

矩阵变换思想在高中圆与椭圆教学中的应用

原嘉栋

沈阳航空航天大学理学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2026年4月6日; 录用日期: 2026年5月8日; 发布日期: 2026年5月14日

摘要

新课标对高中数学核心素养培育提出明确要求, 本文系统探析 2×2 坐标变换矩阵与向量加法支撑下的矩阵变换思想, 在高中圆与椭圆教学中的核心应用价值, 依托教学目标、教学内容、教学过程、教学评价四维逻辑, 构建系统化教学体系, 对“核心素养”“结构化教学”核心概念进行可操作化界定, 构建概念生成、思想迁移、素养落地三大实施策略, 为高中解析几何结构化教学提供可落地、可推广的实践范式, 推动学生数学核心素养的系统化发展。

关键词

矩阵变换, 圆与椭圆, 结构整合, 数学思想教学

The Application of Matrix Transformation Concepts in the Teaching of Circles and Ellipses in High School

Jiadong Yuan

College of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: April 6, 2026; accepted: May 8, 2026; published: May 14, 2026

Abstract

The new curriculum standards set clear requirements for cultivating core competencies in high school mathematics. This paper systematically explores the core value of matrix transformation concepts—supported by 2×2 coordinate transformation matrices and vector addition—in the teaching of circles and ellipses in high school. Following the four-dimensional logic of teaching objectives, teaching content, teaching process and teaching evaluation, it restructures the teaching system, operationalizes the definitions of “core competencies” and “structuring”, and proposes three major

instructional implementation strategies: concept formation, conceptual transfer, and competence cultivation. It aims to provide a practical model for structured teaching in high school mathematics and promote the systematic development of students' core mathematical competencies.

Keywords

Matrix Transformation, Circles and Ellipses, Structural Integration, A Teaching of Mathematical Ideas

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)》明确提出：高中数学课程应体现数学学科的特征和学生的认知规律，突出数学主线，凸显数学的内在逻辑和思想方法，发展学生数学学科核心素养[1]。解析几何的教学核心，是贯通数形结合的核心数学思想，搭建代数形式与几何本质的内在关联，帮助学生建立系统的数学认知体系，把握数学知识间的深层逻辑与内在统一性。这一要求为高中圆与椭圆教学指明了核心方向，教学实践需突破单一的解题技能训练，构建以数学思想为核心的结构化教学体系。矩阵变换作为解析几何坐标变换的代数载体，其中伸缩变换对应对角矩阵 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ，平移变换对应向量加法 $(x', y') = (x + h, y + k)$ ，是实现代数与几何深度融合的核心抓手。本文立足于高中数学课程的内容逻辑，聚焦矩阵变换思想在圆与椭圆教学中的结构整合路径展开系统研究。

矩阵变换思想在高中圆与椭圆教学结构整合的价值阐述

矩阵变换思想为高中圆与椭圆教学提供统一的代数框架与结构化的认知路径，核心是通过 2×2 变换矩阵与向量加法，将圆、椭圆的方程标准化纳入统一坐标变换体系，打破传统教学中零散的方程变形与孤立的几何分析之间的壁垒，实现代数结构与几何结构的同构对应。该思想可将圆、椭圆的方程标准化过程纳入统一的坐标变换体系，帮助学生建立可迁移的数学思维模型，规避碎片化的解题技巧训练，深化对解析几何学科本质的理解，同时为学生后续高等数学的学习奠定坚实的思想基础。布鲁纳的结构主义教学理论明确提出，教学的核心是帮助学生掌握学科的基本结构，“结构化教学”指以数学思想为核心，整合单元知识、搭建认知阶梯、设计问题链的系统化教学模式，矩阵变换思想正是解析几何学科基本结构的核心组成部分，其在教学中的渗透可有效推动学生结构化认知体系的构建。“数学学科核心素养”指直观想象、数学抽象、逻辑推理、数学运算、数学建模五大素养，矩阵变换思想的渗透可协同培育学生的五大核心素养，实现教学从“知识本位”向“素养本位”转型。

