

基于HPM视角的一次函数教学案例研究

石煜, 李文钰

北华大学数学与统计学院, 吉林 吉林

收稿日期: 2026年4月1日; 录用日期: 2026年4月29日; 发布日期: 2026年5月8日

摘要

一次函数是初中数学中学生由“常量”向“变量”过渡的重要内容,也是后续函数学习的重要基础。然而当前教学存在方式单一、学生理解困难、文化渗透不足等问题。基于此,本文从数学史与数学教育融合(History and Pedagogy of Mathematics, 简称HPM)的视角出发,在建构主义学习理论和历史发生原理的指导下,对一次函数概念教学进行教学设计研究。通过梳理一次函数从古代比例思想到近代函数概念形成的发展脉络,提炼适合课堂教学的历史素材,并结合初中生认知特点,设计包含情境引入、历史再现、概念抽象和应用巩固等环节的一次函数教学案例。研究认为,在一次函数教学中合理融入数学史,有助于呈现数学知识的形成过程,促进学生对概念本质的理解,同时在教学中渗透数学文化,提升学生的学习兴趣与数学核心素养。

关键词

HPM, 一次函数, 教学设计

A Case Study of Linear Function Teaching from the Perspective of HPM

Yu Shi, Wenyu Li

School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin Jilin

Received: April 1, 2026; accepted: April 29, 2026; published: May 8, 2026

Abstract

Linear function is a key topic in junior high school mathematics that helps students transition from “constant quantities” to “variables”, and also lays an important foundation for subsequent function learning. However, current teaching suffers from problems such as monotonous methods, difficulties in students’ understanding, and insufficient integration of cultural elements. Against this background, this paper conducts a teaching design study on the concept of linear function from the

perspective of the integration of the History and Pedagogy of Mathematics (HPM), guided by constructivist learning theory and the genetic principle of history. By sorting out the development of linear function from the ancient idea of proportion to the formation of the modern function concept, this study extracts historical materials suitable for classroom teaching. Combined with the cognitive characteristics of junior high school students, a teaching case of linear function is designed, including situational introduction, historical representation, concept abstraction, application and consolidation. The study concludes that appropriately integrating the history of mathematics into linear function teaching helps to present the formation process of mathematical knowledge, promote students' understanding of the essence of concepts, infiltrate mathematical culture into teaching, and enhance students' learning interest and core mathematical literacy.

Keywords

HPM, Linear Function, Instructional Design

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

一次函数是初中数学函数学习的重点内容, 作为初等函数的基础, 它不仅是正比例函数的延伸, 更是后续学习反比例函数、二次函数乃至高中解析几何的重要铺垫, 在数学知识体系中具有承上启下的关键作用。从应用价值来看, 一次函数能有效刻画匀速运动、计费方案、工程进度等现实生活中的线性关系, 是学生运用数学知识解决实际问题的重要工具, 其教学直接影响学生数学建模能力和数形结合思想的形成[1]。

当前初中一次函数 $y = kx + b$ 教学仍存在诸多问题: 一是教学方式单一, 多以“概念讲解 + 例题演练”的模式为主, 直接抛出(k 、 b 是常数, $k \neq 0$)的表达式, 忽略知识的形成过程, 导致学生仅机械记忆公式, 无法理解其本质内涵; 二是学生认知困难, 对“斜率 k ”“截距 b ”的几何意义和变化规律理解模糊, 难以实现代数表达式与几何图像的灵活转化; 三是教学中缺乏数学文化渗透, 使学生误以为数学是孤立的公式和定理, 降低了学习的主动性和趣味性。

HPM 作为数学教育的重要研究领域, 核心是将数学史与数学教学有机融合, 让学生在追溯知识发展的过程中理解数学本质。将 HPM 融入一次函数教学, 既能通过还原数学知识的历史发生过程, 贴合学生的认知发展规律, 突破教学难点; 又能让学生感受数学的文化底蕴, 体会数学家的探索精神, 实现“知识传授”与“素养培养”的双重目标[2]。因此, 本研究基于 HPM 视角开展一次函数教学案例研究, 对优化初中函数教学、提升数学教学质量具有重要的实践意义。

