

指向高阶思维培养的高中数学 教学设计与实施

——以“导数与函数恒成立问题”为例

宋梦杰

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2026年4月21日; 录用日期: 2026年5月18日; 发布日期: 2026年5月26日

摘要

本研究以高中数学中的“导数与函数恒成立问题”为例, 探讨了旨在培养学生高阶思维的教学设计与实施策略。研究针对学生在解题时常套用公式、机械模仿的现象, 提出并实践了围绕“比较-概括-迁移”这一思维进阶主线的教学模式。文章详细阐述了从教学目标设定、教学过程设计(包括创设情境、暴露思路、比较辨析、提炼结构、变式迁移)、到评价设计的完整方案。文章提供了一个完整、细致且可复制的教学案例。从问题选择、环节设计、时间分配到评价要点, 都给出了具体建议, 对一线教师有很强的直接指导作用。

关键词

高中数学, 高阶思维, 教学设计, 导数, 恒成立问题

Instructional Design and Implementation of Senior High School Mathematics Aimed at Higher-Order Thinking Cultivation

—Taking “The Constant Establishment Problem Related to
Derivatives and Functions” as an Example

Mengjie Song

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: April 21, 2026; accepted: May 18, 2026; published: May 26, 2026

Abstract

Taking the topic of “derivatives and the constant establishment problem of functions” in high school mathematics as an example, this study explores the teaching design and implementation strategies aimed at cultivating students’ higher-order thinking. Aiming at the common phenomenon that students tend to blindly apply formulas and engage in mechanical imitation when solving problems, this study proposes and practices a teaching model centered on the main thread of progressive thinking development: “comparison-generalization-transfer”. The paper elaborates a complete solution covering the whole process: from the setting of teaching objectives, the design of teaching procedures (including situation creation, exposing thinking processes, comparative analysis, structural refinement, and variant transfer), to the design of evaluation system. This research provides a complete, detailed and replicable teaching case, and puts forward specific suggestions on problem selection, session design, time allocation and evaluation key points, which offers strong and direct guidance for front-line teachers.

Keywords

Senior High School Mathematics, Higher-Order Thinking, Instructional Design, Derivative, Invariant Inequality

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在高中数学解题教学中，教师常借助典型例题归纳方法，再用变式训练促进熟练。这样的课堂安排有其现实效用，但也容易带来一个隐性问题：学生记住了“分离参数”“求最值”“分类讨论”等处理套路，却不能说明方法为何成立；一旦函数形式、参数位置或区间条件发生变化，原有经验便难以顺利迁移。表面上看，学生“做过不少题”；实质上，思维活动仍较多停留在识别题型和套用模板的层面。尤其是在导数综合题复习中，一些学生往往把“方法”理解成几个固定步骤，把“会做”理解成能在相似题面中迅速写出计算过程，而对函数关系、参数意义和不等式约束之间的内在联系缺乏足够把握。这种学习状态看似效率较高，实际上会削弱学生面对新情境时的分析能力与判断能力。

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》明确提出，数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现，是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现，是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的。数学学科核心素养包括：数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析[1]。这意味着课堂不能止于“把题讲会”，还应让学生经历分析、比较、概括和迁移的过程。函数与导数中的恒成立问题兼具综合性、抽象性和开放性，既能呈现学生思维层次差异，也适合作为高阶思维培养的教学载体。与一般程序性练习相比，这类问题更能逼近数学学习的本质要求：学生不仅要给出结果，还要说明为什么能这样转化、为什么应当比较最值、为什么某一范围既必要又充分。

基于此，本文尝试回答两个问题：其一，在“导数与函数恒成立问题”的教学中，如何通过任务组织促进学生经历较完整的分析与推理过程；其二，如何通过方法比较与变式迁移，帮助学生形成对同类问

题的结构化认识。文章并不追求展示一节“技巧密集型”课堂，而更关注如何把例题教学转化为思维教学，使学生在解决一个具体问题的同时，逐步建立对同类问题的整体理解。

2. 理论依据与设计思路

高阶思维并不是脱离学科内容而独立存在的抽象能力，它总是体现在学生对具体知识与方法的深度加工之中。落实到本课，主要表现为三个方面：一是分析与审辨，即能够根据题设条件判断解题切入点，并说明不同思路的合理性与适用范围；二是概括与抽象，即能够从具体题目中抽离出“恒成立问题本质上是范围问题或最值问题”的一般认识；三是迁移与应用，即能够在函数形式、参数位置或区间条件变化后主动调整策略。换言之，本课所强调的高阶思维，不是脱离解题活动的空泛口号，而是学生在数学表达、逻辑论证与方法选择中的真实表现。

