

# 基于PageRank算法的线性代数案例式教学设计

李 歌

西安工业大学理学院, 陕西 西安

收稿日期: 2026年4月2日; 录用日期: 2026年5月2日; 发布日期: 2026年5月11日

## 摘 要

线性代数是理工科专业的重要基础课程, 但传统教学方式存在概念抽象、学生参与度低、理论与实践脱节等痛点问题。为提升教学效果, 文章以搜索引擎PageRank算法的数学原理为例, 探索线性代数课程的案例式教学改革路径。采用“问题驱动 + 案例教学 + 数字化工具”的教学模式, 将线性代数知识点融入具体应用中, 增强学生的直观理解与实践能力。教学实践表明, 案例式教学能够有效提高学生的课堂参与度与自主学习能力, 促进理论知识的迁移应用, 进而达到优化课程教学的目的。

## 关键词

线性代数, 案例式教学, PageRank算法, 矩阵

## Case-Based Teaching Design of Linear Algebra Based on the PageRank Algorithm

Ge Li

School of Science, Xi'an Technological University, Xi'an Shaanxi

Received: April 2, 2026; accepted: May 2, 2026; published: May 11, 2026

## Abstract

Linear algebra is an important foundational course for science and engineering majors, but traditional teaching methods suffer from challenges such as abstract concepts, low student engagement, and a disconnect between theory and practice. To improve teaching effectiveness, this paper explores the case-based teaching reform path for linear algebra courses by taking the mathematical principles of the PageRank search engine algorithm as an example. Adopting a teaching model that combines “problem-driven learning, case-based teaching, and digital tools”, the study integrates linear algebra concepts into practical applications, enhancing students' intuitive understanding and practical skills. Teaching practice shows that case-based teaching can effectively increase student engagement and

autonomous learning ability, promote the transfer and application of theoretical knowledge, and ultimately achieve the goal of optimizing course instruction.

## Keywords

Linear Algebra, Case-Based Learning, PageRank Algorithm, Matrix

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

线性代数是高等工科院校的一门基础理论课，主要讨论有限维线性空间的线性运算，由于许多科学领域广泛存在着线性关系或近似线性关系，因此本课程中所涉及的理论和方法广泛应用于各学科，是大学生学习自然科学的奠基石。但由于线性代数概念较抽象，学生逻辑思维能力与抽象思维能力不足，往往导致难以理解。此外，课程内容与应用割裂，学生对于线性代数在实际工程问题中的应用认识不足，能够进行相应计算但不会解决实际问题，缺乏利用数学工具优化设计方案的能力，导致难以建立数学工具在工程领域的迁移应用能力，阻碍了学科交叉融合的知识创新路径。

案例式教学(Case-Based Learning, CBL)通过真实情境驱动，以学生为中心，融合理论与实践，注重互动与能力培养，是一种高效的教学改革方向。教学围绕具体、典型、真实的案例展开，通过学生主动分析案例、提出问题、寻找解决方案，培养其独立思考与批判性思维能力；打破了理论知识与实际应用之间的壁垒，帮助学生在解决具体问题的过程中理解和运用抽象原理，提升知识的迁移与应用能力。案例式教学不仅关注知识的掌握，更注重培养学生分析问题、决策判断、信息整合、表达沟通等多方面的综合素养。近年来，该模式在医学、管理学等领域[1]-[4]取得了显著成效，但在数学类课程中的应用仍处于探索阶段[5]-[10]。本文结合线性代数的学科特点，探讨案例式教学在该课程中的设计与实践，旨在通过引入典型案例，帮助学生建立理论与应用的桥梁，激发学习兴趣，提升课程的高阶性、创新性和挑战度。

本文将 PageRank 算法[11]-[13]在矩阵中的应用为例，研究从案例分析、课堂组织、总结拓展等方面构建线性代数案例式教学体系，并通过教学实验验证其有效性，以期为数理类课程的创新教学提供参考，助力新工科、新理科背景下应用型人才的培养。

