Advances in Education 教育进展, 2026, 16(5), 1131-1142
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2026.165967

从直觉到严谨：几何思维在全概率公式教学中的价值与应用

李晓婉

新疆大学数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2026年4月15日；录用日期：2026年5月13日；发布日期：2026年5月21日

摘 要

全概率公式是概率论教学的核心知识点，其抽象性与符号复杂性长期制约教学效果。本文以几何思维为切入点，构建“样本空间－面积－分割”的直观模型，将全概率公式中“划分、加权、整合”的抽象逻辑转化为可视化的几何操作。通过分析传统教学痛点，系统阐述几何思维在化解抽象难点、搭建直觉－严谨桥梁中的独特价值，并与文氏图、树形图等常见工具进行对比，揭示矩形面积模型的不可替代性。结合典型案例提出可操作的教学策略。教学实践表明，几何直观能显著提升学生对全概率公式的本质理解与应用能力。进一步扩展至贝叶斯公式并明确模型边界后，该几何框架可为概率统计课程教学改革提供更完整、可迁移的实践参考。

关键词

全概率公式，几何思维，面积模型，样本空间划分，几何直观，教学改革

From Intuition to Rigor: The Value and Application of Geometric Thinking in Teaching the Total Probability Formula

Xiaowan Li

College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Received: April 15, 2026; accepted: May 13, 2026; published: May 21, 2026

Abstract

The total probability formula is a core knowledge point in probability theory teaching, and its

文章引用: 李晓婉. 从直觉到严谨: 几何思维在全概率公式教学中的价值与应用[J]. 教育进展, 2026, 16(5): 1131-1142.
DOI: 10.12677/ae.2026.165967

abstractness and symbolic complexity have long restricted teaching effectiveness. This paper takes geometric thinking as the entry point, constructs an intuitive model of “sample space-area-partition”, and transforms the abstract logic of “partition, weighting, and integration” in the total probability formula into visual geometric operations. By analyzing the pain points of traditional teaching, this paper systematically expounds the unique value of geometric thinking in resolving abstract difficulties and building a bridge between intuition and rigor, and compares it with common tools such as Venn diagrams and tree diagrams to reveal the irreplaceability of the rectangular area model. Operable teaching strategies are proposed combined with typical cases. Pedagogical practice demonstrates that geometric intuition significantly enhances students’ essential understanding and application ability of the law of total probability. When further extended to Bayes formula with clearly defined model boundaries, this geometric framework provides a more complete and transferable practical reference for the reform of probability and statistics curriculum instruction.

Keywords

Total Probability Formula, Geometric Thinking, Area Model, Sample Space Partition, Geometric Intuition, Teaching Reform

1. 引言

全概率公式是连接古典概率、条件概率与统计推断的关键工具，其核心思想是“化整为零、由因推果”[1]。作为概率论教学中承前启后的重要内容，它既是对条件概率与乘法公式的综合运用，又为后续贝叶斯公式的学习奠定基础。然而，正是这一承上启下的枢纽地位，使其成为学生学习的难点所在。

在教学实践中，学生普遍面临三类困境。其一，难以理解完备事件组的必要性。学生往往将完备事件组视为人为设定的、可有可无的步骤，无法体会“不重不漏”对于分解复杂事件的逻辑必然性，更难以认识到划分其实是问题分解过程中的自然需要。其二，无法把握条件概率与加权平均的几何意义。全概率公式涉及联合概率、条件概率、边缘概率的多层嵌套关系，乘法与加法的意义容易混淆，学生虽然能够机械记忆“先乘后加”的操作步骤，却难以理解权重 $P(B_i)$ 的实质作用，对公式的结构逻辑认识模糊。其三，机械套用公式而缺乏主动建模能力。面对不同背景的题目——无论是工厂次品问题、疾病检测问题还是信号传输问题——学生往往将其视为孤立的题型，逐题套用模板，难以识别背后统一的概率结构，缺乏从具体情境中抽象出样本空间划分的能力。

传统代数化教学虽逻辑严谨、推导清晰，但过于依赖符号运算，缺少直观支撑。学生在面对抽象符号时，往往陷入“知其然不知其所以然”的困境：他们能够按照步骤代入公式计算，却无法解释每一步的数学意义，更无法在陌生情境中灵活运用。这种“形式化记忆”而非“结构性理解”的学习状态，严重制约了教学效果的提升。

几何直观是数学理解的重要路径，它将抽象关系转化为空间形象，使逻辑推理获得直觉支撑。从笛卡尔的解析几何到现代数学的几何化趋势，几何与代数的交融始终是数学发展的主线。在概率论教学中，几何思维同样具有独特的价值：将样本空间具象化为平面区域，将概率测度转化为面积度量，将事件关系转化为空间分割，原本晦涩的符号逻辑便可获得直观的几何载体[2]。

