泊松过程在建模中的实用性。

(2) 事件到达时间间隔的分布: 事件到达时间间隔的分布是泊松过程应用于违约建模的关键支撑, 教学重点在于让学生掌握到达时间间隔的分布特征和性质: 相邻两次事件发生的时间间隔服从指数分布, 且各间隔相互独立同分布, 指数分布参数与泊松过程强度参数相等。

(3) 事件等待时间的分布: 基于事件到达时间间隔分布的性质, 给出事件等待时间分布类型这一教学重点: 强度为 λ 的泊松过程第 n 次事件发生时刻服从参数为 n 和 λ 的伽玛分布。

2.2.2. 难点内容

通过贷款人对借款人违约行为建模的需求实例, 引出了泊松过程的概念和性质。泊松过程作为学生接触的第一个随机过程, 是全新的数学概念, 有别于以往确定性数学和基础概率统计知识, 学生要实现深度理解和灵活应用, 往往需要耗费一定时间打磨认知。其中, 事件到达时间间隔和等待时间的分布,

是教学中的难点,也是学生易产生混淆和误解的核心知识点。

2.3. 融入案例的教学环节设计

2.3.1. 泊松过程的概念

在课程开始,展示贷款违约数据,从一定时间跨度内违约次数及相邻两次违约时间间隔角度对此数据进行分析,进而引入住房抵押贷款中违约次数的建模问题,并介绍相关背景和概念。向学生提出银行等贷款机构所关注的问题:在借款人的违约行为是相互独立的条件下:

- (1) 一定时间内违约贷款的数量是固定的吗?如果不是的,应该如何描述?
- (2) 相邻两个违约发生的时间间隔是否存在规律?

学生回答后对这些问题进行分析和总结,引发学生对一段时间内事件发生次数如何刻画和思考,进而给出计数过程的概念:随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为一个计数过程,若 $N(t)$ 表示到时刻 t 为止已经发生事件的总数。结合问题再引入泊松过程的定义:

定义 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为具有强度 λ ($\lambda > 0$) 的(齐次)泊松过程,若

- (1) $N(0) = 0$;
- (2) 过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 具有独立增量,即在不相交时间区间内发生的事件个数是独立的;
- (3) 在任一长度为 t 的区间内事件的个数服从均值为 λt 的泊松分布,即对一切 $s, t \geq 0$,有

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

定义中蕴含了泊松过程的三个特征,刻画了事件发生的规律。教学过程中,给出泊松过程的定义后,回顾违约建模问题,将定义中的三个特征与案例背景相对应:违约贷款数量在初始时刻为0,与条件(1)相对应;借款人违约是相互独立的,与条件(2)相对应;而条件(3)则是刻画了一段时间内违约发生次数的具体分布。通过理论公式与现实事件相结合的讲解,让初次接触泊松过程的学生能够更好地理解和应用所学内容。

在学生理解泊松过程的定义后,回顾泊松分布的性质,结合贷款数据,解释参数 λ 的本质: λ 是单位时间内违约事件的平均发生速率。让学生直观感知泊松过程参数的实际意义,而非单纯的抽象数学符号,并向学生阐述贷款违约建模问题的重要性:住房抵押贷款关系千家万户安居需求,对违约风险的精准建模是保障金融系统稳定、维护群众财产安全的重要方法。引导学生认识数学建模的社会价值,理解数学不是抽象符号,而是服务实体经济的实用工具这一重要内涵。

2.3.2. 事件到达时间间隔的分布

给出泊松过程中事件到达时刻和到达时间间隔的符号表示,即以 T_n 记第 n ($n \geq 1$)个事件到达时刻,也称第 n 个事件的等待时间,以 W_n 记第 $n-1$ 个事件和第 n 个事件到达的时间间隔,即 $W_n = T_n - T_{n-1}$,其中定义 $T_0 = 0$ 。引导学生推导事件到达时间间隔 W_n 的性质:

(1) 首先引导学生思考 W_1 与违约次数的关系:事件 $\{W_1 > t\}$ 与事件 $\{N(t) = 0\}$ 等价。然后基于泊松过程的定义,得 W_1 服从参数为 λ 的指数分布;

(2) 在完成(1)的推导后,展示已知 W_1 的条件下 W_2 的分布求解过程,并给出最终结论: W_2 也服从参数为 λ 的指数分布,且与 W_1 相互独立;

(3) 让学生独立完成已知 T_2 的条件下 W_3 分布的求解后,引导学生对已得到的结果进行总结,给出结论。教师给出最终的结论: $\{W_n\}, n = 1, 2, \dots$ 是独立同分布的随机变量序列,且 W_n 服从参数为 λ 的指数分布。结合指数分布的无记忆性,指出这一结果本质上是泊松过程独立增量性的体现——过去的观测不影响

响未来事件的发生。

再次回顾违约建模问题, 对 λ 进行具体的赋值, 让学生计算相邻两次违约到达时间间隔超过一周的概率, 体会这一结论的具体应用过程。

2.3.3. 事件等待时间的分布

回顾第 n 个事件等待时间 T_n 与随机变量序列 W_1, W_2, \dots, W_n 的关系: $T_n = \sum_{i=1}^n W_i$ 。然后结合概率论中学习的卷积运算方法或伽玛分布性质, 向学生展示 T_n 分布的推导过程, 并给出最终结论: T_n 服从参数为 n 和 λ 的伽玛分布, 即概率密度函数为

