

通法为主，巧解为辅：论高考数学解题教学的守正创新

——以2025年数学全国卷I第16题为例

周富磊¹, 张 芬², 石黄萍^{2*}

¹上饶中学, 江西 上饶

²上饶师范学院数学与计算科学学院, 江西 上饶

收稿日期: 2026年5月3日; 录用日期: 2026年6月2日; 发布日期: 2026年6月10日

摘 要

以2025年新高考数学全国卷I第16题为例, 探讨高中数学解题教学中的“守正”与“创新”。“守正”即夯实基础, 强调对教材中通法的深刻理解与熟练运用; “创新”即发展思维, 追求在通法基础上的优化和升华。通过对该题两问的多种解法进行比较分析, 明确“通法”的基础性地位与“巧解”的思维价值, 并提出“以通法筑牢根基, 以巧解提升素养”的启示与反思, 为改进高中数学解题教学提供实践参考。

关键词

高考数学, 解题教学, 核心素养, 守正创新

Primarily Emphasizing General Methods, Supplementing with Ingenious Solutions: On Upholding Fundamentals and Pursuing Innovation in Teaching Mathematical Problem-Solving for the Gaokao

—Taking Question 16 of the 2025 Mathematics
National Volume I as an Example

Fulei Zhou¹, Fen Zhang², Huangping Shi^{2*}

*通讯作者。

¹Shangrao Middle School, Shangrao Jiangxi²School of Mathematics and Computational Science, Shangrao Normal College, Shangrao Jiangxi

Received: May 3, 2026; accepted: June 2, 2026; published: June 10, 2026

Abstract

Taking Question 16 of the 2025 New Gaokao Mathematics National Volume I as an example, this paper explores the balance between “upholding fundamentals” and “pursuing innovation” in teaching mathematical problem-solving in senior secondary education. “Upholding fundamentals” refers to consolidating foundational knowledge, emphasizing a deep understanding and proficient application of general methods found in textbooks. “Pursuing innovation” involves developing students' thinking, aiming for optimization and enhancement based on general methods. Through a comparative analysis of various approaches to the two parts of the question, this study clarifies the foundational role of general methods and the cognitive value of ingenious solutions. It also proposes insights and reflections on “using general methods to build a solid foundation and ingenious solutions to enhance competencies,” providing practical references for improving the teaching of mathematical problem-solving in senior secondary schools.

Keywords

Gaokao Mathematics, Teaching Problem-Solving, Core Competencies, Upholding Fundamentals and Pursuing Innovation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Open Access

1. 试题呈现与解析

2025 年数学全国卷 I 第 16 题：设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, \frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$

- (1) 证明： $\{na_n\}$ 为等差数列；
- (2) 设 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ ，求 $f'(-2)$ 。

题目分析：该题作为新高考全国 I 卷的一个标志性创新，首次将数列与导数两个知识点进行结合考查。题目以简单的递推关系设问，构建了一个综合性的数学情境：第(1)问中要求证明数列为等差数列，其核心在于处理递推式并识别其本质；第(2)问则在第(1)问的基础上构建了一个函数并求相应数值的导数，其巧妙地将等差数列、通项求解、函数与导数等知识点串联起来[1]-[5]。该设计方式不仅考查了学生对基础知识的掌握情况，更考查了他们在复杂情境中识别与转化问题、进行系统推理与精确运算的综合性能力，对学生的数学运算、逻辑推理等核心素养进行了全面而深入的考查[6]。

2. 解法探析

2.1. 第(1)问的解法探析

2.1.1. 通法(守正之路)——定义法和累乘法

此法的核心是紧扣等差数列的定义，即证明后项与前项之差为定值。

解法 1 (定义法): 因为 $a_{n+1} = \frac{na_n}{n+1} + \frac{1}{n+1}$, 所以 $(n+1)a_{n+1} - na_n = (n+1)\left(\frac{na_n}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - na_n = 1$, 又因为 $a_1 = 3$, 故 $\{na_n\}$ 是以 3 为首项, 1 为公差的等差数列, 证毕。