2. 核心概念与理论基础

2.1. 核心概念界定

1. HPM 的内涵: HPM 是 History and Pedagogy of Mathematics 的缩写, 即数学史与数学教育, 是数学教育的一个重要分支。其核心内涵是将数学史的研究成果应用于数学教学实践, 通过挖掘数学知识的历史背景、发展过程、思想方法和文化内涵, 将其转化为适合学生认知水平的教学素材, 融入课堂教学的各个环节[3]。HPM 的教学并非简单介绍数学史故事, 而是让学生经历与数学知识历史形成相似的认知过

程, 实现对数学知识的主动建构, 同时感受数学的文化价值和人文魅力[4]。HPM 的教学模式主要包括附加式、复制式、顺应式和重构式, 其中重构式是将数学史与教学内容深度融合, 最能体现 HPM 的教学价值。

2. 一次函数的核心概念与认知定位: 一次函数是形如 $y = kx + b$ (k 、 b 是常数, $k \neq 0$) 的函数, 其中 x 为自变量, y 为因变量, k 为斜率, 刻画直线的倾斜程度, b 为截距, 是直线与 y 轴交点的纵坐标。当 $b = 0$ 时, 一次函数转化为正比例函数 $y = kx$, 因此正比例函数是特殊的一次函数。

从初中数学的认知定位来看, 一次函数是学生首次系统接触的“变量与函数”内容, 是学生从“常量数学”向“变量数学”过渡的关键节点。其教学不仅要让学生掌握概念、表达式和图像特征等基础知识, 更要培养学生的变量意识、数形结合思想和数学建模能力, 为后续函数知识的学习奠定认知基础和思想基础。

2.2. 理论基础

1. 建构主义学习理论: 建构主义学习理论认为, 学习并非教师向学生的知识传递, 而是学生基于自身已有经验, 主动建构知识意义的过程。学生是知识的建构者, 教师是学习的引导者和合作者, 教学的关键是创设合适的情境, 让学生通过自主探究、合作交流, 经历知识的形成过程, 实现对知识的深层理解[5]。基于 HPM 的一次函数教学, 通过还原一次函数的历史发展过程, 为学生创设贴近知识本质的学习情境, 让学生在追溯历史的过程中, 主动建构一次函数的概念, 理解其表达式与图像的内在联系, 符合建构主义的学习规律。

2. 历史发生原理: 历史发生原理是 HPM 教学的核心理论, 由德国数学家亥姆霍兹提出雏形, 后经弗赖登塔尔等数学教育学家发展完善。该原理认为, 学生对数学知识的认知发展过程与数学知识的历史发展过程具有相似性, 即数学知识的历史发生顺序是学生认知发展的天然顺序[6]。一次函数的历史发展经历了“比例思想→线性关系→直线表达式→形式化定义”的过程, 学生对一次函数的认知也需从具体的比例关系出发, 逐步过渡到抽象的函数概念。因此, 基于历史发生原理的一次函数教学, 能贴合学生的认知发展规律, 降低知识的抽象性, 帮助学生突破认知难点。

3. 一次函数教学的理论与研究基础

3.1. 一次函数的历史脉络梳理

一次函数思想源于古代生产生活中的比例关系。例如古埃及和古巴比伦的商业计算以及我国《九章算术》中均包含比例问题, 这些内容体现了线性关系的早期形式。17 世纪解析几何的创立, 使代数表达式与几何图形建立联系, 直线方程逐渐形成。随后莱布尼茨、伯努利和欧拉等数学家在研究变量关系的过程中提出并完善了函数概念。19 世纪狄利克雷等数学家进一步将函数定义为变量之间的对应关系, 使函数概念趋于严格。一次函数也在这一发展过程中逐渐形成完整的理论形式。

3.2. HPM 与一次函数教学结合的已有研究讨论

在一次函数教学的相关研究中, 张奠宙、汪晓勤等国内 HPM 领域核心学者指出[6], 当前一次函数教学中存在的“重结果轻过程、重知识轻思想”问题, 可通过融入数学史得到有效解决[7]。已有研究尝试将比例思想的历史、解析几何的创立过程融入一次函数教学, 让学生从历史发展的角度理解一次函数的形成过程。然而现有研究仍存在一定不足, 例如数学史材料使用较为简单, 多停留在教学补充层面; 历史内容与课堂教学结合不够紧密, 缺乏完整的教学案例。基于此, 本文尝试通过重构式融合方式, 将数学史贯穿一次函数概念教学的全过程, 为函数教学提供新的思路[8]。