SOLO 分类理论强调学习结果复杂性的层级差异[2]。就本课而言，学生起初往往停留在“多点结构”层次：知道若干方法，却无法建立方法之间的联系，也难以依据条件灵活选法。教学设计应帮助学生逐步走向“关联结构”甚至“拓展抽象结构”，即能回答“为什么这样做”“还能怎样做”“条件变化后应如何调整”。从教学操作层面看，这种层级推进不是靠教师一次性讲清全部结论实现的，而是要借助有梯度的问题链、基于证据的追问以及适度延迟评价来完成。

基于上述认识，本文将课堂组织为“比较 - 概括 - 迁移”三个相互衔接的层次：先用典型问题暴露学生原始路径，再通过多解比较澄清方法依据，最后借助变式任务推动策略迁移。这样的安排兼顾了问题解决的过程性与方法提炼的结构性，有利于学生把局部经验上升为可迁移的知识。至于生成式人工智能，其角色不再是简单的答案展示工具，而是作为思维探究的“协作伙伴”：通过生成多元的解题路径为学生提供审辨思考的素材，同时也可生成练习变式、支持课后反思，不宜替代学生的独立思考与教师的专业判断[3]-[5]。

3. 教学内容分析与目标设定

“导数与函数恒成立问题”是函数与导数模块中的常见综合内容。其核心在于：把“对任意 x 恒成立”的不等式关系，转化为某个函数在给定区间上的最值、范围或单调性问题。学生在学习时往往面临三个难点：一是不能准确区分变量、参数与区间条件；二是习惯机械套用单一方法，忽视条件对方法选择的制约；三是做完题后没有上升到一般认识，难以形成可迁移的方法结构。进一步说，学生的困难并不完全来自计算本身，而更多来自对问题结构的把握不足：哪些量是变化的，哪些量是受限制的，怎样从局部符号关系回到整体函数图景，恰恰构成了本课最有教学价值的部分。

授课对象为高二学生。学生已经学习了导数概念、导数与函数单调性的关系，也接触过参数问题与不等式恒成立问题，具备借助导数研究最值的基本经验。据此，可将本课教学目标设定为，推动学生的思维层级实现从多点结构到关联结构，最终向拓展抽象结构进阶：第一，结合具体问题识别恒成立问题中的变量、参数及区间条件，形成清晰的问题表征，完成对问题的初步结构化表征，为思维跃升搭建基础；第二，在比较不同解题路径的过程中，说明相应方法的依据、步骤特点及适用条件，打破原有方法间的孤立状态，建立不同解题路径的内在关联，实现从多点结构向关联结构的初步跨越；第三，概括“恒成立问题向最值问题、范围问题转化”的基本思路，形成较清晰的方法结构，将零散的方法经验整合为统一的问题解决框架，完成关联结构层级的深度建构；第四，在变式任务中根据条件变化主动调整策略，实现从“会做一道题”到“会解一类题”的迁移，能够将提炼的方法结构迁移到全新的问题情境中，初步触及拓展抽象结构层级的思维要求。

与之对应，教学重难点也可作进一步界定：教学重点在于引导学生理解恒成立问题向最值问题、范

围问题转化的基本机制；教学难点在于帮助学生在比较中形成方法选择意识，避免把不同策略理解成彼此割裂的“题型模板”。只有把重点落在“结构理解”上，课堂才有可能真正支撑高阶思维发展。

4. 教学过程设计

4.1. 创设情境，激活经验

课堂开始，可由“某指标在给定区间内始终不低于标准值”的情境切入，唤醒学生对“恒成立 - 范围限制 - 最值判定”之间关系的已有经验。随后自然过渡到数学表达，引导学生回忆：当一个不等式要求在某区间内恒成立时，通常要关注什么。这样的导入不必追求复杂情境，而应重在把学生从“求某一点”带到“看整体范围”的思维状态上来，使其意识到本课研究的对象不是零散代入，而是区间上的整体性质。在学生回答“看最大值”“看最小值”“先分离参数”等经验性语言之后，教师顺势提出核心问题，并要求学生先不急于下笔计算，而是用一句话说出自己题目的第一判断：这是一个关于什么的题，应该把注意力放在什么量上。通过这种“先表征、后求解”的处理，可以减少学生一看到导数题就直接求导的惯性。