概率论教学中的抽象性与直观性之间的张力，是国际数学教育领域长期关注的议题。近年来，越来

越多的研究者主张通过可视化工具降低概率推理的认知门槛。Batanero 等[3]在其主编的《概率研究与教学》中系统梳理了概率可视化的多种工具，包括文氏图、树形图、面积模型、自然频率树等，并指出面积模型在理解条件概率与联合概率方面具有独特优势。其核心论点是：面积模型能够将抽象的乘法法则转化为直观的“子区域面积”，使学生从“记忆公式”转向“理解关系”。Sedlmeier 和 Gigerenzer [4]的经典研究表明，使用自然频率和可视化方法教授贝叶斯推理，能够在两小时内显著提升学生的理解水平。虽然该研究主要聚焦于自然频率格式，但其结论为面积模型的教学应用提供了间接支持——两者的共同之处在于将抽象的概率运算转化为可感知的空间或数量关系。Tversky 和 Kahneman [5]的认知心理学经典研究揭示，人类在概率判断中更依赖空间直觉而非符号逻辑，这为几何思维提供了根本性的认知基础。换言之，学生对面积模型的偏好并非偶然，而是根植于人类认知的基本特征。

国内关于全概率公式教学的研究，主要集中在教学方法改革与难点突破两个方面。李璇等[2]提出数形结合思想在概率论教学中的应用，强调通过图形帮助学生理解抽象概念。任芳玲[6]探讨了全概率公式与贝叶斯公式的教学方法，提出概率树图法的教学策略。徐群芳[7]从课程教学整体角度讨论了概率论与数理统计的教学改革。

本文以全概率公式为单一研究对象，构建“样本空间 - 面积 - 分割”的直观模型，将概率测度转化为平面面积，将事件关系转化为空间分割，实现从抽象符号到空间直觉的转化。全文结构如下：第二部分分析传统教学痛点，阐述几何思维的介入价值、认知心理学依据、与已有工具的比较及教学应用边界；第三部分揭示全概率公式的几何本质，建立面积模型并解读关键概念；第四部分提出基于几何思维的教学策略，包括“先建图形再给公式”、树形图向面积图的认知跨越以及用几何直观辨析易错点；第五部分以生产次品问题为典型案例，呈现几何化教学的具体流程；第六部分总结教学效果与启示。本文旨在为概率论教学中“化抽象为直观”这一核心难题提供一条可操作、可迁移的几何化路径。与已有可视化教学工具相比，本文模型并非简单替代，而是在认知结构与教学扩展性上提供新的可能性。

相较于已有研究，本文的矩形面积模型有三点改进：其一，构建了贯穿全概率公式教学全过程的统一几何建模框架；其二，建立了全概率公式与贝叶斯公式在同一几何图形中的一体化表达；其三，明确讨论了模型的适用边界与教学应对策略，将其定位为“认知脚手架”。

2. 全概率公式的教学困境与几何思维的介入价值

2.1. 传统教学的典型难点

全概率公式的教学难点主要体现在四个方面。其一是划分概念的抽象性。学生往往将完备事件组视为一种需要死记硬背的人为步骤，无法理解“不重不漏”对于分解复杂事件的必要性，难以体会到划分其实是问题分解过程中的自然需要。在矩形面积模型中，整个样本空间被可视化为一个面积为 1 的矩形，而“划分”则对应着对这个矩形进行竖直线切割——竖条之间互不相交体现了“不重”，所有竖条拼合为完整矩形则体现了“不漏”。这种可视化使学生认识到，划分并非数学家的抽象要求，而是测量复杂面积时的自然物理步骤：既然直接计算目标事件 A 的面积存在困难，那就观察 A 在每个竖条中占据的比例，从而将复杂问题分解为若干简单部分的累加。

其二是符号结构的复杂性。全概率公式包含联合概率、条件概率、边缘概率等多层关系，乘法与加法的意义容易混淆，学生难以把握各部分之间的逻辑关联。几何模型将抽象的符号映射为直观的几何元素：划分事件的概率 $P(B_i)$ 对应竖条的总宽度，条件概率 $P(A \mid B_i)$ 对应在 B_i 竖条内部事件 A 所占的比例，二者的乘积对应 A 在 B_i 竖条中的实际面积，而求和则将所有竖条中属于 A 的小块面积累加，得到 A 的总面积。这一视觉映射让学生明白，全概率公式的本质并非“先乘后加”的代数操作，而是“先分割、再

测量、最后累加”的几何测度过程。

其三是加权思想的隐蔽性。学生往往仅机械记忆“先乘后加”的操作步骤，不理解权重来自划分事件的概率，更无法主动构造恰当的划分来解决问题。在矩形模型中，权重被直观地呈现为竖条的宽度--竖条越宽，其对最终总面积的贡献就越大。通过绘制宽度差异显著的极端情况，学生能够直观感受到概率较大的划分事件在结果中占据的主导地位。这种几何构图还促使学生在解题之初便主动思考：应当将矩形的横轴按照何种方式进行切割，切割方式取决于影响结果的源头因素，从而引导学生在第一步就主动寻找合理的划分，而非被动套用公式。

