

# 锚定生长教学策略，建构学生CPFS结构

## ——以余弦定理的教学为例

杜玉玲，侯传燕\*

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2026年2月16日；录用日期：2026年3月23日；发布日期：2026年3月31日

### 摘要

在传统教学中，学生对余弦定理的理解仅停留于表面，没有形成系统的知识网络，无法灵活应用知识解决问题；针对此教学困境，基于CPFS结构理论，结合生长教学策略，设计余弦定理的教学。通过“探索生长-深度生长-变式生长-结构化反思”四个环节的递进式教学，以勾股定理为生长点，引导学生探索余弦定理生成过程，通过几何法、坐标法、向量法多元证明搭建知识联结，借助分层变式习题强化知识应用，结构化反思梳理知识脉络，促进学生构建完善余弦定理CPFS结构，深化知识理解，提升逻辑推理等核心素养，提高知识综合运用与问题解决能力。

### 关键词

CPFS结构，生长教学策略，余弦定理

# Anchoring Growth Teaching Strategy and Constructing Students' CPFS Structure

## —Taking the Teaching of the Cosine Theorem as an Example

Yuling Du, Chuanyan Hou\*

Mathematics and Science College of Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: February 16, 2026; accepted: March 23, 2026; published: March 31, 2026

### Abstract

In traditional teaching, students' understanding of the cosine theorem merely stops at the surface level, failing to form a systematic knowledge network and being unable to flexibly apply the knowledge to solve problems. To address this teaching predicament, based on the CPFS structure theory and

\*通讯作者。

combined with the growth teaching strategy, the teaching of the cosine theorem is designed. Through the progressive teaching of “exploration growth-deep growth-variation growth-structured reflection” in four stages, using the Pythagorean theorem as the growth point, students are guided to explore the generation process of the cosine theorem. Through multiple proofs using geometric methods, coordinate methods, and vector methods to build knowledge connections, with the help of graded variation exercises to strengthen knowledge application, structured reflection to sort out the knowledge framework, students are encouraged to construct a complete CPFS structure for the cosine theorem, deepen their understanding of the knowledge, enhance core competencies such as logical reasoning, and improve the ability to apply knowledge comprehensively and solve problems.

## Keywords

CPFS Structure, Growth Teaching Strategy, Cosine Theorem

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

2003 年喻平教授提出了数学学习心理的“CPFS 结构”理论, 由概念域(concept field)、概念系(concept system)、命题域(proposition field)、命题系(proposition system)这 4 个数学知识心理表征组成, 选取 4 个英语单词的第一个字母组合在一起, 简称为 CPFS (概念、命题、域、系)结构[1]。“CPFS 结构理论”强调数学教学应帮助学生从多角度理解概念和命题, 形成系统的知识网络, 学生在面对具体的问题情境时可以快速找到与之匹配的知识, 寻找到解决问题的路径。因此, 教学过程的重心是构建和完善学生的 CPFS 结构。

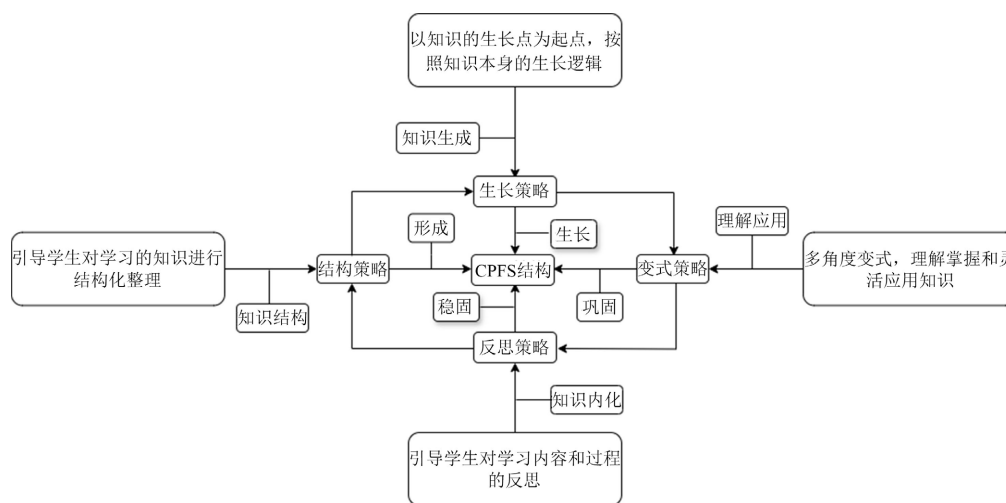


Figure 1. The relationship between the CPFS structure and the growth teaching strategy