已知函数 $f(x) = \ln x - ax$ ，若对任意 $x \in [1, e]$ ，都有 $f(x) \leq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。该问题结构清晰，既可以走“分离参数”路径，也可以走“直接构造函数并研究最值”路径，便于组织比较。更重要的是，它能让看到：不同方法表面上步骤不同，但都指向“区间的整体范围”这一共同核心。教师在选题时应有意控制难度，使问题本身足以支撑思维比较，而不至于因为运算负担过重影响课堂对话的展开。

在导入后的交流中，教师可先让学生对题目进行口头重述，如“本题要求的是一个参数 a ，使某种关系在区间上对所有 x 都成立”。这一重述过程能帮助学生把注意力从零散符号转向整体条件，并为后续转化提供语言支架。

4.2. 独立思考，暴露原始路径

教师先留出独立思考时间，并要求学生写下“第一反应是什么、为什么这样想”。这一要求的价值在于把学生隐性的思考过程显化出来。一般而言，课堂上会出现不同 SOLO 思维层级的代表性思路：部分学生仅停留在“先求导看看”的模糊状态，无法明确解题的目标与方向，这属于单点结构层级：学生仅能提取“导数题要求导”这一孤立的知识点，无法建立知识点与问题目标的关联，尚未形成清晰的问题解决方向。部分学生能独立梳理出两类清晰的操作路径：第一类是“分离参数”路径，将不等式变形后转化为求新函数的区间最大值；第二类是“构造最值”路径，直接研究原函数在区间上的最值约束。但此时学生大多只能描述操作步骤，无法说明两种路径的内在关联，也无法预判方法的适用边界，这属于多点结构层级：学生掌握了多个独立的解题方法，却尚未建立方法间的有机联系，只能孤立地调用零散的解题经验，这也是本课需要突破的思维起点。

教师在这一阶段不急于统一答案，而应保护学生原始思路的差异性。在此基础上，教师组织学生开展深度的 AI 协作探究环节：引导学生向生成式 AI 输入本次的核心问题，要求 AI 生成三种不同的解题思路(涵盖常规的分离参数法、直接构造函数法，以及特殊化验证类思路等)，并要求 AI 同步给出每种思路的完整推导过程。随后，教师组织学生以 4 人小组为单位，完成三项递进式任务，以此锻炼审辨式思维：(1) 辨析纠错：逐一核对 AI 生成的三种思路，判断每一种思路的逻辑是否严谨，排查是否存在等价变形错误、最值判断偏差、忽略区间约束等常见漏洞(例如部分 AI 可能会忽略分离参数时的分母符号影响，或是在求最值时遗漏区间端点的特殊情况)；(2) 优劣评价：对比三种思路的特点，分析不同思路的运算复杂度、适用场景，比如当参数易分离、分离后函数结构简单时，分离参数法更

高效；而当分离后函数过于复杂时，直接构造原函数的方法更具可行性；(3) 优化完善：针对 AI 生成的存在瑕疵的思路，小组合作对其进行修正，补全缺失的逻辑环节，完善推导过程，最终形成严谨的完整解法。

为提高独立思考的质量，教师还可以在学习单中设置两个小栏目：一栏填写“我准备怎样做”，另一栏填写“我为什么这样做”。前者对应操作路径，后者对应理由表达。

4.3. 比较辨析，澄清方法依据

在汇总学生思路后，课堂进入比较环节。这一比较辨析的过程，正是推动学生从多点结构向关联结构跃升的核心载体：通过引导学生梳理两种路径的内在逻辑，帮助学生打破原有对两种方法的孤立认知，建立起统一的问题解决逻辑。教师可围绕以下问题展开讨论：两条路径分别从哪里切入；每种方法中最关键的一步是什么；哪些地方最容易出错。必要时还可以追问：若把区间改动，或者把参数移到分母、指数或对数位置，两种方法的便利性会怎样变化。这样的追问并非为了扩大题量，而是为了让学生意识到方法选择总是与条件特征密切相关。