其四是应用迁移的困难性。面对不同背景的题目，学生难以识别出统一的概率结构，往往只能逐题套用模板，缺乏对问题本质的抽象能力。矩形面积模型剥离了具体的文字背景，揭示了全概率问题不变的拓扑结构：横轴代表导致结果发生的不同“原因”或“阶段”(即划分)，纵轴代表在给定原因下结果发生的条件概率，目标则是求最终结果的总概率。无论是工厂生产中的不同车间及其次品率、疾病检测中的患病状态与检测阳性率，还是信号传输中的发送信号与接收正确率，均可统一纳入这一几何框架。通过反复在矩形模型中绘制不同背景的问题，学生逐渐建立起“以不变应万变”的认知结构，无论题目背景如何变化，只要存在“多阶段”或“由因推果”的结构，便能在脑海中或纸上构建出被分割的矩形，从而实现知识的有效迁移。

2.2. 几何思维的教学价值

几何思维以样本空间为单位区域、概率为区域面积、事件为子集、条件概率为局部占比，实现了概率关系的可视化。这一直观模型并非简单替代传统教学方法，而是在认知层面发挥了独特的功能性价值，具体体现在以下四个方面。

(1) 化隐为显：抽象概念的直观载体

概率论教学中的核心概念——如划分、加权、条件概率等——在传统符号表述中往往呈现为隐性的逻辑关系，学生难以直接感知其内涵。几何思维通过将样本空间具象化为矩形区域，使原本内隐的数学结构获得了外在的直观载体。划分对应矩形的竖直线切割，加权体现为宽度的比例关系，条件概率转化为局部区域内的占比。这些核心思想由此变得“可看、可画、可解释”，学生能够通过视觉观察和动手绘制来把握概念的本质。这种从抽象到具象的转化，使概率概念从“需要记忆的符号”转变为“可以观察的结构”，有效降低了学生进入概率论学科的门槛。

(2) 降低认知负荷：以面积运算替代符号操作

全概率公式涉及联合概率、条件概率和边缘概率的多层嵌套关系，符号表达式的复杂性给学生带来了显著的认知压力。根据认知负荷理论[8]，当信息呈现方式与学习者的认知加工能力相匹配时，学习效果最为理想。几何思维将抽象的代数运算转化为直观的面积测量——乘法对应求矩形子区域的面积，加法对应不同区域面积的累加。这一转化减少了工作记忆中需要同时保持的抽象符号数量，使学生能够将认知资源集中于理解问题结构而非机械记忆公式。面积运算的直观性还降低了计算过程中的错误率，学生在绘制图形后能够通过视觉检验结果的合理性，形成自我纠错的能力。

(3) 构建统一模型：促进知识迁移的稳定框架

概率问题往往以多样化的背景呈现，如工厂次品、疾病检测、信号传输等，学生容易陷入“逐题套模”的困境，难以识别不同情境背后的同构结构。几何思维提供了一个稳定的思维框架：横轴代表划分事件(原因)，纵轴代表条件概率的变化，目标事件的总概率对应矩形中特定区域的面积。这一模型剥离了具体情境的干扰，揭示了全概率问题不变的拓扑结构。学生在反复使用同一几何框架分析不同背景问题的过程中，逐渐建立起“以不变应万变”的认知图式，从而能够在新情境中主动识别问题结构并迁移已

有经验，实现从“题型训练”到“结构理解”的跃升。

(4) 搭建直觉到严谨的桥梁：从直观感知走向形式表达

数学教学长期面临直觉与严谨之间的张力：过早引入形式化定义可能导致学生囫囵吞枣，而过度依赖直观又可能削弱数学的精确性。几何思维在这一张力之间发挥了桥梁作用。矩形面积模型首先为学生提供了可感知的直观基础——学生通过观察图形能够形成对全概率公式的朴素理解。在此基础上，教师可以引导学生将直观观察转化为数学语言：将竖条的宽度表达为 $P(B_i)$，将局部占比表达为 $P(A|B_i)$，将面积累加表达为 $\sum P(B_i)P(A|B_i)$。这一过程实现了从“看见”到“表达”的自然过渡，使形式化符号不再是外在于理解的规定，而是对直观经验的精确刻画。学生在完成这一转化后，既掌握了公式的严谨表达，又保留了对其意义的深层理解，从而真正实现了直觉与严谨的有机统一。

2.3. 认知心理学依据

几何思维的有效性可从认知心理学中获得理论支撑。双重编码理论[9]指出，人类认知系统包含言语编码与意象编码两个相互关联但又独立运作的通道。当信息同时以言语形式(如公式、文字)和意象形式(如图形、空间关系)呈现时，学习者能够建立更丰富的表征网络，从而增强理解与记忆。全概率公式的传统教学过度依赖言语编码，几何思维则激活了意象编码通道，使两类表征相互印证，形成协同效应。此外，认知负荷理论[8]强调，教学应降低外在认知负荷，释放认知资源用于深层理解。几何思维将抽象的符号运算转化为直观的面积测量，减少了工作记忆中需要同时保持的抽象信息量，使学生能够将认知资源集中于把握问题结构本身，而非机械记忆操作步骤。

