

# 新高考下利用竞赛思想解题的思路 ——以圆锥曲线和导数为例

梁富杰

五邑大学数学与计算科学学院, 广东 江门

收稿日期: 2026年6月25日; 录用日期: 2026年7月22日; 发布日期: 2026年7月30日

## 摘 要

本文以圆锥曲线与导数两大核心知识模块为研究对象, 探析竞赛思想在两大模块解题中的应用思路, 并结合2021年至2025年的新高考真题进行分析, 展示了竞赛思想与新高考数学考查导向的高度契合, 其蕴含的以深刻性、简洁性和创造性为特征的高阶思维方法能够有效优化解题思路, 简化运算, 帮助学生提高解题效率和培养数学核心素养。

## 关键词

高中数学, 圆锥曲线, 导数, 竞赛思想, 解题思路

# The Approach to Solving Problems with Competitive Thinking under the New College Entrance Examination System —Taking the Conic Sections and Derivatives as an Example

Fujie Liang

School of Mathematics and Computational Science, Wuyi University, Jiangmen Guangdong

Received: June 25, 2026; accepted: July 22, 2026; published: July 30, 2026

## Abstract

This article takes conic sections and derivatives, two core knowledge modules, as the research objects, exploring the application of competition thinking in solving problems within these two modules. By analyzing real exam questions from the new college entrance examination in 2021~2025,

it demonstrates the high alignment between competition thinking and the examination orientation of the new college entrance examination mathematics. The high-order thinking method characterized by profundity, conciseness, and creativity it embodies can effectively optimize problem-solving approaches, simplify calculations, and help students improve their problem-solving efficiency and cultivate core mathematical competencies.

## Keywords

High School Mathematics, Conic Section, Derivative, Competition Thinking, Problem-Solving Approach

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

新高考数学取消文理分科，以核心素养培育为导向，重点考查学生的数学运算、直观想象、数学抽象、逻辑推理、数学建模和数据分析等六大核心素养。圆锥曲线与导数作为高中数学核心内容，是高考解答题压轴模块，分值占比高、区分度显著，其解题方法与思维训练一直是高中数学教学与备考研究的重点。

目前高考命题坚持“立足基础、突出能力、注重素养”的导向，传统题海战术已难以满足解题需求。然而，现有的高中教学往往侧重于程序化的题型训练，缺乏对数学本质的深度挖掘与非线性思维的培养，导致学生在面对新颖复杂的情境时难以突破。

近年来，学界围绕高考数学解题教学与竞赛思想融合展开了丰富探讨。廖如舟[1]以 2025 年新高考 I 卷导数与三角函数综合题为载体，指出跨模块融合试题强调算理理解与数形结合；刘艳鲜[2]针对 2025 年新高考 II 卷导数题，提出递进式设问与思维发散的教学路径；范水平等[3]对 2025 年新高考 I 卷解析几何题开展多解探究与推广，强调回归定义与简化运算的重要性。

此外，诸多研究表明，竞赛数学的思维方法虽高于教材，但源于教材，其转化化归、构造、放缩、参数化等思想，与新高考“重思维、减繁琐、强能力”的命题趋势高度契合，可有效破解学生在解析几何运算繁杂、导数分类讨论无序、综合转化困难等痛点。

基于此，本文以圆锥曲线和导数为例，结合新高考真题，探析竞赛思想在优化解题思路、简化运算过程及提升核心素养方面的具体应用路径，旨在为师生突破解题瓶颈提供参考。

## 2. 核心概念界定

### 2.1. 竞赛思想的核心内涵

本文所指的“竞赛思想”，是一种在高强度、高创新性要求的数学竞赛环境中发展出的，以追求解题的深刻性、简洁性与创造性为主要特征的高阶思维策略集合。

见表 1，基于上述界定，本文涉及的竞赛思想核心内涵不仅包括特定的解题技巧，更是一种对数学结构的深层理解与操控，具体体现在以下四个方面：一是转化与化归思想，即将复杂的问题转化为简单的问题，将陌生的问题转化为熟悉的问题；二是构造思想，即根据问题特点构造函数、方程等，搭建解题桥梁；三是分类讨论思想，即根据问题条件和目标，合理划分讨论层级，优先从全局结构缩小讨论范围，