图 1. CPFS 结构与生长教学策略的关系

为了构建并且完善 CPFS 结构, 喻平教授和鲍红梅老师提出了生长教学策略。生长教学策略指根据数学知识内部的生长机理, 学生认知特点, 从数学知识的生长点出发设计自然可信的模拟过程, 引导学生主动参与数学知识的探索、发现、研究和发明, 进而促使学生数学知识和认知结构的自然生长; 其中, 生长教学策略包括生长策略、变式策略、反思策略和结构策略[2]。CPFS 结构是学生对外显的数学概念和

命题知识进行内化贮存形成的网络, 生长教学策略的 4 个子策略相互转化, 使学生形成能灵活运用数学知识解决问题的 CPFS 结构(如图 1 所示)。

余弦定理是高中数学解三角形的核心工具之一, 建立任意三角形边与角之间的定量关系, 融合几何直观与代数运算, 是连接几何、代数与向量的重要桥梁。从高考来看, 余弦定理是必考重点, 常见于求解边长、角度、判定三角形形状、结合其他数学知识的综合题和实际应用问题。但在传统的教学中, 学生仅记忆公式, 机械套用, 缺乏对定理的本质理解与多角度应用的能力, 难以构建完整的知识体系。因此, 在教学中, 教师采用生长教学策略引导学生主动建立和完善余弦定理的 CPFS 体系, 深化对知识的理解, 系统整合知识, 提升核心素养和问题解决能力。

## 2. 教材与学情分析

余弦定理选自人教版 A 版高中数学教科书选择性必修第二册第六章第四节, 它是解决有关三角形问题的重要定理, 同时也是勾股定理内容的直接推广。《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》要求对余弦定理不仅要会求, 更要求懂其源(探索证明), 并将其融入知识网络, 提升数学核心素养[3]。余弦定理承接之前所学的三角函数、向量等知识, 同时也为后续正弦定理的学习、解三角形综合问题的探究奠定坚实的基础, 在知识的前后衔接和拓展延伸上发挥着重要作用。在学习余弦定理之前, 学生已经掌握勾股定理、向量及其运算、两点间距离公式、三角函数定义等知识, 具备一定的逻辑推理、代数运算和几何直观能力, 但是高一学生抽象概括能力仍在发展中, 对如何从特殊到一般, 以及不同数学分支(几何、代数、向量、坐标)间的联系, 构建余弦定理的 CPFS 结构存在挑战。

## 3. 教学目标与重难点

**教学目标:** 理解掌握余弦定理的推导过程和证明方法, 灵活应用余弦定理, 构建余弦定理的 CPFS 体系; 在建立完善知识结构的过程中渗透发展学生逻辑推理、数学建模、数学抽象等核心素养, 提高学生分析、推理、运算及其解决实际问题的能力。