对于“分离参数”路径，由

$$\ln x - ax \leq 0 \Leftrightarrow a \geq (\ln x)/x$$

可知原问题等价于“ a 不小于函数 $g(x) = (\ln x)/x$ 在 $[1, e]$ 上的最大值”。求导得

$$g'(x) = (1 - \ln x)/x^2$$

因此 $g(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上单调递增，最大值在 $x = e$ 处取得，且 $\max g(x) = g(e) = 1/e$ ，所以 $a \geq 1/e$ ，对于“直接研究原函数”路径，令 $h(x) = ax - \ln x$ ，则原题等价于 $h(x) \geq 0$ 在 $[1, e]$ 上恒成立。求导得 $h'(x) = a - 1/x$

当 $a \geq 1$ 时， $h(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增，最小值为 $h(1) = a \geq 0$ ；

当 $1/e \leq a < 1$ 时， $h(x)$ 在 $x = 1/a$ 处取得最小值，且 $h(1/a) = 1 + \ln a$ ，由 $1 + \ln a \geq 0$ 得 $a \geq 1/e$ ；

当 $a < 1/e$ 时，有 $h(e) = ae - 1 < 0$ ，不满足恒成立。

综合可得 $a \geq 1/e$ 。

比较之后，学生能够看到：两条路径虽然切入点不同，但本质上都在回答同一个问题——给定区间上某个函数的整体范围是否满足约束。此时教师应顺势引导学生总结：所谓“分离参数”并不是一种孤立技巧，而是一种便于观察参数约束关系的转化方式；所谓“直接研究原函数”也不是另起炉灶，而是从函数符号入手研究同一范围问题。只有把这种“同中见异、异中求同”的关系讲透，方法比较才不会停留在表面。

需要指出的是，比较的价值并不在于一定要分出“哪种方法最好”，而在于帮助学生看到方法背后的共同数学本质以及各自的使用边界。对基础较弱的学生而言，能够说清一种方法为什么成立已经是一种进步；对学有余力的学生而言，则可以进一步讨论不同方法在表达简洁性、运算复杂度和迁移便利性上的差异。

4.4. 提炼结构，形成方法认识

比较结束后，教师应及时组织学生把零散认识上升为结构化认识。可以围绕“核心任务 - 常用路径 - 适用情形 - 易错点”四个维度进行整理。核心任务是把“对任意 x 成立”转化为一个函数在指定区间上的最值或范围问题；常用路径包括分离参数法与直接研究原函数法；适用情形取决于参数是否容易分离、求导后结构是否更简洁；常见错误则集中在忽略区间端点、忽略等价变形条件、只验证必要性而未

检验充分性。若条件允许，教师还可将学生的语言整理为板书框架，让“方法结构”以可视化方式留在课堂之中。

为了避免总结流于口号，教师可要求学生用自己的语言完成一句概括，例如：“解决恒成立问题，关键不是先背哪一种方法，而是先判断应把题目转化为哪个函数在指定区间上的最值或范围问题。”这种由学生自我表述完成的方法提炼，比教师直接给出结论更能暴露理解程度，也更便于教师进行针对性矫正。

4.5. 设计变式，促进迁移应用

变式任务可分三个层次展开。第一层是同构变式，保持问题结构基本不变，只替换函数类型，如把改为或，以考查学生能否继续从“恒成立 - 最值/范围”的角度分析。第二层是条件变式，改变参数所在位置或区间限制，例如把区间改为，或把“不大于0”改为“不小于0”，以检验学生是否真正理解了方法适用条件。第三层是开放变式，要求学生自拟一个同类问题，并说明拟采用的方法及其理由。与单纯解题相比，这种“命题 - 说明”任务更能检验学生是否形成了问题结构意识。课堂上还可选取一两个学生自拟问题进行简要评议，帮助全班进一步明确“好变式”应当如何服务于思维迁移。

若从课后巩固角度继续延展，教师还可布置一组“同源异构”练习，即让学生判断若把函数改成指数型、对数型或含参数二次函数时，原有思路是否仍可沿用，并说明是否需要增加分类讨论。这类作业比单纯重复同构题更能检测学生的迁移水平。