避免不必要的繁杂分类；四是参数思想，即引入参数表示未知量，将多元问题转化为一元问题，降低解题难度……这些思想方法不仅适用于竞赛解题，而且可以为新高考难题的突破提供思路支持。

**Table 1.** Comparative analysis of routine problem-solving strategies and competitive thinking  
**表 1.** 常规解题策略与竞赛思想对比分析

| 维度   | 常规解题策略                   | 竞赛思想                      | 本文对应案例                                                  |
|------|--------------------------|---------------------------|---------------------------------------------------------|
| 思维导向 | 顺向思维，按部就班，<br>依赖记忆模板     | 逆向思维、整体思维，<br>强调对定义的回归与探究 | 在 3.2 节中不求 $B$ 点坐标，<br>直接回归椭圆定义求距离                      |
| 运算处理 | 机械代数运算，<br>硬解定理中的计算，计算量大 | 参数化、几何化处理，<br>追求“设而不求”    | 在 4.1 节中引入椭圆的参数方程，<br>将二元坐标转化为单变量 $\theta$ 来求解，<br>简化过程 |
| 问题视角 | 关注局部细节，分步解决              | 关注全局结构，通过构造搭建桥梁           | 在 4.2 节中构造函数 $g(x)$ 来比较                                 |
| 目标导向 | 得到正确答案                   | 寻找优美、简洁的解法                | 全文贯穿的简化运算思路                                             |

2.2. 新高考中圆锥曲线与导数的考查特点

圆锥曲线：主要考查定义、标准方程、几何性质，题型通常以解答题为主，核心难点在于运算量大，过程繁琐。

导数：主要考查几何意义、导数在函数单调性、极大(小)值、最大(小)值中的应用，以及方程、不等式的综合问题，题型通常以解答题为主，核心难点在于思考方向、情况复杂。

3. 圆锥曲线在竞赛思想下的解题思路

3.1. 近五年新高考圆锥曲线真题中竞赛思想适用性梳理

| 年份与卷别       | 题号 | 核心考查内容              | 可用参数思想简化 | 可用轨迹转化思想简化 |
|-------------|----|---------------------|----------|------------|
| 2021 新高考I卷  | 21 | 双曲线，斜率之和为定值         | —        | √          |
| 2021 新高考II卷 | 20 | 椭圆，直线与圆相切、三点共线充要条件  | √        | √          |
| 2022 新高考I卷  | 21 | 双曲线，斜率之和为 0、三角形面积计算 | —        | √          |
| 2022 新高考II卷 | 21 | 双曲线，渐近线性质、多条件互证     | √        | √          |
| 2023 新高考I卷  | 22 | 抛物线，矩形周长不等式证明       | √        | √          |
| 2023 新高考II卷 | 21 | 双曲线，定直线问题证明         | —        | √          |
| 2024 新高考I卷  | 16 | 椭圆，三角形面积计算、直线方程求解   | √        | —          |
| 2024 新高考II卷 | 19 | 双曲线，点列构造、等比数列证明     | √        | √          |
| 2025 新高考I卷  | 18 | 椭圆，轨迹方程求解、最值问题      | √        | √          |
| 2025 新高考II卷 | 16 | 椭圆，三角形面积计算、弦长求解     | √        | —          |

**Figure 1.** Statistical analysis on the applicability of competition thinking in real conic section problems  
**图 1.** 圆锥曲线真题中竞赛思想的适用性统计

见图 1，我们可以得到以下结论：

可用参数思想简化：共 7 道题，适用率 70%，主要集中在面积计算、弦长求解、点列构造类题型，核心优势是利用参数的几何意义，避免复杂的多元坐标联立与多项式展开。

可用轨迹转化思想简化：共 8 道题，适用率 80%，是圆锥曲线最核心的优化思想，主要用于定点定值、定直线、最值类问题，核心是将动态几何关系转化为静态的代数方程或函数关系，回归问题本质。