**教学重点:** 余弦定理的推导及其证明。

**教学难点:** 余弦定理的生成及构建完善余弦定理的 CPFS 体系。

## 4. 教学思路

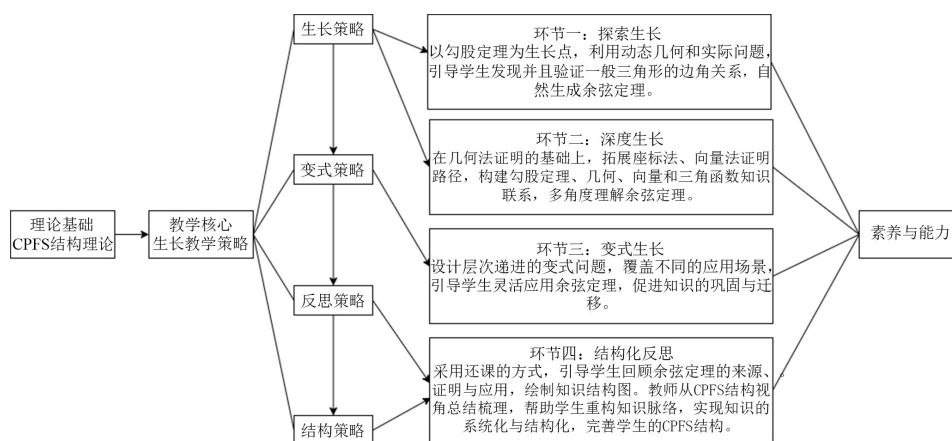


Figure 2. The teaching approach of the cosine theorem

图 2. 余弦定理的教学思路

以“CPFS 结构”理论为支撑, 遵循“生长教学策略”的理念, 围绕余弦定理的生成与内化, 构建“探

索生长-深度生长-变式生长-结构化反思”的递进式教学, 引导学生自主构建完善余弦定理的 CPFS 知识网络, 其教学思路如图 2 所示。

## 5. 教学过程

### 5.1. 探索生长：从勾股定理到余弦定理的自然生长

问题 1 勾股定理的内容及其成立的充要条件是什么？

生：直角三角形中两直角边的平方和等于斜边的平方( $a^2 + b^2 = c^2$ )，其充要条件是三角形中有一个角是  $90^\circ$  ( $\angle C = 90^\circ$ )。

问题 2 若三角形不是直角三角形，而是锐角或钝角三角形，三边关系会如何变化呢？

师：如图 3，利用 GGB 制作一个任意  $\triangle ABC$ ，固定边  $AC$  ( $b$ )与  $BC$  ( $a$ )的长度，动态改变夹角  $C$  的度数，并展示  $a^2 + b^2$  与  $c^2$  的数据变化，使学生观察记录夹角  $C$  从  $0^\circ$  变化到  $180^\circ$  时， $a^2 + b^2$  与  $c^2$  之间的关系。

生：观察归纳当  $\angle C < 90^\circ$  时， $a^2 + b^2 > c^2$ ，当  $\angle C = 90^\circ$  时， $a^2 + b^2 = c^2$ ，当  $\angle C > 90^\circ$  时， $a^2 + b^2 < c^2$ 。

**设计意图：**以学生已有的“勾股定理”知识为生长点，利用动态几何的直观演示，引启学生观察一般三角形中边角关系的动态变化，打破学生三边平方关系仅存在于直角三角形的思维定势，激发学生对一般三角形三边关系的探究欲望，初步构建命题域(三角形边角关系的猜想)，为余弦定理命题生长铺设清晰的认知路径，促进新旧知识的联结，是学生建构 CPFS 结构的逻辑起点，体现生长策略中从已知到未知的渐进过程。

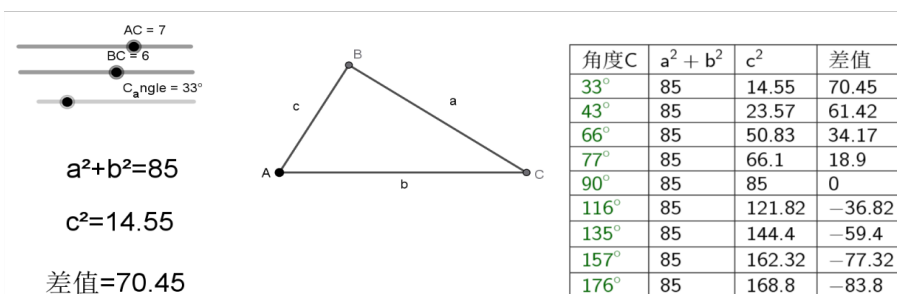


Figure 3. Relationship between sides and angles of a triangle

图 3. 三角形边角关系



Figure 4. Peaks from the actual measurement

图 4. 山峰距离实际测量图

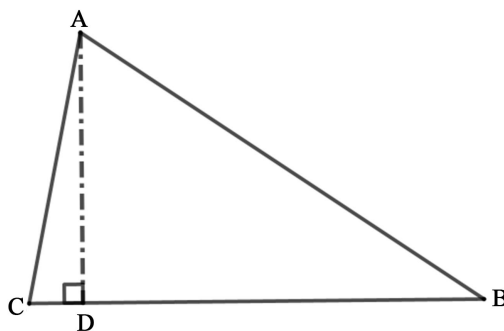


Figure 5. Acute triangle as a high figure  
图 5. 锐角三角形作高图

问题 3 如图 4,  $A$ ,  $B$  分别是两个山峰的顶点, 某工程队在山脚下任意选择一点  $C$ , 使用测量仪得出  $AC$ ,  $BC$  的距离分别为 4 千米, 8 千米,  $\angle ACB = 60^\circ$ , 求  $A$ ,  $B$  两点间的距离?

