

Abel求和公式在数论中的应用：从工具性计算到解析思维的逻辑重构

张敏¹, 李金蒋^{2*}

¹北京信息科技大学理学院, 北京

²中国矿业大学(北京)理学院, 北京

收稿日期: 2026年3月9日; 录用日期: 2026年4月10日; 发布日期: 2026年4月20日

摘要

Abel求和公式作为数学中连接离散求和与连续积分的核心工具, 是理解算术函数均值估计及黎曼 ζ -函数性质的关键。然而, 传统教学常将其视为枯燥的恒等式变换, 忽视其“离散光滑化”的数学直觉及其在解析数论(如素数定理推导)中的枢纽作用。针对“重计算、轻思想”的教学现状, 本文提出“类比引入-阶梯应用-科研驱动”三维模式。通过对比分部积分、引入素数分布实例, 并结合Matlab数值验证旨在强化学生的渐近分析能力与数学建模素养。

关键词

Abel求和公式, 数论, 三维融合, 数学素养

Applications of Abel Summation in Number Theory: From Instrumental Calculation to the Logical Reconstruction of Analytic Thinking

Min Zhang¹, Jinjiang Li^{2*}

¹School of Applied Science, Beijing Information Science and Technology University, Beijing

²Department of Mathematics, China University of Mining and Technology (Beijing), Beijing

Received: March 9, 2026; accepted: April 10, 2026; published: April 20, 2026

*通讯作者。

文章引用: 张敏, 李金蒋. Abel 求和公式在数论中的应用: 从工具性计算到解析思维的逻辑重构[J]. 教育进展, 2026, 16(4): 867-873. DOI: 10.12677/ae.2026.164725

Abstract

As a pivotal tool in mathematics bridging the gap between discrete summation and continuous integration, Abel summation serves as the key to understanding the estimation of mean values for arithmetic functions and the properties of the Riemann zeta function. However, traditional pedagogy often treats it merely as a tedious exercise in identity manipulation, thereby overlooking the underlying mathematical intuition of “discrete smoothing” and its pivotal role in analytic number theory (such as in the derivation of the Prime Number Theorem). Addressing the prevailing pedagogical status quo—which prioritizes computation over conceptual insight—this paper proposes a three-dimensional instructional model characterized by “analogical introduction, phased application, and research-driven learning.” By drawing parallels with integration by parts, introducing illustrative examples regarding prime number distribution, and incorporating numerical verification via MATLAB, this approach aims to enhance students’ proficiency in asymptotic analysis and their mathematical modeling capabilities.

Keywords

Abel Summation Formula, Number Theory, Three-Dimensional Integration, Mathematical Literacy

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题聚焦：离散与连续的认识断层

1.1. Abel 求和公式教学现状的局限性

当前 Abel 求和公式(又称分部求和法)的教学面临以下困境:

- 公式推导机械化: 多数教材仅展示符号层面的变换, 学生虽能通过代数运算完成推导, 却难以理解其背后的“离散版分部积分”本质[1]。
- 几何直观缺失: 缺乏对阶梯函数与平滑曲线之间关系的图形化阐释, 导致学生在面对非常规求和范围时, 极易在边界项处理上出错。
- 应用场景扁平化: 训练题大多局限于简单的数项级数收敛性判定, 缺乏与素数分布、误差项估计等前沿问题的深度关联。

1.2. 数项级数判别法思路下的教学痛点

这种教学方式在当下“具有典型的脱节特征”, 具体表现为存在相当比例的学生无法理解 Abel 求和公式的内在含义以及在更复杂问题中的应用, 例如在素数定理相关推导中出现的等价命题[2]:

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right) \Leftrightarrow \pi(x) = \int_2^x \frac{dx}{\log x} + O\left(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log x}}\right).$$

此外, 硕士研究生一年级学生在数学基础课程的学习过程中反馈表明: “学 Abel 求和公式只为做数项级数收敛性判别与证明的相关问题, 没想到后面解析数论中还会用到”。调研分析可知, 学生认知断层明显, 大约 90% 的学生难以理解光滑权函数可以通过 Abel 求和公式的连续形式(即积分形式)灵活地添加或者去除, 与数论函数相关的求和均值估计方面的直觉严重缺失。这一现象提醒我们, 在教学中应该

加强逻辑推理与系统性思维的训练, 以培养学生的科学精神与解决问题的能力。

1.3. 核心矛盾

Abel 求和公式离散形式的“技巧复杂性”与解析数论各类求和均值估计的“理论依赖性”之间存在严重脱节。调查显示, 超过 80% 的数学系本科生在学习完该公式后, 仍无法独立处理形如 $\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ 的渐近展开。

2. Abel 求和公式的各种表现形式与数学美感

定理[1] (Abel 求和公式) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个数列, 记 $B_k = \sum_{i=1}^k b_i (k=1, 2, \dots)$, 则有

$$\sum_{k=1}^m a_k b_k = a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

证明: 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_k b_k &= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^m a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^m a_k B_k - \sum_{k=2}^m a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} a_k B_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_{k+1} B_k + a_m B_m \\ &= a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k. \end{aligned}$$