4. 基于 HPM 的一次函数教学设计

4.1. 教学基本信息

课题：一次函数的概念

教学对象：初中八年级学生

课时安排：1 课时(45 分钟)

4.2. 教学目标

1. 理解一次函数的概念，掌握其一般形式 $y = kx + b$ (k 、 b 是常数， $k \neq 0$)，能识别一次函数与正比例函数的关系；能根据实际问题抽象出一次函数表达式。

2. 经历“朴素比例思想→变量关系的代数化→函数概念的抽象”这一与历史发生相似的认知过程，在问题驱动下自主归纳、合作探究，体会从特殊到一般、从具体到抽象的数学研究方法。

3. 感受数学家探索函数概念的思维历程，体会数学知识是“人类创造”而非“天降真理”，增强数学学习的文化认同感与探究兴趣。

4.3. 教学重难点

1. 教学重点：理解一次函数的概念，掌握一次函数的一般形式，能准确识别一次函数。

2. 教学难点：理解一次函数一般形式中 $k \neq 0$ 的条件，以及一次函数与正比例函数的内在联系，能结合实际问题抽象出一次函数表达式。

4.4. 教学过程

一、认知起点：从“朴素比例思想”出发

历史背景引入：

教师讲述：“古埃及人和古巴比伦人很早就在生活中发现了‘比例关系’。比如，他们发现：买的东西越多，付的钱也越多；走得越久，路程越远。但他们并没有‘函数’这个概念，只是朴素地感觉到‘一个量随着另一个量有规律地变化’。”

问题情境(小组探究)：呈现两个实际问题，让学生尝试用式子表示关系：

(1) 古埃及商人：每尺布换 5 袋麦子，换 x 尺布，得到 y 袋麦子。

(2) 现代生活：出租车起步价 8 元(含 3 公里)，超过后每公里加收 2 元，行驶 x 公里($x > 3$)，车费 y 元。

学生活动：独立思考后小组交流，列出式子： $y = 5x$ ， $y = 2x + 2$ 。

设计意图：从“朴素比例思想”出发，让学生感受线性关系的原始形态，建立认知起点。

二、认知冲突：从“算术”走向“代数”

历史背景过渡：

教师引导：“古代人只会用具体数字计算比例，比如‘5 尺布换 25 袋麦’。但到了 17 世纪，笛卡尔想到：能不能用字母来表示那些‘变化的量’？这样，一个式子就能概括无数种情况。”

问题驱动：“刚才我们列出的 $y = 5x$ 和 $y = 2x + 2$ ，如果用字母 k 、 b 来表示其中的常数，你能写出一个能概括所有类似关系的通用式子吗？”

学生探究：小组讨论，尝试抽象。可能会出现 $y = kx$ 、 $y = ax + b$ 、 $y = mx + ny$ 等多种表达。

教师引导：对比不同小组的表示方法，引导学生发现：无论字母怎么变，结构都是“一个变化的量 = 一个常数 × 另一个变化的量 + (可能有的)另一个常数”。

设计意图：让学生经历从“具体数字”到“字母表示”的飞跃，这是人类数学史上的一次重大跨越，也是学生认知的一次重要建构。

三、概念建构：归纳共性，形成定义

历史背景点睛：

教师简述：“17~18 世纪，莱布尼茨、欧拉等数学家正是在大量研究像 $y=kx$ 、 $y=kx+b$ 这类关系的基础上，逐步形成了‘函数’的概念。他们发现：这类关系有一个共同特点——自变量的次数是 1。”

归纳活动：

呈现一组式子：

$$y=3x, y=-2x+5, y=0.5x-3, y=4x+0, y=0$$

任务：小组合作，找出这些式子的共同特征，并尝试给这类函数起个名字。

学生汇报：教师引导提炼：都有两个变量；变量 x 的最高次数是 1；形式可以写成 $y=kx+b$ (k 、 b 是常数， $k \neq 0$)。

教师点拨关键点：为什么 $k \neq 0$ (如果 $k=0$ ，就变成 $y=b$ ， x “消失”了，不再体现变化关系)。当 $b=0$ 时，就变成 $y=kx$ (k 是常数， $k \neq 0$)，这就是正比例函数，所以正比例函数是特殊的一次函数。