2. 矩阵变换思想在高中圆与椭圆教学中的教学内容设计要点

2.1. 锚定素养培育的教学目标设计

以核心素养落地为核心导向，明确矩阵变换思想在圆与椭圆教学中的三维教学目标：知识目标上，掌握圆与椭圆方程标准化的坐标变换规则；能力目标上，能运用 2×2 对角矩阵与向量加法刻画平移、伸缩变换；素养目标上，深化数形结合思想，培育直观想象、逻辑推理与数学建模素养。教学目标设计贴

合学生认知规律，为教学内容、过程与评价提供明确导向，避免目标空泛化，确保矩阵变换思想的渗透有清晰的方向。

2.2. 依托矩阵变换的教学内容重构

基于坐标变换这一矩阵变换思想的初等化内核，锚定“矩阵运算 - 坐标变换 - 几何图形”的对应逻辑，突破教材原有按曲线类型划分的线性编排，以坐标变换为核心主线重构圆与椭圆单元内容。教师将圆的一般方程化简、椭圆的非标准方程标准化、两类曲线性质分析纳入统一框架，明确伸缩变换对应 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 、平移变换对应向量加法，剥离孤立知识点，提炼贯穿全单元的变换思想内核。周振娜曾经提到

“在解析几何教学中，教师应引导学生运用演绎推理、归纳推理等方法，推导几何性质，证明几何结论” [2]。这一实践能让学生在重构的内容体系中，通过归纳推理总结圆与椭圆方程标准化的共同变换逻辑，不仅掌握知识关联，更能依托推理方法深化对坐标变换本质的理解，为后续认知进阶奠定基础。

2.3. 遵循认知进阶的教学过程设计

聚焦矩阵变换思想迁移，按照直观感知、代数表达、矩阵整合的认知阶梯设计教学过程，构建从具体到抽象、从特殊到一般的进阶路径。覃舒晗曾经提到“学生的学习能力和知识水平并非一成不变，而是一个动态发展的过程” [3]。基于这一特点，教学过程设计兼顾层次性与动态性，将矩阵变换思想渗透划分为三个阶段：第一阶段为图形变换直观感知，观察坐标与图形位置的对应关系；第二阶段为代数变换对应表达，用代数语言刻画变换过程；第三阶段为矩阵框架结构化整合，用 2×2 矩阵与向量加法概括变换共性。教学过程以核心问题链为纽带，以“代数运算对应几何变换”为主线，层层递进引导学生探究变换本质，消除思维进阶断层。

2.4. 聚焦思想落地的教学评价设计

以矩阵变换思想掌握与核心素养发展为评价核心，构建过程性与终结性相结合的评价体系。过程性评价关注学生在坐标变换探究、方程标准化推导中的思维表现；终结性评价聚焦学生运用统一变换框架解决圆与椭圆问题的能力。教学评价紧扣教学目标与教学内容，不单一以解题正确率为标准，重点评价学生对“平移 + 伸缩”复合变换本质的理解，以及代数与几何同构思维的形成，确保评价指向矩阵变换思想落地与素养培育。

3. 矩阵变换思想在高中圆与椭圆教学中的教学实施策略

3.1. 立足素养目标，开展概念生成教学

概念生成是矩阵变换思想落地的基础。教师可立足素养目标，以矩阵变换思想为核心开展概念生成教学，摒弃直接配方传统路径，紧扣“几何直观 - 代数表达 - 矩阵概括”认知逻辑，引导学生剥离圆的一般方程代数形式，用向量加法刻画平移变换，结合认知规律设计梯度探究任务，深化对坐标变换本质的理解。林慧斌在其研究中提到“为巩固学生对变换逻辑的掌握，强化通性通法的提炼，教师可围绕核心问题设计梯度化变式训练，引导学生在解决同类问题时自主提炼通性通法” [4]。教师可依托这一思路，让学生归纳平移变换规律，为后续矩阵框架整合铺垫基础。