2.4. 与已有工具的比较

矩形面积模型在概率教学中具有不可替代性。文氏图虽能直观表示事件间的包含与交并关系，但其本质是定性工具，难以表达概率的数值权重——当划分事件概率不等时，文氏图无法体现面积差异所对应的权重差异。树形图擅长呈现多阶段试验的路径结构，但路径分支的“宽度”缺乏概率权重的视觉对应，学生易将其理解为等可能情形，且复杂问题的树形图会迅速变得庞杂臃肿。相比之下，矩形面积模型实现了三重统一：其一，以横轴宽度精确表达划分事件的概率权重，权重差异一目了然；其二，以纵轴高度表达条件概率，将“比例”概念可视化；其三，以子区域面积直接对应联合概率，使“加权求和”呈现为直观的面积累加。这一模型兼具定量的精确性与定性的直观性，是文氏图与树形图难以替代的认知工具。

2.5. 教学应用边界

几何思维虽具显著优势，亦有其适用条件与局限性。在适用条件方面，该模型最适于处理可分解为“先因后果”两阶段结构的全概率问题，尤其当划分事件数量有限(通常不超过 5 个)且条件概率易于在图形中标注时，教学效果最佳。在局限性方面，当划分事件数量过多时，矩形被过度细分，图形呈现变得拥挤，反而增加视觉干扰；当问题涉及连续型随机变量或复杂依赖关系时，离散矩形模型难以直接应用；此外，几何思维主要服务于概念的直观理解，学生仍需完成从图形到符号表达的过渡，若停留于直观层面而未能抽象为形式化表达，则可能影响后续学习的严谨性。教学中应将几何思维作为认知脚手架，在学生建立直观理解后及时引导其回归符号表达，实现直觉与严谨的有机统一。

3. 全概率公式的几何本质：面积模型

3.1. 几何模型的直观对应关系

基于上述几何思维，全概率公式中的概率概念可建立如表 1 所示的直观对应关系。

如图 1 所示，样本空间 Ω 被表示为面积为 1 的单位矩形，完备事件组 $\{B_1, B_2, B_3\}$ 通过竖直线将矩形分割为若干互不重叠的条带，各条带的宽度对应其概率 $P(B_i)$。目标事件 A 以蓝色区域呈现，其在每个条带内的高度占比即为条件概率 $P(A|B_i)$。蓝色部分的总面积即为 $P(A)$，这正是全概率公式 $\sum P(B_i)P(A|B_i)$ 的几何意义——各条带内蓝色区域面积之和。

Table 1. Correspondence between probability concepts and geometric elements
表 1. 概率概念与几何要素的对应关系

概率概念	几何要素	直观解释
样本空间 Ω	单位矩形(面积 = 1)	所有可能结果构成的整体
事件 B	矩形内子区域	$P(B) = Area(B)$
完备事件组 $\{B_1, B_2, B_3\}$	矩形的无重叠、全覆盖分割	划分的“不重不漏”
目标事件 A	覆盖各分区的公共区域	$P(A) = Area(A)$
条件概率 $P(A\|B_i)$	B_i 内 A 所占面积比例	局部区域中的占比

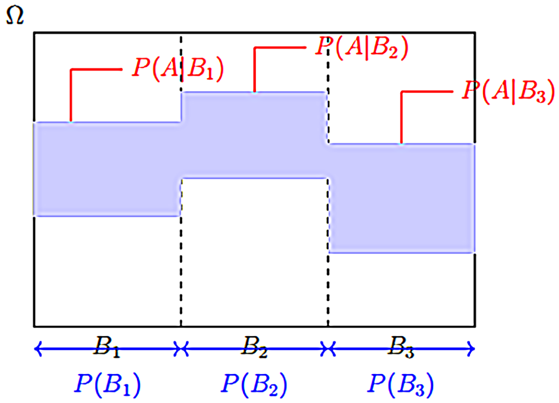

Figure 1. Schematic diagram of the rectangular area model, where the blue area represents event A
图 1. 矩形面积模型示意图，其中蓝色区域表示事件 A

这一几何模型将抽象的概率运算转化为直观的面积测量，使“划分 - 加权 - 整合”的逻辑链条获得可视化的认知载体。可见全概率公式 $P(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum P(B_i)P(A|B_i)$ 在几何上等价于：事件 A 的总面积 = 各分区 A 的面积之和。由面积可加性：$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$，再由条件概率定义：$P(A \cap B_i) = P(A)P(A|B_i)$，即得全概率公式。这种从面积可加性出发的推导，使学生无需记忆公式结构，而是从“总面积等于各部分面积之和”这一生活常识出发，自然“生长”出全概率公式。