## 3.2. 引入参数方程，简化多元计算

### 3.2.1. 题目呈现与常规解法

以 2024 年新高考 I 卷第 16 题第 2 问为例，题目已知一点  $A(0,3)$  和另外一点  $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$  为椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上两点。若过点  $P$  的直线  $l$  交于  $C$  另一点  $B$ ，且  $\triangle ABP$  的面积为 9，求  $l$  的方程。

常规解法分析：

(1) 需分直线斜率存在与不存在两种情况讨论，斜率不存在时直接验证，斜率存在时设斜截式方程，与椭圆方程联立；

(2) 计算三角形的面积时，无论选择“底乘高”还是“坐标行列式公式”，均需处理复杂的分式运算与绝对值；

(3) 解方程易出现漏解或计算错误，且需验证解的合理性，整体步骤繁琐，运算冗余度高。

### 3.2.2. 竞赛思想指引下的解题思路

参数思想的核心思路：依托曲线几何特征与直线运动规律，引入角参数、比例参数等，将多元坐标问题转化为单变量问题，显著降低代数运算量。具体解法如下：

已知一点  $A(0,3)$  和另一点  $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$ ，有  $k_{AP} = \frac{3 - \frac{3}{2}}{0 - 3} = -\frac{1}{2}$ ，

则直线  $AP$  的方程为  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ ，即  $x + 2y - 6 = 0$ ，

点  $B$  到直线  $AP$  的距离  $d = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ ，设  $B(2\sqrt{3}\cos\theta, 3\sin\theta)$ ，其中  $\theta \in [0, 2\pi)$ ，

则有  $\frac{|2\sqrt{3}\cos\theta + 6\sin\theta - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ ，由  $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$  得，

解得  $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$  或  $\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = -1 \end{cases}$ ，即  $B$  的坐标为  $(0, -3)$  或  $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$

当  $B(0, -3)$  时，此时  $k_l = \frac{3}{2}$ ，直线  $l$  的方程为  $y = \frac{3}{2}x - 3$ ，即  $3x - 2y - 6 = 0$ ，

当  $B\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$  时，此时  $k_l = \frac{1}{2}$ ，直线  $l$  的方程为  $y = \frac{1}{2}x$ ，即  $x - 2y = 0$ ，

当  $C = -18$  时，联立  $\begin{cases} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ x + 2y - 18 = 0 \end{cases}$  得  $2y^2 - 27y + 117 = 0$ ，

$\Delta = 27^2 - 4 \times 2 \times 117 = -207 < 0$ ，此时该直线与椭圆无交点。

综上直线  $l$  的方程为  $3x - 2y - 6 = 0$  或  $x - 2y = 0$ 。

3.2.3. 两种解法的量化对比

Table 2. Comparative analysis of solutions between conventional thinking and parameter thinking

表 2. 常规思想与参数思想的解法对比分析

| 解法类型   | 常规解题策略 | 竞赛思想                             |
|--------|--------|----------------------------------|
| 常规解法   | 12 步   | 多项式展开 2 次，求交点坐标 1 次，解分式绝对值方程 1 次 |
| 竞赛思想解法 | 7 步    | 多项式展开 1 次，解一元二次方程 1 次            |

见表 2，从步骤数量来看，竞赛思想解法比常规解法减少了 5 个解题步骤；从运算环节来看，常规解法需要处理多项式展开以及解绝对值方程，不仅计算过程繁琐，出现计算错误的概率也更高；而竞赛思想通过引入参数省去硬求交点坐标的环节，仅保留了必要的 1 次多项式展开与一元二次方程求解，大幅缩短了做题时长，也降低了出错概率。

3.2.4. 总结思路

传统直角坐标方程法在代入、整理方程时大量的多项式运算和方程求解，运算过程繁琐，容易出错，在本题中，参数方程法也需要对参数方程进行代入和整理，但利用参数的相关性质进行求解的过程更为简洁，运算量相对较小。