设计意图：让学生在归纳中主动建构概念，而非被动接受定义。类比数学家从大量实例中抽象出概念的过程。

四、应用深化：在问题解决中巩固概念

分层练习：

1. 识别判断：下列函数中，哪些是一次函数？哪些是正比例函数？

(1) $y=x^2+3$; (2) $y=5$; (3) $y=100x-99$; (4) $m=6n$

2. 参数讨论：已知函数 $y=(m+2)x+(m-1)$ 是一次函数，求 m 的取值范围；若它又是正比例函数，求 m 的值。

3. 实际问题建模：

(1) 一个蓄水池原有水 80 m^3 ，现以每小时 5 m^3 的速度向池中注水，注水 x 小时后，池中总水量为 $y \text{ m}^3$ ；

(2) 某出租车的起步价为 8 元(行驶距离不超过 3 km)，超过 3 km 后，每增加 1 km 加收 2 元，行驶距离为 $x \text{ km}$ ($x > 3$) 时，车费为 y 元。

五、反思重构：小结与历史呼应

教学活动：师生共同完成课堂小结，从三个维度梳理本节课内容：

1. 知识维度：一次函数的概念 $y=kx+b$ (k 、 b 是常数， $k \neq 0$)、关键点($k \neq 0$)、与正比例函数的关系(正比例函数是特殊的一次函数)；

2. 历史维度：一次函数源于古代的比例思想，随函数概念的发展逐步完善，经历了“特殊→一般”的发展过程；

3. 思想方法维度：本节课运用了从具体到抽象、从特殊到一般的归纳思想，以及数学建模思想、分类讨论思想。

六、作业设计

基础作业：完成教材对应习题，巩固一次函数概念；

拓展作业：收集生活中一次函数的应用案例，尝试用表达式刻画；

文化作业：查阅笛卡尔、欧拉的数学贡献，撰写简短数学史小短文。

4.5. 教学效果预设

通过将数学史与问题情境结合, 学生能够在探索过程中形成对一次函数概念的理解。课堂不仅关注知识掌握, 也重视数学思想与文化体验, 使学生由被动接受转向主动建构, 为后续函数学习奠定基础。

5. 总结

本文从数学史与数学教育融合(HPM)的视角出发, 对初中一次函数概念教学进行了教学设计探讨。通过挖掘一次函数相关的数学史素材, 并结合学生的认知特点, 将历史背景融入课堂情境创设和概念形成过程之中, 构建了以“情境引入-历史再现-概念抽象-应用巩固”为主线的教学设计思路。研究表明, 在一次函数概念教学中适当引入数学史, 有助于突出知识的形成过程, 促进学生理解函数概念的内在联系, 同时增强课堂的文化内涵与学习兴趣。由此可见, 在中学数学教学中合理运用 HPM 理念, 对于优化概念教学、促进学生理解数学思想具有积极意义。未来研究还可以结合具体课堂实践, 对教学实施效果进行进一步的观察与分析, 以不断完善相关教学策略。

参考文献

- [1] 王心语. 初中函数教学重难点突破[J]. 数据, 2022(11): 103-105.
- [2] 马花萍, 秦学皎, 章庆勇, 等. 数学教育的人文价值与育人实践[J]. 科学咨询, 2025(21): 231-234.
- [3] 龙家娣. HPM 视角下的初中函数教学行动研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2022.
- [4] 高志国. HPM 视角下的一次函数单元起始课教学[J]. 数学教学通讯, 2025(8): 24-26.
- [5] 徐伟. 基于建构主义理论的高中数学教学实践与研究——以“三角函数的图象与性质”教学为例[J]. 数学教学通讯, 2025(36): 73-75.
- [6] 蒲淑萍, 汪晓勤. 弗赖登塔尔的 HPM 思想及其教学启示[J]. 数学教育学报, 2011, 20(6): 20-24.
- [7] 朱轶萱, 汪晓勤, 刘思璐. 第十一届国际数学史与数学教育会议综述[J]. 数学教育学报, 2025, 34(2): 90-96.
- [8] 秦语真, 刘思璐, 邹佳晨, 等. ICME-15 之数学史与数学教育专题研究综述[J]. 数学教育学报, 2025, 34(02): 84-89.