解法 2 (定义法): 对等式 $\frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ 两边同时乘以 $n(n+1)$, 可得

$$(n+1)a_{n+1} = na_n + 1 \Rightarrow (n+1)a_{n+1} - na_n = 1,$$

又因为 $a_1 = 3$, 故 $\{na_n\}$ 是以 3 为首项, 1 为公差的等差数列, 证毕。

解法 3 (累乘法): 由题意可得

$$\frac{a_{n+1}-1}{n} = \frac{a_n-1}{n+1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}-1}{a_n-1} = \frac{n}{n+1}, \frac{a_n-1}{a_{n-1}-1} = \frac{n-1}{n}, \dots, \frac{a_2-1}{a_1-1} = \frac{1}{2},$$

将式子 $\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1} = \frac{n}{n+1}, \frac{a_n-1}{a_{n-1}-1} = \frac{n-1}{n}, \dots, \frac{a_2-1}{a_1-1} = \frac{1}{2}$ 两边相乘, 可得

$$\frac{a_{n+1}-1}{a_1-1} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}-1}{3-1} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow (n+1)(a_{n+1}-1) = 2 \Rightarrow (n+1)a_{n+1} = 3+n,$$

即 $na_n = n+2$, 通过利用等差数列的定义可验证后项与前项之差为定值 1, 故数列 $\{na_n\}$ 为等差数列, 证毕。

教学价值分析: 以上三种解法均为“通性通法”。解法 1 和解法 2 思路直接, 紧扣定义, 是学生应该掌握的基本方法。解法 3 (累乘法) 提供了求解一类分式递推数列的通项公式的通用路径。这些方法体现了“守正”的教学要求, 即扎实的基础是解决一切问题的根本。

2.1.2. 巧解(创新之思)——裂项相消法和构造法

由于原递推式包含 $\frac{1}{n(n+1)}$ 这一可裂项的结构后, 则可尝试更巧妙的解决方法。

解法 4 (裂项相消法): 由题意可得

$$\frac{a_{n+1}}{n} - \frac{a_n}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{n} - \frac{a_n}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

对上式两边同时乘以 $n(n+1)$, 可得 $(n+1)a_{n+1} - na_n = (n+1) - n = 1$ 。

故 $\{na_n\}$ 为等差数列, 证毕。

解法 5 (构造法): 由题意可得

$$\frac{a_{n+1}}{n} - \frac{a_n}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{n} - \frac{1}{n} = \frac{a_n}{n+1} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}-1}{n} = \frac{a_n-1}{n+1},$$

对上式两边同时乘以 $n(n+1)$, 可得

$$(n+1)(a_{n+1}-1) = n(a_n-1) \Rightarrow (n+1)(a_{n+1}-1) - n(a_n-1) \equiv 0,$$

故数列 $\{n(a_n-1)\}$ 为常数列, 又因为 $a_1 = 3$, 所以 $n(a_n-1) = 1 \cdot (a_1-1) = 2$, 由此可得 $na_n = n+2$, 所以 $(n+1)a_{n+1} - na_n = (n+3) - (n+2) = 1$ 。故数列 $\{na_n\}$ 为等差数列, 证毕。

教学价值分析: 解法 4 和解法 5 在解题过程中巧妙地运用了裂项相消的数列思想, 通过结构重组或直接构造出常数列, 突破了常规的代数变形模式。这两种方法体现了创新思维, 即对数学对象结构的敏锐洞察和主动构造。在教学中应引导学生发现并掌握此类解法, 有利于培养学生的数学观察能力和数学思维, 从而提升其解决复杂问题的能力[3]。

2.2. 第(2)问的解法探析

由(1)可知, $\{na_n\}$ 为等差数列, $na_n = n + 2$, 所以 $a_n = 1 + \frac{2}{n}$ 。

2.2.1. 通法(守正之路)——直接求导与错位相减法

该法是求函数在某点导数值最直接、最基础的方法。

解法 1 (先求导——赋值再求和): 因为 $na_n = n + 2$, 故

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + ma_mx^{m-1} = 3 + 4x + \cdots + ma_mx^{m-1},$$

$$f'(-2) = 3 + 4 * (-2) + \cdots + (m+2) * (-2)^{m-1},$$

对上式两边同时乘以 -2 , 可得

$$-2f'(-2) = 3 * (-2) + 4 * (-2)^2 + \cdots + (m+2) * (-2)^m,$$

此时, 问题转化为求两个特殊数列的差, 通过错位相减法求解, 故

$$3f'(-2) = 3 + (-2) + (-2)^2 + \cdots + (-2)^{m-1} - (m+2) * (-2)^m = 3 + \frac{-2 - (-2)^m}{1 - (-2)} - (m+2) * (-2)^m,$$