3.2. 几何工具的比较优势

在教学实践中，文氏图和树形图是常用的概率可视化工具，但各有局限。文氏图的优势在于直观展示事件间的包含与相交关系，能够清晰呈现事件的逻辑结构。然而，其在表现划分事件的“权重”(即概率大小)方面存在明显不足——文氏图中各区域的面积通常仅示意性地表示事件关系，难以精确反映不同事件概率的数值差异，因而无法直观体现加权平均的思想。树形图的优势在于清晰展示分步试验的过程与路径结构，有助于学生理解多阶段随机试验的序列关系。但其局限性在于，学生容易陷入“路径”思维，将关注点集中于各条分支的具体走向，而弱化了对样本空间整体统一性的把握，且当分支数量增多

时图形迅速变得庞杂。

相比之下，矩形面积模型展现了独特的教学价值。该模型将样本空间整体呈现为一个单位矩形，通过竖直线分割实现“不重不漏”的划分，能够同时体现两个关键维度：划分的概率权重由条带宽度直观表达，条件概率由条带内阴影部分的高度占比清晰呈现。在这一几何框架下，乘法公式对应于各条带内矩形子区域的面积，加法公式对应于所有条带内阴影面积的总和，二者被整合在一个静态、整体的图形之中，实现了“权重”与“比例”的统一呈现。这种整合性不仅帮助学生理解全概率公式的结构，更为后续学习贝叶斯公式奠定了基础——当需要逆向求解时，学生能够直观地看到目标面积在总面积或特定条带中的占比关系。

3.3. 关键概念的几何解读

矩形面积模型将全概率公式的核心思想凝练为四个相互关联的几何要素。划分体现为对整体空间的无重叠分割，这正是“分解问题”的几何表达——当直接求解复杂事件存在困难时，通过将样本空间划分为若干互不重叠的子区域，实现化繁为简。权重对应划分事件的概率 $P(B_i)$，在几何图形中表现为各分区的宽度，直观反映了每一部分在整体中所占的“份额”。条件概率 $P(A|B_i)$ 则呈现为局部空间内部目标事件的发生比例，通过各条带内阴影区域的高度占比加以体现。基于上述三个要素，加权平均自然呈现为按各部分面积大小加权后的整体比例——各条带内阴影面积 $P(B_i)P(A|B_i)$ 之和与整体总面积之比，这正是全概率公式 $P(A)=\sum P(B_i)P(A|B_i)$ 的几何本质。这一模型将抽象的“划分 - 权重 - 条件 - 加权”逻辑链条转化为可视化的空间关系，使全概率公式的数学结构获得直观的几何载体。

3.4. 几何模型向贝叶斯公式的扩展应用

在矩形面积模型基础上，贝叶斯公式可被直观表达为：

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}=\frac{\text{第 }i\text{ 条竖条内的阴影面积}}{\text{总阴影面积}}$$

矩形面积模型不仅服务于全概率公式的教学，更能自然、平滑地延伸至贝叶斯公式，使“由果溯因”的逆向推理获得直观的几何支撑。在全概率公式的几何模型中，学生已经建立了如下认知：各竖条宽度对应先验概率 $P(B_i)$，各竖条内阴影高度对应条件概率 $P(A|B_i)$，各竖条内阴影面积对应联合概率 $P(A\cap B_i)$，而总阴影面积则对应全概率 $P(A)$。贝叶斯公式的核心是求解“已知结果 A 发生，其来自第 i 个原因 B_i 的概率”，即

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}.$$

在几何图形中，这一表达式可以直观地解读为：后验概率等于第 i 条竖条内的阴影面积除以全部阴影的总面积——换句话说，“我这一块，占了多少份额？”

从几何视角看，全概率公式与贝叶斯公式构成了一个完整的认知闭环：前者是“正向求总”——将各竖条内的阴影面积相加得到总阴影面积；后者是“逆向求因”——在已知总阴影面积的前提下，反向计算某一竖条内阴影面积所占的比例。学生只需观察图形即可发现：某一条带对结果发生的贡献(联合概率)除以所有条带贡献的总和(全概率)，即为该条带作为原因的后验概率。这种从“总面积”到“面积占比”的认知转换，使学生无需记忆贝叶斯公式的符号形式，而是直接从图形中“读出”答案。当需要比较多个后验概率 $P(B_i|A)$ 的大小时，几何模型同样展现出独特优势：学生只需比较各竖条内阴影面积的大小——面积最大的，即为最可能的原因，这一结论无需复杂计算即可从图形中直观判断。

几何模型还能有效辨析贝叶斯公式教学中的常见混淆点。学生常混淆 $P(A|B_i)$ 与 $P(B_i|A)$，而在矩形面积模型中，二者的区别一目了然：前者是“条内看阴影”，即某竖条内阴影的高度，反映的是在给定原因下结果发生的可能性；后者是“阴影中看条”，即某竖条内阴影面积占总阴影面积的比例，反映的是在已知结果下各原因的可能性大小。这种空间视角的转换，帮助学生从根本上理解两种条件概率的本质差异。基于以上分析，建议贝叶斯公式的教学流程如下：首先复习全概率公式的矩形面积模型，强化“总面积等于各块面积之和”的认知；然后以“已知结果发生，反向追溯原因的概率在图上怎么找”这一问题引入；接着引导学生观察并说出“我的面积除以总阴影面积”；在学生形成直观理解后，引出标准贝叶斯公式；最后通过若干变式练习，强化几何与符号的对应关系。通过这一流程，贝叶斯公式不再是抽象的新知识，而是全概率公式几何模型的自然延伸，学生在直观理解的基础上完成符号化抽象，实现从“直觉”到“严谨”的平稳过渡。