师: 此三角形非直角三角形, 能否将三角形转化为直角三角形, 利用已有知识解决它? 请大家独立思考, 再进行组内交流。

生: 选  $A$  点或  $B$  点作高, 将三角形分为两个直角三角形, 利用勾股定理和锐角三角函数计算出  $AB$  的距离。如图 5: 过  $A$  作  $AD \perp BC$  于  $D$ , 则  $AD = AC \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ ,  $CD = AC \cos 60^\circ = 2$ ,  $BD = BC - CD = 6$ , 在直角  $\triangle ADB$  中, 由勾股定理得:  $AB^2 = AD^2 + BD^2 = 48$ , 即  $AB = 4\sqrt{3}$  千米。

师: 为什么不选  $C$  点作高呢?

生: 若选  $C$  点作高, 它不仅把已知角一分为二化成了两个未知的角, 而且还把已知要素尽可能的集中在同一个三角形中, 无法计算  $AB$  的距离。

师: 总结选  $A$  点或  $B$  点作高, 使用拆斜为直的几何方法, 把所求线段放在直角三角形中利用勾股定理和锐角三角函数计算出  $AB$  的距离, 请同学们简化具体的计算过程, 能否直接计算出  $AB$  的距离?

生: 将已知的条件直接代入勾股定理, 得出一个等式, 可直接计算出  $AB$  的距离, 即  $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2ACBC \cos \angle ACB$ 。

**设计意图:** 通过真实测量问题创设情境, 引导学生主动运用“化斜为直”的转化思想, 添加辅助线, 将未知的斜三角形问题转化为已知的直角三角形问题, 利用已有知识(勾股定理和锐角三角函数的命题域和概念系)求解, 让学生亲身经历从特殊(直角三角形)到一般(锐角三角形)的过程, 不仅发展学生的数学运算和数学建模素养, 而且初步构建余弦定理的命题表达形式, 实现知识从外部到内部生成的初步生长。

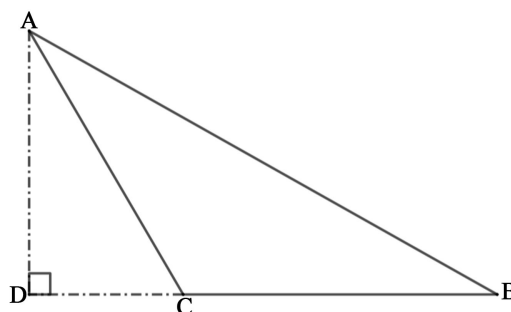


Figure 6. Obtuse triangle as a high figure  
图 6. 钝角三角形作高图

问题4 若上述问题中  $\angle ACB = 120^\circ$ , 其余条件不变, 如何求  $AB$  的距离?

生: 思考回答类比上述的方法, 通过作高将钝角三角形转化为直角三角形, 此时垂足  $D$  在  $BC$  的延长线上, 求出  $AB$  的距离。如图6: 过  $A$  作  $AD \perp BC$  交  $BC$  的延长线于  $D$ , 则  $\angle ACD = 180^\circ - \angle ACB = 60^\circ$ ,  $AD = AC \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ ,  $CD = AC \cos 60^\circ = 2$ ,  $BD = BC + CD = 10$ , 在直角  $\triangle ADB$  中,  $AB^2 = AD^2 + BD^2 = 112$ , 即  $AB = 4\sqrt{7}$  千米。

师: 观察上述计算过程, 此时  $AB$  还满足锐角三角形中当  $\angle ACB = 60^\circ$  时所发现的等式吗?

生: 当  $\angle ACB = 120^\circ$  时,  $AB$  满足  $\angle ACB = 60^\circ$  所发现的等式即:  $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2ACBC \cos \angle ACB$ 。

**设计意图:** 将角度从锐角变为钝角, 引导学生发现余弦定理在不同类型三角形中的统一性, 为概括余弦定理的命题域奠定基础, 推动知识生长。

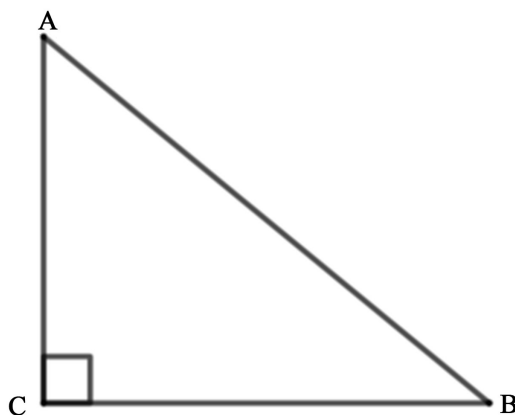


Figure 7. Right triangle  
图7. 直角三角形

问题5 上述问题在计算  $AB$  过程中, 我们发现三角形的三边满足一个等式, 本题中所给角是特殊角, 若是任意角  $\theta$  ( $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ), 还满足这个等式吗? 即在  $\triangle ABC$  中, 能用边  $a$ ,  $b$  和角  $C$  表示边  $c$  吗?