所以 $f'(-2) = \frac{7}{9} - \frac{3m+7}{9}(-2)^m$ 。此解法的求解过程简单, 计算量较小。相比之下, 解法 2 虽然思路类似, 但计算过程更为繁琐。

解法 2 (先求导——求和再赋值): 有题意可知

$f'(x) = 3 + 4x + \cdots + (m+2)x^{m-1}$, 对上式两边同时乘以 x , 可得

$$xf'(x) = 3x + 4x^2 + \cdots + (m+2)a_mx^m,$$

此时, 问题转化为求上面两个等式的差, 通过错位相减法求解, 可得

$$(1-x)f'(x) = 3 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1} - (m+2)a_mx^m = 3 + \frac{x-x^m}{1-x} - (m+2)x^m,$$

将 $x = -2$ 代入可得: $f'(-2) = \frac{7}{9} - \frac{3m+7}{9}(-2)^m$ 。此解法的求解过程相对复杂, 计算量大, 容易出错。

教学价值分析: 解法 1 和解法 2 都是常规思路的典范, 分别展示了基本的导数运算规则。这类方法能够确保学生获得基础分, 是教学中应强调的“守正”之路。掌握这类解法, 有助于学生在考试中稳妥应对, 确保基本分不丢失。

2.2.2. 巧解——裂项相消法、分组求和法、导数法及构造法

此类解法需要深刻理解函数与导数的关系, 极具创新性。

解法 3 (裂项相消法): 由题意可得

$$f'(x) = 3 + 4x + \cdots + (m+2)x^{m-1},$$

$$f'(-2) = 3 + 4 * (-2) + \cdots + (m+2) * (-2)^{m-1},$$

设 $C_m = (Am+B) * (-2)^{m-1}$, 且 $(m+2) * (-2)^{m-1} = C_{m+1} - C_m$, 则

$$C_{m+1} - C_m = [A(m+1) + B] * (-2)^m - (Am+B) * (-2)^{m-1} = (-3Am - 2A - 3B) * (-2)^{m-1},$$

通过待定系数法解得 $A = -\frac{1}{3}$, $B = -\frac{4}{9}$, 故 $C_m = \left(-\frac{1}{3}m - \frac{4}{9}\right) * (-2)^{m-1}$, 所以

$$\begin{aligned}
 f'(-2) &= 3 + 4 \cdot (-2) + \cdots + (m+2) \cdot (-2)^{m-1} \\
 &= C_2 - C_1 + C_3 - C_2 + \cdots + C_{m+1} - C_m \\
 &= C_{m+1} - C_1 = \frac{7}{9} - \frac{3m+7}{9} (-2)^m.
 \end{aligned}$$

此法体现了主动构造、化繁为简的高阶思维, 将求和问题转化为寻找裂项函数, 对学生的思维能力要求高。

解法 4 (分组求和法): 由题意可得

$$\begin{aligned}
 f'(-2) &= 3 + 4 \cdot (-2) + \cdots + (m+2) \cdot (-2)^{m-1} \\
 &= 1 + 2 \cdot (-2) + \cdots + m \cdot (-2)^{m-1} + 2 \left[1 + (-2) + \cdots + (-2)^{m-1} \right] \\
 &= \frac{1}{9} - \frac{1+3m}{9} \cdot (-2)^{m-1} + \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3} (-2)^m \right] \\
 &= \frac{7}{9} - \frac{3m+7}{9} (-2)^m.
 \end{aligned}$$