5. 评价设计与实施要点

本课评价不宜只看最终答案是否正确，更应关注学生在学习过程中的思维表现。其一，分析与审辨方面，学生能否说明自己为何选择某种方法，能否指出不同方法之间的联系与差异；其二，概括与抽象方面，学生能否将具体算例上升为对同类问题的一般认识；其三，迁移与应用方面，学生在面对条件变化时，能否及时修正原有策略，而不是简单模仿。换言之，评价的重点应从“结果对错”适度转向“思路是否清楚、依据是否充分、迁移是否自觉”。

因此，教师可综合运用课堂追问、同伴交流记录、板演说明、学习单整理和课后作业等方式搜集证据。例如，在板演环节不只评价“答案对不对”，还要追问“为何先这样处理”“若区间改变是否仍可如此处理”；在作业中加入“比较两种方法”“概括本题方法结构”等开放性任务，使评价真正指向思维品质。若从操作层面细化，可将评价标准与SOLO思维层级对应，分为三个水平：(1) 基本达成：能够独立完成求解但解释较弱，对应多点结构层级，学生能调用零散方法完成解题，但无法说明方法的内在逻辑；(2) 较好达成：能够比较两种方法并说明理由，对应关联结构层级，学生能建立不同方法的关联，理解问题的核心逻辑；(3) 高水平达成：能够在新情境中主动迁移并修正策略，对应拓展抽象结构层级，学生能将方法结构迁移到全新情境，灵活调整策略。

实施中还应把握三点。第一，坚持“学生先思考、教师再介入、工具后进入”的基本顺序。第二，坚持在比较中教学，而不是在结论中教学。第三，坚持“从一道题走向一类题”的总结方式，使课堂总结上升到“恒成立问题如何转化、何时分离参数、何时直接研究原函数”等更具迁移价值的层面。此外，教师还需把握节奏：在核心问题处留足等待时间，在关键比较处进行深追问，在总结提升处适度收束，避免课堂因追求热闹互动而冲淡数学本身的逻辑主线。

教学实施要点还应体现可操作性。例如，教师可将本课时间大致分配为：情境导入与问题表征 8 分钟，独立思考与同伴交流 10 分钟，多解比较 15 分钟，结构提炼 7 分钟，变式迁移与课堂小结 10 分钟。这样的时间安排并非固定模板，但能说明教学设计并非停留在理念表述，而是具有较强的实施可行性。

6. 结语

以“导数与函数恒成立问题”为载体开展高阶思维培养，关键不在于叠加多少技术元素，而在于是否真正把学生带入分析、比较、概括和迁移的过程之中。与其在课堂上提供一条现成路径，不如让学生在多路径比较中理解方法依据，在变式拓展中形成结构化认识。对于高中数学教学而言，这种改进的价值并不局限于一节导数课，而在于提示教师重新审视例题教学的功能：例题不仅用于传授解法，更应用于组织思维、发展理解和促进迁移。

从这个意义上说，高中数学课堂的改进，不应只是提高“讲题效率”，更要提高“思维含量”。生成式人工智能可以作为思维探究的协作伙伴，通过生成多元解题路径扩展学生的思考边界，丰富审辨讨论的材料，但凡涉及关键判断、等价变形与结论确认之处，仍应回到学生与教师的数学活动之中，让学生在检验、修正 AI 输出的过程中完成思维的深度建构。只有守住这一点，技术介入才可能真正服务于学生思维发展。

参考文献

- [1] 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 4.
<https://www.pep.com.cn/xw/zt/rjwy/gzkb2020/202205/P020220517519489596282.pdf>
- [2] Biggs, J.B. and Collis, K.F. (1982) *Evaluating the Quality of Learning: The SOLO Taxonomy*. Academic Press.
- [3] 黎加厚. 生成式人工智能对课程教材教法的影响[J]. 课程·教材·教法, 2024, 44(2): 14-21.
- [4] 李森, 郑岚. 生成式人工智能对课堂教学的挑战与应对[J]. 课程·教材·教法, 2024, 44(1): 39-46.
- [5] 郭庆, 乔翠兰, 黎俊玲, 等. 论学科视角下生成式人工智能何以赋能教学——以科学项目式学习为例[J]. 中国电化教育, 2026(1): 75-83.