4. 基于几何思维的教学策略

4.1. 先建图形，再给公式

教学起点不从抽象公式出发，而从矩形分割入手。教师引导学生先动手绘制单位矩形，通过划分、涂色、计算面积等操作建立直观感知，再自然引出代数表达，实现“直观先行、形式后置”。这一顺序符合“从具体到抽象”的认知规律，使学生在形成几何直觉的基础上理解符号意义，避免机械记忆[10]。从思政视角看，这一过程也蕴含着“实践出真知”的认知理念——唯有亲身经历从具体操作到抽象概括的过程，才能真正掌握知识的本质。

4.2. 树形图向面积图的认知跨越

树形图体现的是“路径概率”，强调分步试验的过程性思维；面积图体现的是“空间占比”，强调整体结构的统一性思维。如图 2 所示，树形图中的每一分支路径可以对应到矩形中的一条“竖条”，每条路径的概率(即分支概率的乘积)对应为竖条内阴影小矩形的面积。这一对应关系实现了从分步概率到整体概率的空间统一，帮助学生直观看到不同分支对总概率的贡献，避免陷入“路径思维”而忽略样本空间的整体性。从思政角度而言，这种从局部到整体的认知跃迁，恰如引导学生树立系统观念——既要看到事物发展的具体路径，更要把握整体的结构与联系。

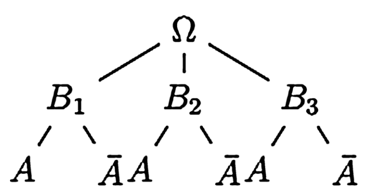

Figure 2. Tree diagram: path probability
图 2. 树形图：路径概率

4.3. 用几何直观辨析易错点

几何图形为辨析概率学习中的常见易错点提供了直观支撑。以“$P(A)=\sum P(A|B_i)$”这一常见错误为例，图形直观揭示了错误的根源：直接相加局部比例，实则是假设各分区面积相等。如图 3 所示，$P(A|B_i)$ 仅是各竖条内阴影的高度，只有乘以宽度 $P(B_i)$ 后累加，才能得到正确的阴影总面积。这一过程体现了公平与权重的辩证关系——不同贡献应当区别对待。

在区分 $P(A|B_i)$ 与 $P(B_i|A)$ 这对容易混淆的概念时，几何视角使二者的差异一目了然：前者是“块

内看 A”——在给定条带内阴影所占的比例(即图 3 中各竖条内阴影的高度)；后者则是“A 内看块”——在总阴影中某一条带所占的比例(即某竖条内阴影面积占总阴影面积的比例)。这种空间位置关系的转换，帮助学生清晰理解逆向概率的本质。

在理解“完备事件组”这一核心概念时，图形强调分割必须铺满整个样本空间——如图 3 所示，三条竖条完整覆盖了整个矩形，没有任何遗漏或重叠。这一约束也蕴含着“全面看问题”的方法论：分析问题时应覆盖所有可能情形，做到不重不漏、全面系统。

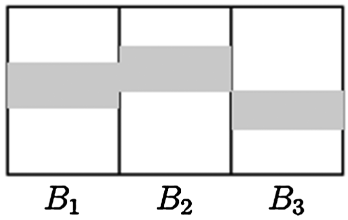

Figure 3. Area chart: spatial distribution
图 3. 面积图：空间占比

4.4. 模型的适用边界与教学应对策略

任何教学模型都有其适用范围与局限性，明确这些边界条件，既是对学术严谨性的尊重，也能帮助教师更科学、更有效地使用该模型，避免生搬硬套或产生新的误解。

4.4.1. 适用条件

矩形面积模型并非适用于所有概率问题的万能工具，其在以下条件下教学效果最佳。其一，问题具有明确的“两阶段结构”，即结果的发生可清晰地分解为若干互斥的“原因”或“路径”，这对应全概率公式“由因推果”的核心逻辑。其二，划分事件(即完备事件组)的数量有限，通常建议不超过 5 个。当划分数量过多时，矩形被过度细分，图形变得拥挤杂乱，反而增加视觉干扰，削弱直观优势。其三，条件概率 $P(A|B_i)$ 易于在图形中标注和解释，通常要求其为固定数值而非复杂函数。