此法利用已知的求和公式直接计算, 通过知识迁移规避了错位相减。

解法 5 (导数法): 设 $c_m = (m+2)x^{m-1} = mx^{m-1} + 2x^{m-1}$, 因为 $(x^m)' = mx^{m-1}$, 所以数列 $\{c_m\}$ 的前 n 项和如下

$$\begin{aligned}
 S_m &= (x^0 + 2x + \cdots + mx^{m-1}) + 2(x^0 + x + \cdots + x^{m-1}) \\
 &= x' + (x^2)' + \cdots + (x^m)' + 2 \cdot \frac{1-x^m}{1-x} = (x + x^2 + \cdots + x^m)' + \frac{2(1-x^m)}{1-x} \\
 &= \left[\frac{x(1-x^m)}{1-x} \right]' + \frac{2(1-x^m)}{1-x} = \frac{(xm-m-1)x^m + 1}{(1-x)^2} + \frac{2(1-x^m)}{1-x},
 \end{aligned}$$

所以 $f'(-2) = \frac{7}{9} - \frac{3m+7}{9} (-2)^m$ 。此法沟通了函数与数列, 体现了整体把握问题的能力, 要求的思维层次高且计算量大。

解法 6 (构造法): 由题可得

$$f'(x) = 3 + 4x + \cdots + (m+2)x^{m-1},$$

构造函数 $g(x) = x^3 + x^4 + \cdots + x^{m+2} = \frac{x^3(1-x^m)}{1-x} = \frac{x^3 - x^{m+3}}{1-x}$, 则

$$g'(x) = 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (m+2)x^{m+1} = \frac{[3x^2 - (m+3)x^{m+2}](1-x) + x^3 - x^{m+3}}{(1-x)^2},$$

对上式两边同时除以 x^2 , 可得

$$3 + 4x^1 + \cdots + (m+2)x^{m-1} = \frac{[3 - (m+3)x^m](1-x) + x - x^{m+1}}{(1-x)^2},$$

将 $x = -2$ 代入可得 $f'(-2) = \frac{7}{9} - \frac{3m+7}{9} (-2)^m$ 。

此法对学生的代数变形能力与思维要求较高, 计算量较大, 故作答的过程中要求学生具备较强的数学思维能力。

教学价值分析：解法 3 至解法 6 突破了传统解答的固定模式，代表了不同方向的“创新”。解法 3 是微观的裂项技巧，解法 4 是宏观的公式应用，解法 5 和解法 6 则体现了函数视角的统摄力量。在教学过程中，应鼓励学有余力的学生从通法过渡到这些巧解，并比较其思想根源，这一过程，正是学生从“学会”走向“会学”，从“解题”走向“悟理”的素养进阶之路。

3. 启示与反思

基于对 2025 年高考数学全国卷 I 第 16 题的多解探析，我们认识到解题教学应是思维能力的系统性建构，而不是解题技巧的简单堆积。为实现“守正创新”的教学目标，提出以下四点教学启示与反思。

3.1. 回归教材本源，筑牢知识体系

高考数学命题一贯遵循“源于教材，高于教材”的原则。2025 年全国卷 I 第 16 题涉及的递推公式变形、等差数列证明和函数求导等核心内容，均可追溯至教材中的基础例题与习题。在教学中，应引导学生主动回归教材，梳理数列递推的基本类型、等差数列的证明方法以及导数运算法则，帮助学生构建完整的知识网络。这一过程不仅能够实现“以考促教”，推动教学回归学科本质，还能达成“以教助考”，助力学生应对“题在书外，根在书中”的考查要求，形成教学与考试的良性循环。

3.2. 倡导一题多解，发展思维弹性

本题呈现了定义法、裂项构造法、累乘法、数学归纳法、待定系数法等多种证明思路，以及错位相减、裂项相消、分组求和、导函数法等多元求和路径。教学中应避免“单一解法”的机械灌输，而是通过对比不同解法的逻辑起点与适用条件，引导学生理解“通法为主、巧解为辅”的辩证关系。例如，第(1)问中，定义法(通法)步骤简洁、易于迁移，而裂项构造法虽更具创造性，但对变形能力要求较高。教师可先确保全体学生掌握通法，再通过问题链启发学有余力的学生探索巧解，并组织讨论不同方法的优劣。这种教学方式既能夯实基础，又能提升学生的思维弹性和应变能力。