生: 满足, 需要对角  $C$  进行分类讨论:

(1) 当角  $C$  为锐角时, 如图5, 过  $A$  作  $AD \perp BC$  于  $D$ , 则  $AD = b \sin C$ ,  $CD = b \cos C$ ,  $BD = a - b \cos C$ , 在直角  $\triangle ADB$  中, 由勾股定理得:

$$c^2 = (b \sin C)^2 + (a - b \cos C)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C;$$

(2) 当角  $C$  为直角时, 如图7, 由勾股定理得:

$$c^2 = a^2 + b^2;$$

(3) 当角  $C$  为钝角时, 如图6, 过  $A$  作  $AD \perp BC$  交  $BC$  的延长线于  $D$ , 则

$AD = b \sin(\pi - \angle C) = b \sin C$ ,  $CD = b \cos(\pi - \angle C) = -b \cos C$ ,  $BD = a - b \cos C$ , 在直角  $\triangle ADB$  中, 由勾股定理得:

$$c^2 = (b \sin C)^2 + (a - b \cos C)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

师: 由上可知, 当角  $C$  为锐角或钝角时, 都有  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$  成立, 其实, 当角  $C$  为直角时, 仍然有  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$  成立, 此时  $\cos C = 90^\circ$ , 由此你可以得到什么结论?

生: 在任意  $\triangle ABC$  中, 角  $A$ ,  $B$ ,  $C$  的对边分别为  $a$ ,  $b$ ,  $c$  总有  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ , 与  $\triangle ABC$  的形状无关。

师: 在三角形中, 角  $A$ ,  $B$ ,  $C$  以及它们的对边  $a$ ,  $b$ ,  $c$  是相互联系的, 现在我们已经得到角  $C$  和它的对应

边  $c$  的表达式, 根据三角形边与角的对应关系, 大家能写出其他的表达式吗?

生:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$ ,  $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B$ 。

师: 因表达式中含有角的余弦, 故把这三个表达式统称为余弦定理。上述三个式子是对称轮换等式[4], 能用文字语言概括它们吗?

生: 三角形中任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍。

**设计意图:** 引导学生从具体到抽象得出一般性结论, 通过对锐角、直角、钝角三种情形的分类讨论, 学生自主完成余弦定理的严格证明与符号化表达, 使学生完整经历余弦定理的形成过程, 最终用精确的数学语言表述定理, 不仅培养学生的逻辑推理能力, 而且完成余弦定理作为一个新命题的生长, 建构余弦定理的命题域, 实现知识从已有知识的自然生长与联结, 促进学生 CPFS 结构构建与生长。

## 5.2. 深度生长: 多元证明, 构建知识联结

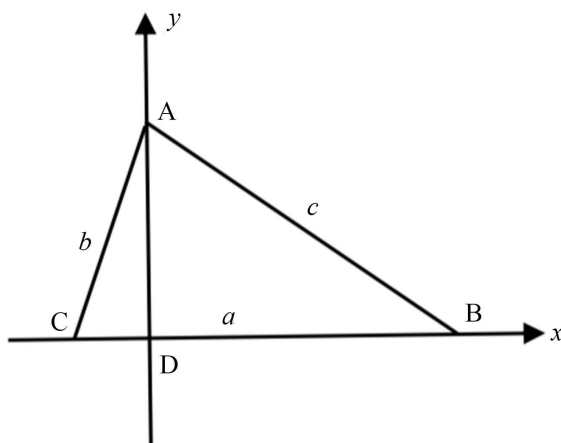


Figure 8. Coordinate system diagram

图 8. 坐标系示意图

问题 6 由上从实际问题情境出发, 通过作高, 将斜三角形转化为直角三角形, 利用勾股定理和锐角三角函数获得并证明余弦定理, 大家还能用其他的方法证明余弦定理吗?