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t \geq 0.$$

然后对 λ 进行具体的赋值后, 引导学生计算第三次违约等待时间少于一个月的概率, 让学生掌握实际计算方法, 避免被动记忆结论的学习误区。

针对学生易混淆的间隔时间与等待时间这两个概念, 设计对比表格, 结合违约建模案例强化概念区分。同时以贷款违约场景为例, 以 W_1, W_2, W_3 分别表示第 1 笔、第 1~2 笔、第 2~3 笔违约的间隔时间, 说明三者相互独立、各自的分布不受其他变量影响这一事实; 而 $T_3 = W_1 + W_2 + W_3$ 是三次间隔时间的累加, 由三个独立的指数随机变量共同决定。通过这一阐述, 引导学生辨析间隔时间与等待时间的概念。

2.3.4. 模型拓展

在回顾前述案例的基础上, 向学生阐述宏观经济对贷款违约的影响, 强调宏观经济状态本身是随时间动态变化的, 进而指出贷款的违约速率并非恒定不变的事实。以此为契机, 引导学生思考和讨论两个问题:

- (1) 使用齐次泊松过程描述违约事件数量可能存在哪些局限?
- (2) 应如何修正模型, 才能更贴合现实中违约风险随时间变化的特征?

在学生发言后, 教师进行提炼总结, 自然引出后续将要讲授的非齐次泊松过程和 Cox 过程, 在理论逻辑与现实问题之间建立衔接, 为后续章节的教学奠定模型基础。

2.3.5. 课堂总结

引导学生回顾本节课的主要内容, 包括以违约建模为案例引入的泊松过程定义、相邻违约事件到达时间间隔的分布和第 n 次违约等待时间的分布。请学生分享在推导这些结论时的收获和体会, 以及在区分间隔时间与等待时间时遇到的困惑与解决方法。结合学生的分享内容教师进行系统性总结和补充, 帮助学生梳理泊松过程的知识结构, 强化对模型假设与适用情境的认识。鼓励学生在后续的学习中运用建模的思维方式, 进一步探索金融风控等实际问题, 提升运用数学工具分析与解决实际问题的能力, 逐步建立理论与现实结合的学术视野和实践素养。最后, 为了巩固泊松过程核心知识点与违约建模应用逻辑, 布置基础推导和案例分析类的课后作业, 并强调要按时完成, 确保推导过程完整、分析逻辑清晰。

2.4. 效果评估

为检验基于违约风险模型的泊松过程案例教学法的实施效果, 先通过问卷调查开展学生满意度调研。围绕知识理解帮助、学习兴趣提升等设计调查问卷表, 对授课班级学生进行调查, 系统收集学生对该案例教学法的评价与反馈。此外, 选取泊松过程相关知识内容为考核要点, 整理实施该教学法前、后的章节测验成绩, 并进行对比分析。通过具体成绩数据的横向比较, 分析探讨该案例教学法在提升学生对泊松过程内容掌握程度上的实际作用, 并结合问卷评价验证本次教学设计的有效性。

3. 结论

为帮助学生攻克泊松过程学习中的认知难点, 深化对其核心性质的理解与掌握, 本文构建了以住房抵押贷款违约建模为引入载体的泊松过程教学设计, 核心在于通过具象化的金融案例搭建理论与应用的桥梁。这一教学设计不仅可以加深学生对理论知识的思考, 还可以培养学生解决实际问题的能力。在此基础上, 教学过程中对现实生活中贷款违约背景的介绍, 也可以激发学生对金融等领域中重点问题的关注和兴趣, 培养他们积极进取的人生观和价值观。

基金项目

苏州科技大学校级本科品牌课程项目(PX-12231556)。

参考文献

- [1] 王丽霞. 概率论与随机过程: 理论、历史及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.
- [2] 张波, 张景肖. 应用随机过程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [3] 龚光鲁, 钱敏平. 应用随机过程: 模型和方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 2016.
- [4] Ross, S.M. (2014) *Introduction to Probability Models*. 11th Edition, Academic Press.
- [5] 张国珍. 基于案例教学的高等数学教学改革研究[J]. 高教学刊, 2025, 11(26): 137-140.
- [6] 姜培华. 统计学专业随机过程案例教学的探索与思考[J]. 教育教学论坛, 2016(41): 161-162.
- [7] 魏艳华, 王丙参, 张凡弟. 经济水平状态转移的马氏链案例教学设计——以“应用随机过程”课程为例[J]. 通化师范学院学报, 2025, 46(6): 113-118.
- [8] 熊丹, 吴传菊. 案例教学法在独立增量过程教学中的探讨[J]. 大学教育, 2018(5): 56-58.
- [9] 王沁, 唐家银, 赵春明. 案例与实验教学法在泊松过程教学中应用[J]. 教育教学论坛, 2022(6): 121-124.
- [10] 董琳. 概率论与数理统计课程中案例教学法的探讨[J]. 延安职业技术学院学报, 2022, 36(1): 32-35.
- [11] 车金星, 张毓华, 妙锁霞, 万冰蓉, 李丽, 曾康. 融合思政理念的案例教学改革探索——以统计套利课程为例[J]. 高教学刊, 2026, 12(3): 50-53.
- [12] 邓宏乾. 房地产金融[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2006.
- [13] 殷红, 张卫东. 房地产金融[M]. 北京: 首都经济贸易大学出版社, 2002.
- [14] Brueggeman, W.B. and Fisher, J.D. (2016) *Real Estate Finance and Investments*, McGraw Hill Education.