以人教 A 版高中数学选择性必修第一册圆的一般方程教学为例，教师可结合教材例题开展具体教学，推动学生从代数表达到矩阵整合的认知进阶。教师可呈现例题：已知圆的一般方程为 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ ，引导学生配方转化为标准方程 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 。教师可结合例题，引导学生明确“ $x^2 + 2x$ ”“ $y^2 - 4y$ ”

的配方逻辑,对应坐标系平移变换,用向量加法 $(x',y')=(x+1,y-2)$ 刻画这一过程,理解配方与平移变换的关联。在此基础上,引导学生用 2×2 矩阵概括平移变换规律,将方程化简与矩阵变换思想绑定。教师可组织小组讨论,让学生自主梳理变换逻辑、提炼通性通法。通过这一过程,教师可帮助学生构建完整概念认知体系,落实知识与能力目标,培育核心素养,衔接后续思想迁移教学,形成概念生成教学闭环。

3.2. 依托内容重构,推进思想迁移教学

圆与椭圆教学内容结构化重构后,思想迁移成为实现知识融会贯通、深化矩阵变换思想渗透的核心路径。教师可依托内容重构成果,以统一变换框架为核心推进思想迁移教学,打破孤立讲解方程变形的模式,搭建“平移+伸缩”统一变换体系。教师可提炼图形标准化、坐标变换规则、代数表达、规律整合核心路径,以圆的一般方程化简为切入点,引导学生掌握平移变换对应向量加法的核心逻辑,总结变换规律,深化对矩阵变换思想的理解。教师可引导学生发现圆与椭圆的变换共性,为后续椭圆教学思想迁移铺垫,同时呼应矩阵运算、坐标变换、几何图形对应逻辑,通过对比让学生感知不同曲线变换的关联,建立可迁移的数学思维。

在“圆的一般方程”教学中,教师可将圆的平移变换逻辑迁移至椭圆教学:回顾圆的一般方程化简例题 $x^2+y^2-6x+8y=0$,引导学生梳理配方与平移变换逻辑、强化向量加法应用,再引入椭圆非标准方程例题 $25x^2+16y^2-100x+32y-284=0$,引导学生类比圆的方法,配方转化为标准方程 $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$,用向量加法 $(x',y')=(x-2,y+1)$ 和矩阵 $M=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ 分别刻画平移与伸缩变换,让学生理解椭圆标准化的“平移+伸缩”本质,建立与圆的变换关联。为强化思想迁移,引入 2×2 矩阵简化椭圆弦长计算案例:求该椭圆与直线 $5x+4y-14=0$ 的弦长。传统解法联立方程消元、用韦达定理代入弦长公式,计算繁琐易错;矩阵变换解法则先通过平移向量 $\mathbf{v}=(2,-1)$ 移至椭圆中心,再用伸缩矩阵转化为单位圆,计算单位圆弦长后,结合矩阵性质求得原弦长 $|AB|=\frac{4\sqrt{46}}{5}$ 。教师对比两种解法,引导学生提炼复杂曲线、矩阵变换、简单曲线范式,既强化矩阵变换的实用价值,又帮助学生构建统一坐标变换认知框架,实现知识融会贯通,推动思想迁移落地。

3.3. 遵循认知阶梯,优化课堂探究过程

课堂探究是深化矩阵变换思想理解的核心载体,其设计需依托直观感知、代数表达、矩阵整合的认知阶梯落地。基于此,教师可遵循认知进阶设计,以自主探究为核心优化课堂探究过程,将核心问题链贯穿全程,贴合认知阶梯。教师可围绕圆的一般方程教学,设计层级化探究问题,从“如何通过配方实现方程转化”切入,引导学生探究配方的几何本质及代数刻画方法,实现从操作到本质的递进。教师可不直接给出结论,引导学生自主观察、推导、总结,建构代数与几何关联,消除思维断层,为后续课例探究奠定思路基础。