生: 受图 5 的启发, 以点  $D$  为坐标原点,  $BC$  所在的直线为  $x$  轴,  $AD$  所在的直线为  $y$  轴, 建立如图 8 所示直角坐标系, 则  $A(0, b\sin C)$ ,  $B(a - b\cos C, 0)$  由两点间的距离公式可得:

$$c = \sqrt{(a - b\cos C)^2 + (-b\sin C)^2}, \text{ 即 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

同理可得:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$ ,  $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B$ 。

师: 坐标法证明余弦定理本质仍然是转化为直角三角形, 利用勾股定理, 那么有没有一种更简单的方法来证明余弦定理呢[5]?

生: 如图 9, 由向量的三角形法则可知,  $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ , 因公式中含有平方又有角的余弦, 利用向量数量积的性质, 与向量  $\mathbf{c}$  和  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  自身作数量积运算, 即

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\text{可证 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

同理可得:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$ ,  $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B$ 。

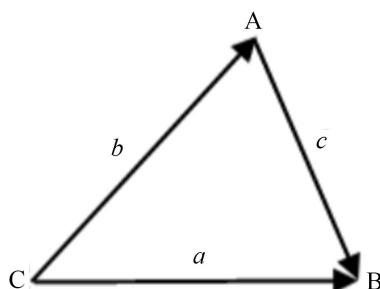


Figure 9. Diagram of triangular vector  
图 9. 三角形向量关系示意图

问题 7 上述我们分别用几何法(作高)、坐标法、向量法证明了余弦定理, 这三种方法各有什么优点和局限呢?

师生活动: 学生分组讨论, 并汇报讨论成果, 教师点评之后与学生共同总结。几何法(作高)直观易懂, 选点作高, 利用勾股定理和锐角三角函数知识, 将初中和高中的知识自然衔接, 但需要分类讨论; 坐标法思路清晰, 选点建系, 利用两点间距离公式, 但是计算过程复杂, 容易出错; 向量法将几何问题代数化, 利用向量的概念和运算, 推导过程简单直接, 但与初中三角形知识脱节。

**设计意图:** 从几何、坐标、向量三个不同的路径证明余弦定理, 引导学生从多角度理解同一命题, 拓展余弦定理的命题域的广度和深度; 在不同证明的探究过程中, 引导学生建立余弦定理与勾股定理、解析几何、向量等知识多个概念、命题之间的丰富联结, 构建余弦定理的概念系, 促进学生形成多层次、可迁移的知识网络, 同时让学生比较不同数学工具在解决问题时的优劣势, 引导其根据问题背景选择最优路径, 为余弦定理 CPFS 结构的完善奠定基础。

### 5.3. 变式生长: 分层应用, 强化迁移能力

变式 1: 余弦定理的直接应用

- (1) 已知在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ , 求解这个三角形。
- (2) 已知在  $\triangle ABC$  中,  $a \cos A = b \cos B$ , 试判断三角形的形状。

**设计意图:** 使学生熟练掌握余弦定理的公式及变形, 辨析定理适用条件; 夯实余弦定理命题域的核心基础, 为命题系的构建提供核心支撑; 同时通过三角形形状判定, 实现余弦定理与三角形性质的概念联结, 丰富余弦定理概念系。

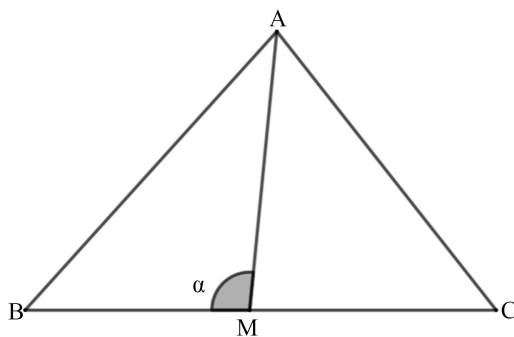


Figure 10. Triangle midline and related geometric relationship  
图 10. 三角形中线及其相关几何关系示意图

变式 2: 余弦定理的综合应用

(1) 在  $\triangle ABC$  中,  $\mathbf{CB} = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{AC} = \mathbf{b}$ , 且  $|\mathbf{a}| = 2$ ,  $|\mathbf{b}| = \sqrt{3}$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\sqrt{3}$ , 求  $AB$  的长。

(2) 已知在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边为  $a, b, c$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $b = \sqrt{3}$  求  $a+c$  的最大值。

(3) 如图 10,  $AM$  是  $\triangle ABC$  的边  $BC$  上的中线, 求证  $AM = \frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}$ 。

(4) 在平面四边形  $ABCD$  中,  $AB = 2$ ,  $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ,  $CD = 4$ ,  $AD = 2\sqrt{5}$ , 求四边形  $ABCD$  的面积。