3.2.5. 教学设计与反思

(1) 问题设计

Table 3. Problem design and intention of parameter idea

表 3. 参数思想的问题设计与意图

| 问题                | 预设答案          | 设计意图                        |
|-------------------|---------------|-----------------------------|
| 你在计算中最“卡壳”的地方是什么？ | 变量多、展开频繁、容易出错 | 分析平常公式计算时的情况，为引出参数方程来求解做好铺垫 |
| 点的坐标有什么方式能用字母表示？  | 引入参数来表示点的坐标   | 引出参数方程，回顾具体意义               |
| 用参数表示后，公式会发生什么变化？ | 简化计算过程        | 体现参数方程的便捷性和实用性              |

见表 3，在实际的教学中，可以让学生用常规方法计算本题，接着按表 3 的设计依次抛出问题，引导学生反思常规解法的困难之处，再引出参数化思想的解法，让学生自主对比两种解法的差异，主动总结参数思想的适用场景。

(2) 学生困难与应对策略

困难 1：设置参数后不会转化表达式。应对：板书固定模板：参数坐标→方程→公式→表达式。

困难 2：算出结果不检验，出现增根/漏解。应对：强制四步流程：设置参数→列出式子→化简→验根。

困难 3：只会套题，不会判断何时用参数。应对：给出题组，只让学生“选方法 + 说理由”，不求完整计算。

(3) 教学反思

参数思想教学的关键是让学生真正理解参数法不是“巧解”，而是简化运算的一种选择。在课堂教学的过程中，应该少讲步骤，多让学生尝试，多让学生说“为什么这么做”，实现从被动模仿到主动选用的转变。

3.3. 合理转化问题，回归核心定义

3.3.1. 题目呈现与常规解法

以 2025 年新高考 I 卷第 18 题第 2 问为例，设椭圆方程为  $C: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ ，点  $P(m, n)$ ， $R\left(\frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, \frac{3(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} - 1\right)$ ，直线  $OR$  的斜率为  $k_1$ ，直线  $OP$  的斜率为  $k_2$ ，若  $k_1 = 3k_2$ ， $M$  为椭圆上一点，求  $|PM|$  的最大值。

常规解法分析：

- (1) 容易引入额外参数；
- (2) 消元后得到高次函数，过程极易出错；
- (3) 运算冗余度极高。

3.3.2. 竞赛思想指引下的解题思路

转化与化归思想核心思路：将陌生问题、复杂问题，转化为熟悉的、简单的问题，回归核心定义求解，简化解题过程。具体解法如下：

由题意知  $k_1 = 3k_2$ ，  
则  $\frac{3(n+1) - m^2 - (n+1)^2}{3m} = \frac{3n}{m}$ ，化简得  $m^2 + (n+4)^2 = 18$ ，由此得到点  $P$  的轨迹方程为以  $Q(0, 4)$  为圆心， $3\sqrt{2}$  为半径的圆，因此  $|PM| \leq |PQ| + |QM| = 3\sqrt{2} + |QM|$ 。

设  $M(x, y)$ ，则  $|QM| = \sqrt{x^2 + (y+4)^2} = \sqrt{-8\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 27}$ ， $y \in [-1, 1]$

故当  $y = \frac{1}{2}$  时， $|QM|$  取得最大值  $3\sqrt{3}$ ，

所以  $|PM|$  的最大值为  $3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ 。

3.3.3. 两种解法的量化对比

Table 4. Comparative analysis of solutions between conventional thinking and transformation-reduction thinking  
表 4. 常规思想与转化与化归思想的解法对比分析

| 解法类型   | 常规解题策略 | 竞赛思想                    |
|--------|--------|-------------------------|
| 常规解法   | 15 步   | 二元函数消元 1 次，高次函数求导 1 次   |
| 竞赛思想解法 | 8 步    | 多项式展开 1 轨迹推导 1 次，最值 1 次 |

见表 4，从步骤数量来看，竞赛思想解法比常规解法减少了 7 个解题步骤；从运算环节来看，常规解法需要对二元函数进行消元处理，对求导运算的计算要求高，还容易在消元过程中出现符号错误，而竞赛指引下的转化思想，将原问题转化为圆上点到定点的距离最值问题，运算路径更短，思路更好理解，显著提升运算的正确率。