4.4.2. 主要局限与教学应对

在实际教学中，教师可能面临多种超出模型理想适用条件的情境。以下针对几种典型局限，提出具体的教学应对策略。

局限一：划分事件数量过多。当完备事件组包含 6 个甚至更多划分时，矩形被切割成过多细窄的竖条，各条带的宽度差异难以分辨，阴影面积的标注也变得困难。针对这一情况，教师可引导学生先对划分进行合理合并，将概率相近或性质相似的小类归并为大类，在保持问题本质不变的前提下降低视觉复杂度。此外，也可采用“分层建模”的策略：先对主要划分建立矩形模型，再针对某一关键竖条内部进行二次细分，形成嵌套式的几何表达，而非试图在一个矩形中呈现所有细节。

局限二：问题涉及连续型随机变量。矩形面积模型本质上基于离散划分的框架，当划分事件连续变化时，求和符号 $\sum$ 需转化为积分符号 $\int$，离散的竖条演变为连续的概率密度曲线。此时，可将矩形模型作为“离散近似”的直观基础：首先用离散划分(如将连续区间等分为若干子区间)构建矩形模型，让学生理解“分割－测量－累加”的基本思想；然后逐步增加划分数量，引导学生观察矩形顶部逐渐趋近于一条曲线，积分的思想便自然地从离散求和的极限中“生长”出来。这种从离散到连续的渐进过渡，能够有效降低连续型全概率公式的抽象程度。

局限三：样本空间过于抽象或无法直观几何化。某些概率问题中的样本空间并非天然具有几何结构，

例如涉及抽象事件序列或无限维空间的情形。此时，教师应明确告知学生：矩形面积模型是一种“认知脚手架”而非问题的精确几何映射，其价值在于启发思考而非严格建模。模型的角色是帮助学生理解概率运算的逻辑结构(划分、加权、求和)，而非提供问题的几何解法。在学生建立直观理解后，应及时引导其回归符号逻辑和形式化表达，避免对图形产生过度依赖。

局限四：学生停留于直观层面，未能完成符号抽象。这是几何思维教学中最需要警惕的风险。部分学生在看到图形后，能够直观感知概率的大小关系，却无法将其准确转化为数学表达式，或者在面对没有图形辅助的新问题时束手无策。为防止这一情况，教师在教学中必须设置“从图形到公式”的强制转化环节。例如，要求学生根据给定的矩形面积图，写出对应的全概率公式表达式并解释每一项的几何含义；或者反过来，根据抽象的符号公式，画出对应的几何图形。这种双向转化的训练，能够帮助学生建立直观感知与符号表达之间的稳固联结，确保几何思维真正服务于形式化理解，而非替代它。

4.4.3. 模型定位：认知脚手架而非最终形态

综合以上分析，矩形面积模型在教学中的恰当定位是“认知脚手架”——它在学生初涉抽象概念时提供直观支撑，降低认知门槛，但不应成为教学的终点。理想的路径应当是：直观感知→几何模型→符号表达→形式推理→严谨论证。几何模型在其中扮演桥梁角色，帮助学生从具体经验平稳过渡到抽象逻辑。一旦学生建立了对全概率公式结构的内在理解，教师应适时“撤除脚手架”，引导学生在符号层面独立思考和推理。这种有进有退的教学设计，既能发挥几何直观的优势，又能避免其潜在的局限性，最终实现直觉与严谨的有机统一。

5. 教学案例：生产次品问题的几何化教学

问题情境：某工厂有三条生产线，产量占比分别为 50%、30%、20%，次品率分别为 1%、2%、3%。现从中任取一件产品，求其为次品的概率。

几何化教学流程：首先，画一个单位矩形(如图 4)，表示全部产品构成的样本空间，寓意“整体把握”。其次，按 5:3:2 的宽度比例将矩形分割为三部分，分别表示三条生产线的产品，体现“合理划分”。然后，在第一条内涂色 1%的高度，表示该生产线次品所占区域；同样，第二条涂色 2%，第三条涂色 3%，呈现“局部特征”。此时引导学生发现：总次品概率等于所有涂色小矩形面积之和，即各条带宽度与高度乘积的累加。由此自然得出 $P(A)=0.5\times0.01+0.3\times0.02+0.2\times0.03=0.017$ 。

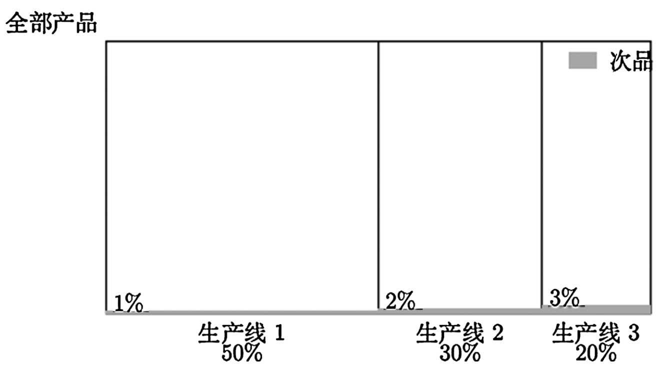

Figure 4. Geometric representation of the problem of producing defective products
图 4. 生产次品问题的几何化表示