**设计意图:** 将余弦定理与向量、不等式、三角形性质和平行四边形等知识结合, 引导学生先分析问题本质, 再选择余弦定理作为工具, 使余弦定理的命题域与其他数学知识的命题域相互联结, 系统构建余弦定理的命题系; 同时通过四边形拆分、中线证明等问题, 深化余弦定理与平面几何的概念联结, 丰富概念系的层次, 让学生在变化的情境中把握余弦定理的核心逻辑(三角形边与角的定量)。

变式 3: 余弦定理的实际应用

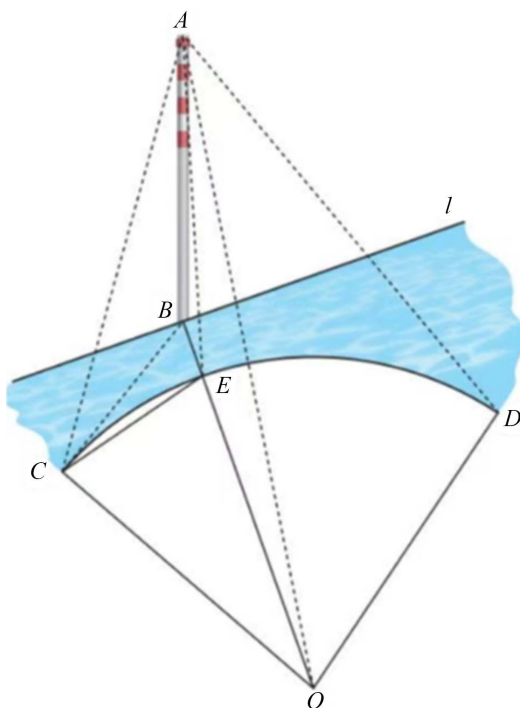


Figure 11. Schematic diagram of chimney measurement situation

图 11. 烟囱测量情境示意

如图 11, 有一段河流, 河的一侧是以  $O$  为圆心, 半径为  $10\sqrt{3}$  的扇形区域  $OCD$ , 河的另一侧是一段笔直的河岸  $l$ 。河边有一囱  $AB$  (不计  $B$  离河岸的距离),  $\angle ABO = \angle ABC = 90^\circ$ , 且  $OB$  的连线恰好与河岸  $l$  垂直, 设  $OB$  与圆弧  $CD$  的交点为  $E$ 。已知扇形区域和河岸处于同一水平面, 在点  $C$ , 点  $O$  和点  $E$  处测得烟囱顶端的仰角  $\angle AOB$ ,  $\angle ACB$ ,  $\angle AEB$  分别为  $45^\circ$ ,  $30^\circ$  和  $60^\circ$ 。求:

- (1) 求烟囱  $AB$  的高度;
- (2) 如果要在河修一条直路, 求  $CE$  的长。

**设计意图:** 利用真实的问题情境, 引导学生经历“分析实际情境(扇形、河岸、仰角)、转化数学问题(三角形、直角三角形)、选择工具(余弦定理、三角函数)、计算求解、回归实际问题”的完整过程, 将余

弦定理的命题系延伸到实际应用场景, 实现命题系的进一步拓展; 同时培养学生数学建模能力, 体会余弦定理的应用价值, 强化余弦定理与实际问题的概念联结, 深化概念系。

#### 5.4. 结构化反思: 梳理知识脉络, 完善 CPFS 结构

问题 8 请同学们复述余弦定理的来源、证明方法、表达式、变形公式及其应用类型, 并尝试把它绘制成知识结构图?

问题 9 余弦定理与哪些已学知识存在联系? 请从几何、代数、向量、三角等角度举例说明。

问题 10 在证明和应用余弦定理时, 你更倾向于使用哪种方法? 为什么?