3.3.4. 总结思路

在本题中，结合轨迹方程与椭圆位置关系，将本题中的几何最值问题转化为关于单变量  $y$  的函数问题，化难为易、化繁为简。

3.3.5. 教学设计与反思

(1) 问题设计

Table 5. Design and intention of problems for transformation-reduction thinking  
表 5. 转化与化归思想的问题设计与意图

| 问题                   | 预设答案    | 设计意图                        |
|----------------------|---------|-----------------------------|
| 如何把“斜率关系”翻译为代数方程？    | 坐标代入、化简 | 分析平常公式计算时的情况，为引出参数方程来求解做好铺垫 |
| 轨迹是圆，点 P 又在椭圆上，说明什么？ | 存在交点    | 引出参数方程，回顾具体意义               |
| 最关键的步骤是什么？           | 简化计算过程  | 体现参数方程的便捷性                  |

见表 5，在实际的教学中，可以让学生用常规方法计算本题，接着按表 5 的设计依次抛出问题，引导学生反思常规解法中消元、求导的复杂之处，再引出转化后回归定义的解法，让学生直观感受“回归定义转化问题”的简洁性，自主梳理转化问题的思考路径。

(2) 学生困难与应对策略

困难 1：只会代数硬推，不会先判断轨迹图形，计算量大且易错。应对：强化“先图后式”，要求动笔前先画出大致图形。

困难 2：轨迹化简出错，圆方程整理不规范。应对：专题训练“斜率条件→圆/直线轨迹”的标准化化简步骤。

(3) 教学反思

转化与化归是新高考重点考查的思维方式。教学要少讲算、多讲理，让学生先“看明白”再“算明白”。本课通过追问引导学生主动转化，减少盲目联立，显著提升直观想象与逻辑推理素养，真正地实现“以简驭繁”。

4. 导数在竞赛思想下的解题思路

4.1. 近五年新高考导数真题中竞赛思想适用性梳理

| 年份与卷别         | 题号 | 核心考查内容             | 分类讨论思想 | 构造函数思想 |
|---------------|----|--------------------|--------|--------|
| 2021 新高考 I 卷  | 22 | 双变量不等式证明（极值点偏移）    | —      | √      |
| 2021 新高考 II 卷 | 22 | 恒成立求参数范围           | √      | √      |
| 2022 新高考 I 卷  | 22 | 函数最值、多曲线交点、等差数列证明  | —      | √      |
| 2022 新高考 II 卷 | 22 | 恒材料求参数范围、不等式证明     | √      | √      |
| 2023 新高考 I 卷  | 19 | 单调性讨论、不等式证明        | √      | √      |
| 2023 新高考 II 卷 | 22 | 不等式证明、极大值点求参数范围    | √      | √      |
| 2024 新高考 I 卷  | 18 | 函数最值、中心对称性证明、求参数范围 | —      | √      |
| 2024 新高考 II 卷 | 16 | 切线方程、极小值求参数范围      | √      | √      |
| 2025 新高考 I 卷  | 19 | 存在性证明、不等式求参数范围     | √      | √      |
| 2025 新高考 II 卷 | 18 | 极值点与零点存在性、大小比较     | —      | √      |

Figure 2. Statistical analysis on the applicability of competition thinking in real derivative problems  
图 2. 导数真题中竞赛思想的适用性统计

见图 2，我们可以得到以下结论：

构造函数思想：共 9 道题，适用率 90%，是导数压轴题的核心优化思想，通过构造辅助函数将双变量问题、跨函数问题、不等式问题转化为单一函数的单调性与最值研究，体现思维的创造性。

分类讨论思想：共 6 道题，适用率 60%，在含参函数的单调性、极值、参数范围类问题中适用，核心是通过清晰的分类标准避免逻辑遗漏。

4.2. 引入参数方程，简化多元计算

4.2.1. 题目呈现与常规解法

以 2025 年新高考 I 卷第 19 题第 2 问为例，设函数  $f(x) = 5\cos x - \cos 5x$ ， $\theta \in (0, \pi)$ ， $a \in \mathbb{R}$ ，证明：存在  $y \in [a - \theta, a + \theta]$ ，使得  $\cos y \leq \cos \theta$ 。