定理[3] (分部求和公式) 设 $x > 1$, $f(t)$ 在 $[1, x]$ 上连续可微, $S(x) = \sum_{n \leq x} c_n$, 则有

$$\sum_{n \leq x} c_n f(n) = S(x) f(x) - \int_1^x S(t) f'(t) dt.$$

证明: 我们有

$$\begin{aligned} S(x) f(x) - \sum_{n \leq x} c_n f(n) &= \sum_{n \leq x} c_n (f(x) - f(n)) \\ &= \sum_{n \leq x} c_n \int_n^x f'(t) dt \\ &= \sum_{n \leq x} c_n \int_1^x h(n, t) f'(t) dt, \end{aligned}$$

其中

$$h(n, t) = \begin{cases} 1, & \text{若 } n \leq t < x, \\ 0, & \text{若 } n > t. \end{cases}$$

注意到

$$\sum_{n \leq x} c_n h(n, t) = \sum_{n \leq t} c_n = S(t),$$

故可得出

$$S(x) f(x) - \sum_{n \leq x} c_n f(n) = \int_1^x \sum_{n \leq x} c_n h(n, t) f'(t) dt = \int_1^x S(t) f'(t) dt.$$

注: (1) 事实上, Abel 求和公式就是离散形式的分部积分公式。如果令 $G(x) = \int_a^x g(t) dt$, 则分部积分公式可以表述为

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(b)G(b) - \int_a^b G(x) df(x).$$

如果将数列的通项类比于函数, 求和过程类比于求积分, 求差过程类比于求微分, 则 $a_{k+1} - a_k$ 对应于 $df(x)$, 显然两者的含义是一致的, 其在形式上与定积分的分部积分公式 $\int_a^b u dv = uv - \int_a^b v du$ 完美对应, 揭示了算术函数与连续可微函数之间的深层对称。

(2) 分部求和公式本质上就是 Abel 求和公式, 将离散的权值 c_n 通过其部分和 $S(x)$ “打包”, 利用积分算子处理光滑函数 $f(n)$, 体现了“以连续治离散”的统一思想。这一思想不仅极具有数学美感, 也蕴含着“由表及里、见微知著”的哲学思维, 有利于培养学生认识数学对象间对立统一关系(如离散与连续)的辩证思维能力。

3. 改革路径: 三维融合教学模式

3.1. 维度一: 类比启发——从分部积分到 Abel 求和

教学过程应以“形式化结构对齐”为切入点。通过对比引导学生发现: c_n 相当于微分 $dS(t)$, 从而将求和符号转化为积分号。这种类比有助于学生建立“由表及里”的哲学思维, 降低认知负担。通过“离散”与“连续”背景的引入和比较, 引导学生认识数学与自然规律的统一性, 增强科学素养和探索精神。

3.2. 维度二: 技术赋能——可视化渐近逼近

利用 Python 或 Matlab 动态演示 $S(x)f(x)$ 项与积分项在 $x \rightarrow \infty$ 时的量级抵消过程。通过数学软件的曲线拟合展示二者误差项的衰减速率与变化趋势, 在此过程中, 应面向学生强调现代化信息技术作为工具的基础服务属性及其在当代科学研究中的支撑作用, 培养学生利用现代信息化计算机技术解决分析问题的能力。

3.3. 维度三: 阶梯式训练路径——从学科基础到科研前沿

设计“三步递进”例题链如下:

(1) **基础层:** 聚焦标准算术函数验证, 直接应用分部求和公式; 例: 设 $x > 1$, 则成立

$$\sum_{n \leq x} \log n = x \log x - x + O(\log x).$$

证明: 在分部求和公式中取 $f(t) = \log t, c_n \equiv 1$, 则 $S(x) = \sum_{n \leq x} 1 = [x]$, 由此得到

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \log n &= [x] \log x - \int_1^x \frac{[t]}{t} dt \\ &= (x - \{x\}) \log x - \int_1^x \frac{t - \{t\}}{t} dt \\ &= x \log x - x - \{x\} \log x + \int_1^x \frac{\{t\}}{t} dt. \end{aligned}$$

注意到 $|\{x\} \log x| \leq \log x$ 以及

$$\left| \int_1^x \frac{\{t\}}{t} dt \right| \leq \int_1^x \frac{1}{t} dt = \log x,$$

我们有

$$\sum_{n \leq x} \log n = x \log x - x + O(\log x).$$

(2) **进阶层:** 融入素数定理相关命题等价性的初步推导, 重点训练权函数的选取与公式的灵活变形使用;

例: 证明当 $x \rightarrow \infty$ 时, 关于素数分布的以下三个式子是等价的:

$$\psi(x) \sim x, \quad \theta(x) \sim x, \quad \pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

其中

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n), \quad \theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p, \quad \pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

证明: 根据数论函数 $\Lambda(n)$ 的定义可知

$$\psi(x) = \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 1}} \log p = \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \log p = \theta(x) + \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \log p.$$