教师采用开放式的还课的方式, 组织学生以小组合作方式展开讨论, 每组派一个代表汇报, 其他小组进行补充或提出不同见解, 教师适时引导、点评, 并最终从 CPFS 结构的视角(如图 12)总结余弦定理的知识结构, 强调其与多个数学分支的联结, 帮助学生实现知识结构网络的重构与完善。

**设计意图:** 问题 8 促使学生将零散的命题知识进行归类 and 整合, 形成初步的知识框架; 问题 9 引导学生主动建立余弦定理与勾股定理、向量、坐标、三角函数等知识的联系, 推动命题之间的横向联结, 问题 10 从元认知层面引导学生反思不同方法的适用性与优劣, 促使学生在不同问题情境中选择最合适的命题工具, 体现命题系的灵活性与迁移性; 进而选择采用还课的方式, 引导学生对余弦定理的探索、证明与应用过程进行系统性的回顾与反思, 引导学生将新知“余弦定理”与旧知(勾股定理、向量、坐标、三角函数等)进行多维关联; 使学生自主梳理余弦定理的命题域、命题域、概念系和概念域; 在反思交流的过程中, 引导学生将分散的知识模块整合为系统的知识网络, 完善以余弦定理为核心的 CPFS 结构, 促进知识的深度内化与灵活提取。

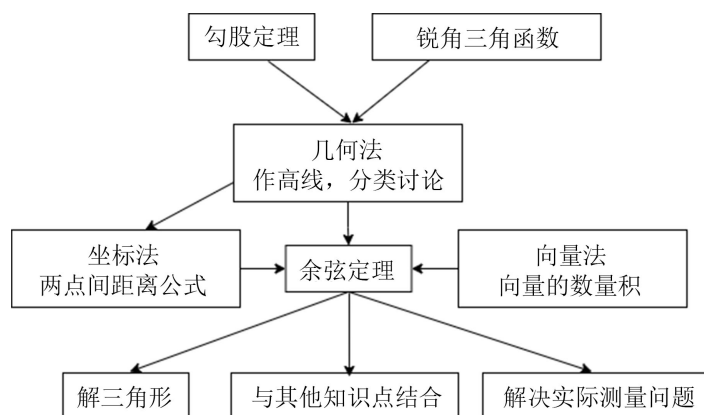


Figure 12. CPFS structure diagram of the cosine theorem

图 12. 余弦定理的 CPFS 结构图

## 6. 结束语

以喻平教授提出的“CPFS 结构”理论为基础, 以生长教学策略为核心, 设计余弦定理的教学。通过“探索生长-深度生长-变式生长-结构化反思”四个环节的递进式教学, 以勾股定理为生长点, 设置一系列关于余弦定理的问题链, 引导学生从探究、证明、应用的过程中逐步构建余弦定理的 CPFS 结构, 同时注重余弦定理的多元证明, 深化余弦定理与勾股定理、三角函数、向量和解析几何知识之间的联系, 并且设置关于余弦定理的变式题, 不仅深化了学生对余弦定理的理解, 而且还提高了学生对余弦定理知识的综合运用能力, 最后结构化反思对知识点进行梳理, 进一步完善了学生以余弦定理为核心的 CPFS 知

识结构。通过帮助学生建立 CPFS 知识结构, 促进学生头脑中形成良好知识认知网络[6], 不仅深化对知识的理解, 而且在运用知识解决复杂的问题时, 可以快速地提取相关的概念、定理、公式等, 提高解决问题的能力, 培养学生逻辑推理、数学运算和数学建模等核心素养。因此, 教师在教学设计的过程应聚焦于学生已有知识与新知的联结处, 引导学生主动探究, 同时帮助学生建立对知识的多维理解, 避免知识的孤立与僵化, 采用层次递进的变式训练, 使学生在变化情境中把握命题的本质结构, 进而使用结构化反思促进知识建构, 通过知识梳理与图示呈现, 帮助学生将零散命题整合为系统网络, 提升知识可迁移性。

## 基金项目

新疆维吾尔自治区一流本科课程(空间解析几何)建设项目; 新疆师范大学本科教学质量工程建设教学研究与改革项目(SDJG2025-03); 数学与应用数学专业基础课程群教学团队; 虚拟教研室(数学创新人才“双螺旋”培养虚拟教研室)资助。

## 参考文献

- [1] 喻平. 数学学习心理的 CPFS 结构理论与实践研究述评[J]. 数学教育学报, 2025, 34(4): 1-7.
- [2] 鲍红梅, 喻平. 完善中学生 CPFS 结构的生长教学策略研究[J]. 数学教育学报, 2006(1): 45-49.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [4] 顾向忠. CPFS 结构理论视域下的余弦定理教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2016(2): 16-20.
- [5] 李永林, 刘群. 一般观念引领下的教学活动设计探究——以“余弦定理、正弦定理”推导为例[J]. 数学通报, 2025, 64(3): 38-43.
- [6] 邓梓聪. 基于生长教学策略的等比数列教学设计[J]. 数理化解题研究, 2023(9): 47-49+144.