## 2. 案例背景

在如今的学习生活中，我们几乎每天都要使用网页搜索来查询信息，而这些搜索结果究竟是按照什么顺序排列的呢？

可以做这样一个小测试：首先，在网页上搜索“线性代数”，保留搜索结果页面；然后，重新打开一个网页，再次搜索“线性代数”。对比两次搜索结果的异同，看看这些网页链接的排列顺序是如何确定的？它们会不会是随机排列的呢？这个问题很容易验证：如果是随机排列，那么连续两次搜索结果的顺序一定不同。而实际上，除了付费展示的“广告”链接外，其他链接的排列顺序通常完全一致。这说明，网页搜索的排序并非随机产生。既然不是随机的，就一定是按照某种规律排列的，换句话说，链接的排序背后必然存在某种依据。那么，这种排序究竟是如何确定的呢？斯坦福大学的两位研究生 Sergey Brin 和 Lawrence Page，提出了一种前所未有的天才型网页排序算法，即 PageRank 算法。凭借这一技术，

他们共同创立了谷歌，创造了一个互联网传奇。PageRank 算法一直是谷歌公司的核心竞争力，虽然历经无数次优化，但其最核心的数学思想始终未变。那么，PageRank 算法的数学原理究竟是什么呢？

### 3. 案例分析

在网络中，几乎每个网页上都设有指向其他网页的访问入口，这些入口被称为“超链接”。点击超链接，便可从一个网页跳转至另一个网页。正是通过这种网页间相互链接的方式，全球数以万亿计的网页彼此连接，构成了一个庞大的网络——互联网。

Sergey Brin 和 Lawrence Page 从网页之间通过超链接互联互通的特性出发，将投票的思想引入网页排序中。具体而言，如果网页 I 被网页 II “引用”（即在网页 II 上放置了指向网页 I 的超链接，供用户点击访问），则意味着以下两点：

(1) 网页 I 获得了网页 II 的信任与认可，换句话说，网页 II 为网页 I 投出了一张“赞成票”。一个网页获得的“赞成票”越多，它被用户访问的可能性就越大（因为用户更容易看到指向它的超链接），其得分也就越高。

(2) 如果网页 II 本身的得分较高，那么它被用户访问的可能性也更大，这间接提高了网页 I 被访问的几率，从而使网页 I 获得更高的得分。这与现实世界中，一个人若能得到德高望重者的赞扬与推荐，便更容易赢得他人信任，道理是相通的。

显然，网页之间的超链接关系对网页的排名至关重要。为了便于展示，假设互联网只有 4 个网页，把它们命名为 I、II、III、IV，网页之间的超链接关系用图 1 表示。其中，带箭头的连线表示从一个网页到另一个网页存在一个超链接，比如从 I 到 IV 的箭头就表示网页 I 上有网页 IV 的超链接，因此可以从网页 I 跳转到网页 IV。

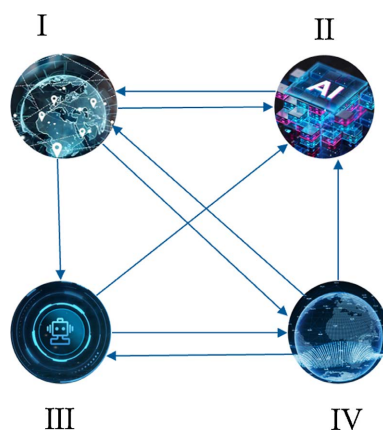


Figure 1. The hyperlink relationship among the four webpages

图 1. 4 个网页之间的超链接关系

为了演示 PageRank 算法的原理，在这里假设：用户打开了一个网页后，点击这个网页上的链接，进入下一个网页的概率是 0.9；关闭这个网页，新开一个窗口，浏览下一个网页的概率是 0.1。

假设已知某用户浏览的上一个网页是 I，在计算其浏览的下一个网页是 II 的概率时，只需要考虑下列两种情况的概率之和。

(1) 通过网页 I 的超链接跳转到网页 II。由图 1 可知，网页 I 上有网页 II、III、IV 的超链接，那么它跳转到下一个网页的概率 0.9 就被均等地分配给网页 II、III、IV。所以，通过网页 I 的超链接转到网页 II 的概率是  $0.9 \div 3 = 0.3$ 。

(2) 关闭网页 I, 新开一个窗口, 打开网页 II。由于一共有 4 个网页, 这 4 个网页平均“关闭上一个网页, 在新窗口中打开下一个网页”的概率 0.1, 因此用户关闭网页 I, 新开一个窗口, 打开网页 II 的概率是  $0.1 \div 4 = 0.025$ 。

那么, 根据图 1 中的超链接关系, “已知某用户浏览的上一个网页的前提下, 他浏览的下一个网页是某一网页”的概率是多少呢? 进一步地, 该网民浏览的第 5 个网页是 I、II、III、IV 的概率分别是多少呢? 浏览的第 100 个网页是 I、II、III、IV 的概率呢?