3.3. 精准诊断错因，优化分层教学

为了增强教学研究的实践指向性，笔者在所在学校选取了一个高三班级进行了该题的当堂测试与课后访谈，对学生典型错误进行了归类分析。结果显示：第(1)问常见错误：相当一部分学生在尝试累乘法时出现符号错误或递推关系错位；部分学生虽能推出最终结果，但未能清晰表述“后项减前项为定值”这一关键步骤，反映出对等差数列定义的理解停留在记忆层面，缺乏证明的逻辑意识。第(2)问常见错误：较多学生在错位相减时出现系数或符号错误，说明对算法流程掌握不牢；少数学生能想到构造裂项求和，但在待定系数求解时出现错误。

基于上述错因分析，教学中可实施分层推进策略：

第一层级(面向全体学生)：重点讲解第(1)问的定义法和第(2)问的直接求导与错位相减法，通过板书规范步骤，强调逻辑的严谨性，并通过变式训练强化通法的程序性知识。

第二层级(针对学有余力的学生)：设置问题链引导巧解探索。例如，第(1)问中追问：“观察递推式中的分式结构，能否联想到裂项相消？”第(2)问中启发：“求和式能否看作某个函数导数的特殊值？”课后布置分层作业，基础题巩固通法，选做题鼓励尝试多种解法并撰写解题反思。

3.4. 研究反思与教学展望

本研究基于一道高考真题的多解剖析与教学实践，得出上述启示。但需要客观指出，本研究的样本仅来自一个班级的短期测试，结论的普适性可能存在一定局限。不同学情、不同区域的学生在错误类型

和思维障碍上可能有所差异。后续研究可扩大样本范围，开展更长期的追踪实验，验证分层教学策略的持续效果。此外，本研究所采用的“一题多解-错因诊断-分层教学”的研究范式，对解析几何、函数与导数等其他高考主干模块的复习教学也具有一定的借鉴意义，但这需要进一步的教学实践与实证研究加以验证。我们期待通过持续的反思与改进，真正实现从“解题训练”到“素养培育”的教学转型。

4. 结论

高考数学的命题趋势越来越注重基础性与综合性的统一。本题的探讨显示，“守正”与“创新”在高中数学解题教学过程中并非对立，而是相辅相成。“守正”是“创新”的基石，无“守正”则“创新”如无源之水；“创新”是“守正”的升华，无“创新”则“守正”易陷于僵化。作为教师，我们应在教学中坚持“通法为主，巧解为辅”的原则，既夯实学生的知识基础，又发展其高阶思维，最终实现学生数学核心素养的全面提升。需要指出的是，本研究基于一道典型高考试题进行深度剖析，属于单一案例的质性研究，所得结论的普适性存在一定局限。不同知识模块(如解析几何、立体几何)的解题教学，其“通法”与“巧解”的具体表现形式可能有所不同。但本研究呈现的“守正创新”教学理念、分层教学策略以及基于学生错误的分析范式，对其他类型问题的教学同样具有借鉴意义。未来研究可进一步拓展至多个知识领域的横向比较，或采用实验研究的方法验证本教学策略的长期效果，以增强研究结论的推广价值。

基金项目

江西省基础教育研究课题(SZUSYSX2024-1034, SRSX2024-0898)。

参考文献

- [1] 黄明才. 深度学习理念下高中数学教学的探究与实践: 以“等差数列的前 n 项和公式”教学为例[J]. 数学通报, 2025, 64(6): 34-38.
- [2] 刘俊. 高中数学核心素养的渗透教学: 以数列为例[J]. 安徽教育科研, 2025(29): 16-19.
- [3] 杨秋霞, 莫绍会. “等差数列的概念”教学设计[J]. 中学数学教学参考, 2025(27): 33-36.
- [4] 杨锦坤. 2024 年新高考I卷数列试题分析[J]. 中学数学, 2025(17): 61-62.
- [5] 梁爽, 付苗苗. 变式教学在高中数学复习课中的实践探索: 以一轮复习“数列的通项公式”专题为例[J]. 数理天地(高中版), 2025(17): 97-99.
- [6] 李玉虬. 直观想象引路妙解高考数学创新题: 以 2024 年新高考数学全国I卷第 19 题的求解为例[J]. 福建中学数学, 2025(8): 29-32.