学生在图形中直接观察到：每条生产线的次品率(高度)不同，产量占比(宽度)不同，对总次品率的贡献是二者的乘积。学生普遍反映，看到涂色面积后，对“为何次品率高的生产线贡献不一定最大”有了

直观理解——贡献取决于宽度与高度的乘积，而非单一因素。在案例讲解过程中，可适时引导学生思考：次品率最高的生产线(生产线 3)虽然产量占比最小，但其质量问题同样不可忽视，这体现了“质量无小事”的责任意识；而总次品率的计算并非简单取各生产线次品率的平均值，而是按产量加权，这一过程本身蕴含着“实事求是、尊重客观实际”的科学态度。通过将数学计算与现实情境结合，学生在掌握知识的同时，也能潜移默化地感受严谨求实、协同共进的职业素养。

6. 教学效果与启示

几何思维让全概率公式从“要我记”变成“我能懂”。采用几何化教学后，学生能主动解释公式每一项的几何意义，而非机械背诵；能自主构造划分解决复杂问题，而非机械套用模板；能快速识别不同题目中的统一概率结构，实现知识迁移。从课堂观察与课后访谈来看，学生在面对非标准题型时，主动构造样本空间划分的比例明显提升，机械套公式的错误率显著下降。同时，这一教学方式也为后续贝叶斯公式、连续型全概率公式的学习奠定了直观基础——当需要逆向求解时，学生能够直观地看到目标面积在总面积或特定条带中的占比关系。

对教学的启示是：概率教学应遵循直觉－模型－符号－应用－严谨的认知路径。几何思维正是这条路径中最稳定、最有效的支撑工具，它有机融合了直观想象、数学抽象与逻辑推理三大核心素养，实现了从“形式化记忆”到“结构性理解”的转变[11]。几何思维教学不仅在知识层面发挥作用，在素养培育层面亦有独特价值。面积模型要求学生精确度量权重与比例，这一过程本身就蕴含着实事求是、严谨求实的科学态度；从整体样本空间出发、通过合理划分分析复杂问题，有助于引导学生形成系统观念与全局意识；宽度与高度的乘积关系则生动体现了事物发展多重因素的相互作用，帮助学生理解内因与外因、局部与整体的辩证关系。这种将知识传授与价值引领自然融合的教学方式，与当前高等教育“立德树人”的根本任务相契合。

7. 结论

全概率公式的核心是划分、加权、整合，其本质具有强烈的几何属性。以面积模型、样本空间分割、区域占比为核心的几何思维，能够有效破解抽象符号带来的理解障碍，让学生从空间直觉出发，逐步走向逻辑严谨。与文氏图、树形图等传统工具相比，矩形面积模型在同时呈现“权重”与“比例”方面具有独特优势。将几何思维深度融入全概率公式教学，不仅能提升课堂效果，更能培养学生的直观想象、数学抽象与概率建模素养，对推动概率论与数理统计教学高质量发展具有重要意义。

基金项目

新疆大学研究生教育教学改革项目，No. XJDX2026YJG22；新疆自治区高校基本科研业务费项目，No. XJEDU2026P001。

参考文献

[1] 茆诗松，程依明，濮晓龙. 概率论与数理统计教程[M]. 北京：高等教育出版社, 2019.

[2] 李璇，王斌，鲁砚青，等. 数形结合思想在概率论教学中的应用[J]. 数学学习与研究, 2016(11): 107.

[3] Batanero, C., Chernoff, E.J., Engel, J., Lee, H.S. and Sánchez, E. (2016) Research on Teaching and Learning Probability. In: Batanero, C., Chernoff, E.J., Engel, J., Lee, H.S. and Sánchez, E., Eds., *Research on Teaching and Learning Probability*, Springer International Publishing, 1-33. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3_1

[4] Sedlmeier, P. and Gigerenzer, G. (2001) Teaching Bayesian Reasoning in Less than Two Hours. *Journal of Experimental Psychology*: *General*, **130**, 380-400. https://doi.org/10.1037/0096-3445.130.3.380

[5] Tversky, A. and Kahneman, D. (1980) Causal Schemas in Judgments under Uncertainty. In: Fishbein, M., Ed., *Progress*

in Social Psychology (Vol. 1), Erlbaum, 49-72.

[6] 任芳玲. 全概率公式和贝叶斯公式教学新探[J]. 普洱学院学报, 2014, 30(6): 20-23.

[7] 徐群芳.《概率论与数理统计》课程教学的探索与实践[J]. 大学数学, 2010, 26(1): 10-13.

[8] Sweller, J. (1988) Cognitive Load during Problem Solving: Effects on Learning. *Cognitive Science*, **12**, 257-285. https://doi.org/10.1207/s15516709cog1202_4

[9] Paivio, A. (1971) Imagery and Verbal Processes. Holt, Rinehart and Winston.

[10] 王伟. 全概率公式和贝叶斯公式教学方法探究[J]. 科教文汇, 2015(28): 48-49.

[11] 史宁中. 数学基本思想与教学[M]. 北京: 商务印书馆, 2018.