## 4. 线性代数课堂实例

选取“搜索引擎 PageRank 算法”为例, 将其融入到矩阵相关理论学习中, 对线性代数进行教学设计。

### 4.1. 课前任务

在课前线上发布关于谷歌公司的 PageRank 算法的资料[11]-[13], 通过文献阅读, 让学生了解网页搜索算法的背景。同时发布课前任务, 以“4 个网页问题”为例, 请同学们根据 4 个网页间超链接关系, 抽象出相关矩阵模型。

通过学习资料, 以实际问题为切入点, 可以使学生了解到本章节知识点与相关数学和应用背景, 感受到线性代数有着深厚的实际背景; 同时, 在完成课前任务的过程中, 学生需要从实际问题中抽象出矩阵模型, 锻炼了学生的分析问题、解决问题能力。

### 4.2. 课中设计

#### 4.2.1. 问题分析

根据 4 个网页间的超链接关系(见图 1), 已知某网民浏览的上一个网页的前提下, 他浏览的下一个网页是某网页的概率可用矩阵

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

表示, 称为转移概率矩阵。

假设用户打开浏览器, 浏览的第一个网页是 I、II、III、IV 的概率分别是 30%, 20%, 15%, 0.35%。那么, 他浏览的下一个网页是 I、II、III、IV 的概率可以用矩阵乘法

$$(0.3 \quad 0.2 \quad 0.15 \quad 0.35) \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

计算。

#### 4.2.2. 知识讲授

结合案例计算, 为学生展示矩阵乘法的操作流程, 总结给出矩阵乘法的定义。

**定义:** 给定矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times s}$ ,  $B = (b_{ij})_{s \times n}$ , 那么规定矩阵  $A$  与矩阵  $B$  的乘积是一个  $m \times n$  矩阵  $C = (c_{ij})_{m \times n}$ , 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}, (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n).$$

记作  $C = AB$ ，即  $C$  的第  $i$  行第  $j$  列上的元素  $c_{ij}$  就是  $A$  的第  $i$  行与  $B$  的第  $j$  列的对应元素的乘积之和。帮助学生提炼定义的重点内容，结合例题，总结矩阵乘法的计算方法，加深学生长时间记忆。

#### 4.2.3. 问题求解

进一步地，某用户浏览的第 5 个网页是 I、II、III、IV 的概率分别是多少呢？他浏览的第 100 个网页是 I、II、III、IV 的概率呢？

利用矩阵理论可以证明，他浏览的第  $k$  个网页是 I、II、III、IV 的概率可以用矩阵乘法

$$(0.3 \quad 0.2 \quad 0.15 \quad 0.35) \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}^k$$

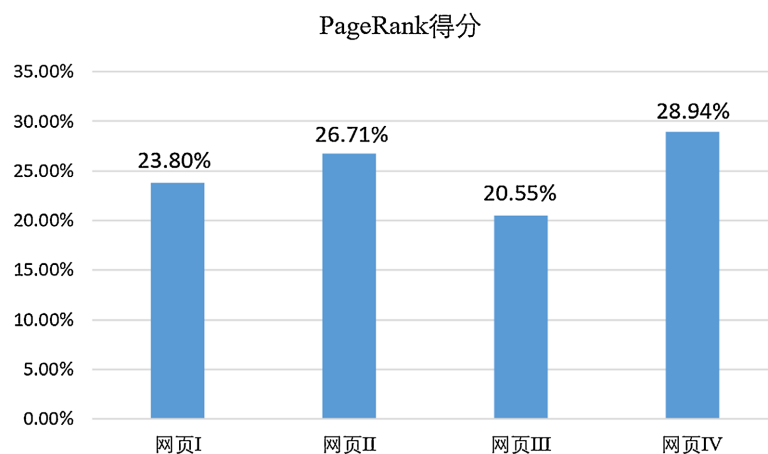
计算，利用 Matlab 计算矩阵乘法，结果如表 1 所示。

观察表 1 可以得到这样的结论：用户访问网页 I、II、III、IV 的概率随着时间的增加，变化越来越小，最后基本不变。实际上，利用矩阵理论可以证明，当  $k$  很大时，这个概率就无限接近一组数。如图 2