在“圆的一般方程”教学中,教师可围绕教材核心例题设计具体探究课程,推动学生完成认知升华。教师可选取“求过三点 $A(0,0)$ 、 $B(1,1)$ 、 $C(2,0)$ 的圆的一般方程”例题,设计三步探究任务:第一步引导学生设方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,代入三点坐标列方程组求解 D 、 E 、 F 。第二步引导学生对求得的 $x^2+y^2-2x=0$ 配方,探究其几何本质是坐标系平移。第三步引导学生用向量加法 $(x',y')=(x-1,y)$ 刻画平移变换,再用 2×2 矩阵规范表达。教师可组织小组合作探究,让学生分工负责各环节,交流完善对变换本质的理解,借助几何画板演示方程系数与圆位置的关联,强化探究直观性。通过这一设计,既强化学生探究能力,又深化矩阵变换思想理解,为后续教学评价落地积累实践依据。

3.4. 聚焦素养发展, 完善教学评价落地

教学评价的完善既是检验矩阵变换思想教学效果的关键, 也是推动核心素养培育形成闭环的重要环节, 必须贴合圆的一般方程教学实际。教师可采用“过程性与终结性评价相结合”的方式, 完善评价落地机制, 紧扣教学目标与内容, 明确评价核心导向为矩阵变换思想落地与学生核心素养发展。过程性评价聚焦课堂探究、方程化简等关键环节, 重点观察学生对平移变换本质的理解, 及时发现思维偏差并调整教学策略; 终结性评价作为补充, 结合圆的一般方程教学内容设计针对性题目, 检验学生运用向量加法与矩阵变换思想解决问题的能力, 注重评价结果运用, 将反馈转化为教学优化举措, 实现评价与教学双向赋能。

在“圆的一般方程”教学中, 教师可结合课堂环节与课后练习, 完善评价体系。过程性评价针对“圆的一般方程配方”“向量加法刻画平移变换”等核心环节设计评价点, 比如观察学生在例题 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ 配方步骤的规范性, 提问其对应平移向量, 评价学生对变换逻辑的理解。同时评价小组探究中的参与度与思路梳理表现。终结性评价设计针对性试题, 如“已知圆的一般方程为 $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 25 = 0$, 用向量加法与矩阵变换表达其标准化过程并说明几何意义”, 检验知识运用能力。教师还可引导学生梳理核心内容绘制思维导图, 要求包含“圆的一般方程定义、配方步骤、平移变换的向量与矩阵表达、典型例题解析”等模块, 将其完整性、逻辑性纳入评价。吴晨表示“为进一步强化知识体系的结构化, 帮助学生梳理单元核心内容与思想方法, 教师可以引导学生, 从知识结构和思想方法的角度形成本单元的思维导图, 将零散的知识进行整合”[5]。这一设计让评价更具针对性, 衔接前文评价思路, 实现设计、实施、评价的完整闭环。

4. 结语

本文将 2×2 变换矩阵与向量加法融入矩阵变换思想初等化处理, 聚焦高中圆与椭圆教学, 按照教学目标、教学内容、教学过程、教学评价四维逻辑重组结构、精简语言、明确定义, 构建闭环式教学内容设计与实施体系, 融入课例分析, 弥补现有研究不足, 提供可操作实践范式。未来可进一步拓展应用范围、融合信息技术, 优化教学路径, 让变换思想落地课堂, 助力学生核心素养培育与数学思维提升。

参考文献

- [1] 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 2.
- [2] 周振娜. 新高考背景下高中数学解析几何教学优化策略[J]. 数学学习与研究, 2025(24): 6-9.
- [3] 覃舒晗. 高中解析几何习题课分层教学实践探索[J]. 数学学习与研究, 2026(3): 34-37.
- [4] 林慧斌. 破壁与融合: 高中解析几何教学中代数思维与几何直观的协同路径研究[J]. 高中生之友, 2025(14): 20-22.
- [5] 吴晨. 基于数学思想方法的高中数学单元教学研究——以“解析几何”高三复习课为例[J]. 试题与研究, 2025(36): 36-38.