常规解法分析：

- (1) 未利用余弦函数的对称性与周期性，导致分类标准混乱，容易遗漏边界情况；
- (2) 证明过程需要多次重复找区间最小值比较的步骤，解题效率极低。

4.2.2. 竞赛思想指引下的解题思路

分类讨论思想的核心思路：当问题中含有参数时，根据参数的取值范围，将问题分为不同的情况，进而解决问题。具体解法如下：

当  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$  时， $\cos(a - \theta) + \cos(a + \theta) = 2\cos a \cos \theta \leq 2\cos \theta$ ，由此上述数量关系得到

$\cos(a - \theta) \leq \cos \theta$  或  $\cos(a + \theta) \leq \cos \theta$  至少有一个成立

取  $y = a - \theta$  或者  $y = a + \theta$ ，使得  $\cos y \leq \cos \theta$

当  $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ，设  $0 \leq a < 2\pi$ ，下面对区间  $[a - \theta, a + \theta]$  进行分类讨论：

- (1)  $\pi < a - \theta < 2\pi - \theta$ ，得到  $\cos(a - \theta) \leq \cos(2\pi - \theta)$ ；
- (2)  $a - \theta \leq \pi < a + \theta$ ，显然  $\cos \pi = -1 \leq \cos \theta$ ；
- (3)  $a + \theta \leq \pi$ ，显然  $\cos(a + \theta) \leq \cos \theta$ 。

综上所述，存在  $y \in [a - \theta, a + \theta]$ ，使得  $\cos y \leq \cos \theta$ 。

4.2.3. 两种解法的量化对比

Table 6. Comparative analysis of solutions between conventional thinking and classified discussion thinking

表 6. 常规思想与分类讨论思想的解法对比分析

| 解法类型   | 常规解题策略 | 竞赛思想                    |
|--------|--------|-------------------------|
| 常规解法   | 12 步   | 4 类情况分别讨论，重复比较最小值       |
| 竞赛思想解法 | 5 步    | 利用对称性转化为 1 类情况，直接应用区间性质 |

见表 6，从步骤数量来看，竞赛思想解法比常规解法减少了 7 个解题步骤；从运算环节来看，常规解法需要逐一讨论 4 种情况，重复操作多，对计算准确性的要求很高，而竞赛思想指引下的分类讨论，将原本需要分四类讨论的问题整合为一类讨论，大大减少了重复运算，逻辑更加清晰，也能有效降低计算出错的概率。

4.2.4. 总结思路

在本题中，先根据角度的取值范围进行第一次分类，再根据区间关系进行第二次分类，逐一验证了

在所有情况下都存在满足条件的点，既避免了遗漏，又清晰地展示论证过程，最终完整地证明了结论。

4.2.5. 教学设计与反思

(1) 问题设计

Table 7. Design and intention of problems for classified discussion thinking  
表 7. 分类讨论思想的问题设计与意图

| 问题                      | 预设答案                        | 设计意图                     |
|-------------------------|-----------------------------|--------------------------|
| 参数取值不确定时，直接推导会出现哪些逻辑漏洞？ | 以偏概全，论证不严谨，无法覆盖所有可能情况       | 引导学生反思直接推导的弊端，体会分类讨论的必要性 |
| 分类的依据可以从哪些角度确定？         | 参数的取值范围、函数零点的位置             | 帮助学生建立清晰的分类标准，避免分类混乱     |
| 分类后每一步需要验证什么？           | 每一类情况都要满足题目的要求，覆盖所有可能不重复不遗漏 | 强化分类讨论的逻辑严谨性，培养学生有序思考的习惯 |

见表 7，在实际的教学中，可以让学生用常规方法计算本题，接着按表 7 的设计依次抛出问题，引导学生反思常规解法分类混乱、重复运算的问题，再引出结合性质调整分类标准后的解法，让学生直观感受到合理分类的重要性，明确分类讨论“不重不漏”的核心要求。