**Table 1.** The probability that the  $k$ -th webpage browsed by the user is I, II, III or IV, respectively.

**表 1.** 用户浏览的第  $k$  个网页分别是 I、II、III、IV 的概率

$k$	网页 I	网页 II	网页 III	网页 IV
1	20.00%	30.00%	15.00%	35.00%
2	26.00%	25.50%	21.00%	27.50%
3	23.93%	26.67%	20.46%	28.94%
5	23.80%	26.71%	20.54%	28.94%
10	23.80%	26.71%	20.55%	28.94%
50	23.80%	26.71%	20.55%	28.94%
100	23.80%	26.71%	20.55%	28.94%



**Figure 2.** The scores of webpages I, II, III and IV

**图 2.** 网页 I、II、III、IV 的得分柱状图

所示,把这组数据作为网页 I、II、III、IV 的得分。按照这个得分,得出这 4 个网页的排序为 IV>II>I>III。这就是谷歌公司的网页排序 PageRank 算法的基本思想。

#### 4.2.4. 总结拓展

简要回顾 PageRank 算法的数学原理,总结本节课知识点,帮助学生明确重点,掌握矩阵乘法的计算。

引导学生思考,假设某用户设定每次打开浏览器,出现的第一个网页总是网页 I,也就是他每次上网访问的第一个网页是网页 I 的概率为 100%,那么,这 4 个网页的排名是不是会随之改变?

#### 4.3. 课后任务

布置课后任务,学生完成本节相应习题。其次,小组合作,解决拓展问题,利用 Matlab 或 Python 等其他编程软件计算给出网页排序结果。利用课后任务,检验学生知识掌握能力,鼓励学生动手实践,培养分析问题能力以及团队协作意识。

### 5. 总结反思

在线性代数教学中融入应用案例,将抽象概念具体化,能够帮助学生直观理解矩阵等核心内容。同时,结合跨学科案例激发了学生学习兴趣,培养了数学建模能力,并强化了计算实践(如编程实现网页的排序),使线性代数从理论工具转化为解决实际问题的关键技能,增强了学生的应用能力和学科交叉视野。结合教学实验,课程教学取得了以下的教学成效:

- (1) 学生自主学习能力提升,线上学习、线下课堂参与度有所提高。

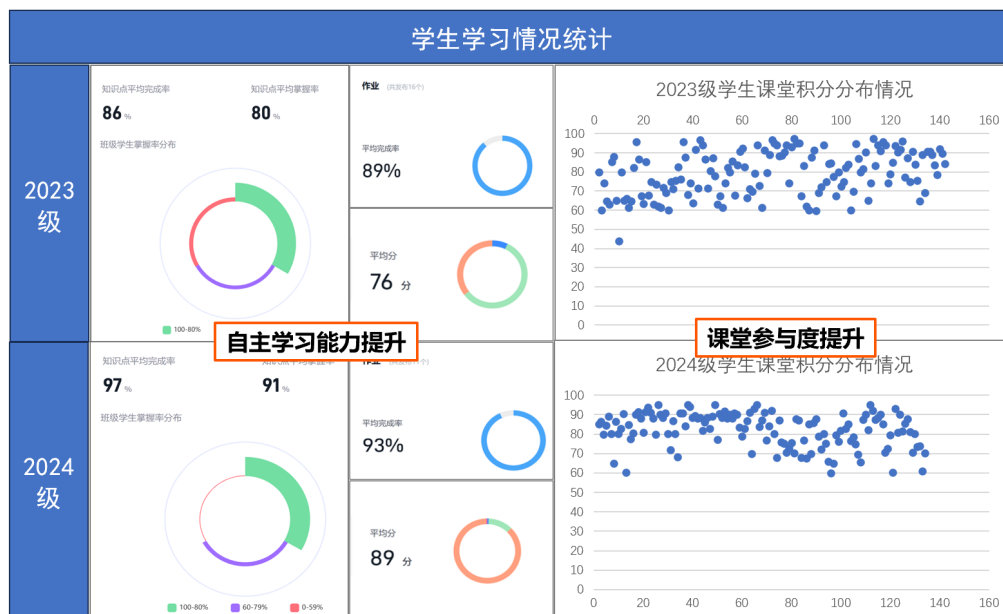


Figure 3. Increase in online learning and offline classroom participation

图 3. 线上学习、线下课堂参与度提升

对比 2023 级与 2024 级学生的线性代数课程学习情况,从图 3 中可以看到,学生在线上学习时,对于知识点的平均完成率从 86%提高至 97%,平均掌握率从 80%提高至 91%;同时,作业的平均完成率与平均分也有所提高,可以看出学生的自主学习能力有所提升。此外,对比两个年级的学生课堂积分情况,能够明显看出 2024 级学生的课堂积分集中程度更高,且高分学生人数更多,说明案例式教学有效提高了

学生的课堂参与程度。

(2) 学生的数学应用能力、创新实践能力得以提升。

从图4中可以看出,案例式教学使学生更加积极地参与到课程拓展项目的历练中,通过实验、实训、建模、学科竞赛参与等,学生在专业能力和综合素质方面均获得显著提升,不仅培养了严谨的数学思维,锻炼了问题分析、解决能力,并且通过团队协作,锤炼了学生“不怕吃苦、团结协作、开拓进取”的精神。



Figure 4. Course extension training  
图4. 课程拓展训练

## 6. 结束语

本文以搜索引擎 PageRank 算法的数学原理为例,探索线性代数课程的案例式教学改革路径,采用了“问题驱动 + 案例教学 + 数字化工具”的混合教学模式,有效地解决了线性代数课程教学中的概念抽象、参与度低、理论与实践脱节等问题,增强了学生的学习自主性,促进了学生知识应用能力的培养。教学结果表明,学生的自主学习能力、课堂参与度和实践能力均明显提升。未来,将持续优化教学资源,探索智能技术应用,为理工科基础课程改革提供有益借鉴。

## 参考文献

- [1] 张晓迪, 刘瑞, 曹猛, 等. 以问题为导向的“化学救援”案例式教学改革与实施[J]. 中国医药导报, 2024, 21(30): 110-114.
- [2] 白洁, 陈玉, 孔忻. 基于 Comsol 软件的电磁兼容课程案例式教学设计[J]. 高教学刊, 2024, 10(S2): 111-115.
- [3] 秦鹏. 案例式教学在计算机网络课程教学中的应用[J]. 微型计算机, 2024(6): 274-276.
- [4] 朱晓鸣, 庞彬彬. 工科背景下应用统计学专业高等代数课程的案例式教学——以机器学习中的核方法为例[J]. 教育进展, 2025, 15(9): 310-317.
- [5] 蔡学鹏, 马丽, 宋艳萍, 王飞. 基于实际应用的矩阵理论课程课堂教学设计[J]. 创新创业理论与实践, 2023, 6(5): 52-54.
- [6] 马婧瑛, 汪文帅. 有趣的矩阵: 看得懂又好看的线性代数[M]. 北京: 北京大学出版社, 2023.
- [7] 周儒省, 柴华金. 融合案例的线性代数课程教学实践[J]. 高师理科学刊, 2023, 43(9): 70-75.
- [8] 张晓华, 卢冠明, 王娟. 《线性代数》与物流专业融合教学案例设计——以齐次线性方程组解的结构为例[J]. 数学之友, 2024, 38(1): 56-59.
- [9] 杨倩, 宇振盛. 新工科背景下“线性代数”课程的案例式创新与探究——以逆矩阵的课堂为例[J]. 理论数学, 2024, 14(10): 191-197.
- [10] 朱佳宏, 王晓丹. 面向工科专业的线性代数案例教学探究[J]. 才智, 2024(18): 105-108.
- [11] 蔡建超, 蔡明. 搜索引擎 PageRank 算法研究[J]. 计算机应用与软件, 2008, 25(9): 59-60, 82.
- [12] 黄德才, 戚华春. PageRank 算法研究[J]. 计算机工程, 2006, 32(4): 145-146, 162.
- [13] 吴文军. 求解 PageRank 问题的几类算法研究[D]: [硕士学位论文]. 福州: 福建师范大学, 2024.