另一方面, 我们有

$$0 < \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \log p = \sum_{p \leq \sqrt{x}} \sum_{2 \leq k \leq \frac{\log x}{\log p}} \log p \leq (\log x) \sum_{p \leq \sqrt{x}} 1 \leq x^{1/2} \log x,$$

由此推出

$$\psi(x) = \theta(x) + O(x^{1/2} \log x),$$

因此 $\psi(x) \sim x \Leftrightarrow \theta(x) \sim x$ 。为了证明 $\theta(x) \sim x \Leftrightarrow \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$, 我们令

$$c_n = \begin{cases} 1, & \text{若 } n \text{ 为素数,} \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

则有

$$\pi(x) = \sum_{n \leq x} c_n, \quad \theta(x) = \sum_{n \leq x} c_n \log n.$$

根据分部求和公式可得

$$\theta(x) = \pi(x) \log x - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t} dt,$$

注意到

$$\frac{\pi(t)}{t} = o(1), \quad t \geq \sqrt{x},$$

我们有

$$\theta(x) = \pi(x) \log x - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\pi(t)}{t} dt - \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\pi(t)}{t} dt = \pi(x) \log x + o(x),$$

所以

$$\frac{\theta(x)}{x} = \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} + o(1).$$

这就证明了 $\theta(x) \sim x \Leftrightarrow \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ 。

(3) **综合层**: 融入素数分布进一步的相关结论, 例如梅森素数定理等。

例: 证明当 $x \geq 2$ 时, 存在常数 $C > 0$ 使得

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + C + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

证明: 在分部求和公式中令

$$S(x) = \sum_{n \leq x} \frac{c_n \log n}{n}, \quad c_n = \begin{cases} 1, & \text{若 } n \text{ 为素数,} \\ 0, & \text{其他情形,} \end{cases}$$

则有

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} \cdot \frac{1}{\log p} = \sum_{n \leq x} \frac{c_n \log n}{n} \cdot \frac{1}{\log n} = \frac{S(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{S(t)}{t \log^2 t} dt.$$

注意到

$$S(x) = \log x + R(x), \quad R(x) = O(1),$$

从而有

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} &= \frac{\log x + O(1)}{\log x} + \int_2^x \frac{\log t + R(t)}{t \log^2 t} dt \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) + \int_2^x \frac{dt}{t \log t} + \int_2^x \frac{R(t)}{t \log^2 t} dt \\ &= \log \log x + 1 - \log \log 2 + \int_2^\infty \frac{R(t)}{t \log^2 t} dt - \int_x^\infty \frac{R(t)}{t \log^2 t} dt + O\left(\frac{1}{\log x}\right). \end{aligned}$$

由于 $R(t) = O(1)$, 所以存在常数 A , 使得

$$\int_2^\infty \frac{R(t)}{t \log^2 t} dt = A,$$

且满足

$$\int_x^\infty \frac{R(t)}{t \log^2 t} dt = O\left(\int_x^\infty \frac{1}{t \log^2 t} dt\right) = O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

综上所述, 我们得到

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + C + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

其中

$$C = 1 - \log \log 2 + A.$$

4. 创新点总结

离散 - 连续双路径理解: 通过算数函数均值估计、素数分布的经典结论案例揭示 Abel 求和公式的积分本质, 利用分部求和公式搭建 Abel 求和公式与解析数论的数学桥梁。“类比 - 可视化 - 推导仿真”三阶段训练: 结合 Mathematica 与 Matlab 等工具, 实现从几何直观到数值验证的全程赋能。离散变量连续

化方法“问题链”设计：通过基础运用、公式变形、权函数选取、理论证明的阶梯式训练，提升学生探索未知并解决复杂问题的能力。在整个教学过程中，注重培养学生的科学精神、创新意识和家国情怀，使其认识到数学研究不仅是工具，更是理解世界、服务国家的重要基础。

5. 结论与展望/推广

Abel 求和公式不应被单纯视为计算工具，而应该将其定位为连接高等数学、数学分析、初等数论与解析数论的通用语言。建议在高等数学阶段引入数论背景(例如算术函数的均值估计、素数分布的经典结果等)，在数学分析教学中强化其测度与积分的核心内涵，并通过经典数论案例的应用构建“类比-应用”闭环。该模式可推广至复分析、调和分析等课程，为培养交叉学科创新能力提供新范式。同时，主讲教师需实现价值观教育与学科知识体系的深度整合，履行全人教育的育人职责。通过教学干预引导学生构建正确的意义评价体系与伦理判断力，致力于发展学生的系统性思维框架、发散性认知特质以及实证科学范式，旨在培养能够适应未来复杂任务情境的高阶认知能力与职业胜任力。

基金项目

北京信息科技大学课程建设与教学改革项目：“新形势下高等数学教育教学改革初探”(No.2025JGYB38)，国家自然科学基金(Nos.12471009, 11901566, 12001047)，北京市自然科学基金(No.1242003)。

参考文献

- [1] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2000.
- [2] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论[M]. 第二版. 北京: 北京大学出版社, 2003.
- [3] 潘承洞. 数论基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.