(2) 学生困难与应对策略

困难 1：找不到分类标准，无从下手。应对：提炼“参数找界、变量定类” 口诀，结合例题拆解分类依据的推导过程。

困难 2：分类遗漏或重复，论证不完整。应对：采用表格法梳理分类框架，让学生先列出所有分类情况再开始解题，强化“不重不漏”的解题原则。

困难 3：步骤书写混乱，逻辑不清晰。应对：固定“分类→推导→结论”的书写范式，要求学生每一步标注理论依据，通过批改作业规范答题格式。

(3) 教学反思

通过阶梯式问题设计，让学生从“被动接受分类方法”转变为“主动探究分类依据”，有效激发了学生的思维主动性；分层变式训练贴合学生的认知水平，逐步提升了学生的分类讨论能力。

4.3. 合理转化问题，回归核心定义

4.3.1. 题目呈现与常规解法

以 2025 年新高考 II 卷第 18 题第 2 问为例，已知函数  $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3$ ，其中  $0 < k < \frac{1}{3}$ 。设  $x_1$  与  $x_2$  分别为  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的极值点和零点，比较  $2x_1$  与  $x_2$  的大小，并证明。

常规解法分析：

- (1) 采用放缩法，需多次尝试不同的放缩方向，且需要三阶导数验证放缩的合理性，过程极其繁琐；
- (2) 重复求导计算，浪费大量解题时间。

4.3.2. 竞赛思想指引下的解题思路

构造思想的核心思路：构造合适的函数，利用导数研究函数的单调性、极值、最值，进而解决问题。具体解法如下：

令  $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - 3kx^2 = 0$ ,

有  $x^2\left(\frac{1}{1+x}-3k\right)=0$ ，由于  $0 < k < \frac{1}{3}$ ，解得极值点  $x_1 = \frac{1}{3k}-1 > 0$ ，  
当  $x \in (0, x_1)$  时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$  在  $(0, x_1)$  上单调递增，  
当  $x \in (x_1, +\infty)$  时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$  在  $(x_1, +\infty)$  上单调递减，  
由  $f(x_2)=0$ ，此时  $f(2x_1)=f\left(\frac{2}{3k}-2\right)$ ，而  $f\left(\frac{2}{3k}-2\right)=\ln\left(\frac{2}{3k}-1\right)+8k+\frac{2}{3k}-\frac{2}{27k^2}-4$ ，令  
 $g(k)=f\left(\frac{2}{3k}-2\right)$ ，而  $g(k)$  在  $\left(0, \frac{1}{3}\right)$  上单调递增，故  $g(k) < g\left(\frac{1}{3}\right)=0$ ，  
因此  $f(2x_1) < 0 = f(x_2)$ ， $f(x)$  在  $(x_1, +\infty)$ 。

4.3.3. 两种解法的量化对比

Table 8. Comparative analysis of solutions between conventional thinking and constructing function thinking  
表 8. 常规思想与构造函数思想的解法对比分析

| 解法类型   | 常规解题策略 | 竞赛思想                 |
|--------|--------|----------------------|
| 常规解法   | 14 步   | 隐零点代换 2 次，三阶导数运算 1 次 |
| 竞赛思想解法 | 7 步    | 仅需一阶导数判断单调性          |

见表 8，从步骤数量来看，竞赛思想解法比常规解法减少了 7 个解题步骤；从运算环节来看，常规解法计算层级多、运算量大，对学生的运算能力和试错耐心要求极高，而竞赛思想指引下通过构造函数直接分析单调性，仅需要一阶导数就能解决问题，学生更容易梳理清楚计算过程，能显著降低错误率。

4.3.4. 总结思路

在本题中，通过导数的性质判断  $f(x_2)$  的正负取值情况，借助函数的构建与求导，结合函数的单调性判断与最值应用，从而得到最后的结论。

4.3.5. 教学设计与反思

(1) 问题设计

Table 9. Design and intention of problems for constructing function thinking  
表 9. 构造函数思想的问题设计与意图

| 问题                     | 预设答案                          | 设计意图                        |
|------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| 常规解法反复求导仍无法确定结果，问题出在哪？ | 没有将极值点和零点的关系转化，导致计算复杂度高       | 引导学生感知构造辅助函数的必要性，反思盲目运算的弊端  |
| 可以借助什么关系构造新的函数来比较大小？   | 利用极值点和零点满足的等量关系，将需要比较的两个量代入转化 | 帮助学生找准构造的切入点，明确构造函数的核心是简化问题 |
| 最关键的步骤是什么？             | 通过导数判断单调性，再利用单调性比较大小          | 强化构造函数解题的完整逻辑，让学生掌握构造法的基本步骤 |

见表 9，在实际的教学中，可以先让学生尝试用熟悉的放缩的常规方法解题，让学生亲身体会常规解法容易出错的情况，再依次抛出设计好的三个问题，引导学生主动思考问题转化的方向，逐步探索出构造新函数简化问题的思路，掌握构造函数的思路。

(2) 学生困难与应对策略

困难 1：无构造思路，不会设计辅助函数。应对：总结“比较大小造差函数、零点极值造目标函数、

不等式证明造单调函数”的构造模型，提供基础范例让学生模仿，逐步引导学生自主构造。

困难 2：导数符号判断错误，导致单调性分析失误。应对：强化定义域优先原则，要求学生先标注定义域和临界点，再分步拆解导数判断符号，通过专项训练提升导数符号判断能力。

困难 3：无法迁移构造方法，只会套用例题。应对：梳理题型特征与构造方法的对应关系，让学生掌握构造法的本质。

### (3) 教学反思

通过问题催生了学生的构造需求，让学生理解了“为何构造”；通过探究问题拆解了构造逻辑，让学生掌握了“如何构造”。

## 5. 结束语

### 5.1. 研究结论

本文以新高考高频压轴模块圆锥曲线、导数为对象，系统提炼竞赛思想在高考解题中的应用路径，得出以下结论：

- (1) 竞赛思想与新高考“重素养、强思维、简运算”导向高度契合，可直接用于优化高考解题；
- (2) 圆锥曲线中，参数方程简化运算、回归定义实现转化，能有效破解解析几何运算繁琐问题；
- (3) 导数中，分层分类讨论保证严谨、构造辅助函数突破难点，可高效解决含参数、零点、不等式证明等综合问题。

### 5.2. 研究局限性

- (1) 本文仅以圆锥曲线、导数为研究对象，未覆盖数列、不等式、立体几何、概率统计等模块，竞赛思想的跨模块适用性未全面验证；
- (2) 研究以真题解法分析为主，缺乏实证数据，未通过教学实验检验该方法对不同层次学生成绩、思维水平的实际提升效果；
- (3) 对竞赛思想的教学全过程未做系统设计，一线教学可操作性仍需完善。

### 5.3. 未来研究展望

- (1) 跨模块拓展研究：将竞赛思想延伸至数列、立体几何、概率统计等模块，形成新高考全模块竞赛思维解题体系；
- (2) 分层教学实证研究：开展对照实验，探究竞赛思想解题路径对尖子生、中等生、基础生的差异化影响，提出分层教学策略；
- (3) 教学转化研究：开发基于竞赛思想的高考解题专题讲义、例题题库与微课资源，形成可直接用于课堂的教学方案；
- (4) 命题规律研究：结合更多年份新高考真题，挖掘竞赛思想与高考命题的关联规律，为备考提供更精准的方向。

## 基金项目

属于国家级大学生创新创业训练计划项目(No. 202411349041)；广东省本科高校课程思政示范团队项目：《数学与应用数学专业课程思政示范团队》。

## 参考文献

- [1] 廖如舟. “导”“角”交融析算理“数”“图”互鉴彰思维——2025 年新高考 I 卷 19 题“导数与三角”试题分析[J]. 中学

数学教学参考, 2025(21): 63-65.

- [2] 刘艳鲜. 递进巧设置, 思维妙发散——以 2025 年高考数学新高考 II 卷第 18 题为例[J]. 中学数学, 2025(19): 79-80.
- [3] 范水平, 易焕盟, 黄律凯, 等. 2025 年新高考 I 卷第 18 题的解法探究与推广[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2025(21): 2-4.