

UbD理论下融合GeoGebra的“圆的标准方程”教学设计

边亚鑫¹, 桑海风^{1*}, 曲贵江², 韦宇哲²

¹北华大学数学与统计学院, 吉林 吉林

²吉化第一高级中学, 吉林 吉林

收稿日期: 2026年5月2日; 录用日期: 2026年6月1日; 发布日期: 2026年6月9日

摘要

“圆的标准方程”是高中数学解析几何的选择性必修一核心内容, 传统教学往往直接给出方程形式, 学生难以理解参数 (a, b, r) 的几何意义。本文以“圆的标准方程”为例, 基于UbD理论的逆向设计三阶段和理解六侧面, 重点阐述教学目标的确定、评价任务的设计以及融入GeoGebra的教学活动流程, 通过一节课的完整设计, 呈现“理解为先”的课时教学实践。

关键词

UbD理论, 逆向教学设计, GeoGebra, 圆的标准方程

Teaching Design of “Standard Equation of a Circle” Integrating GeoGebra under the UbD Theory

Yaxin Bian¹, Haifeng Sang^{1*}, Guijiang Qu², Yuzhe Wei²

¹School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin Jilin

²Jilin No.1 High School, Jilin Jilin

Received: May 2, 2026; accepted: June 1, 2026; published: June 9, 2026

Abstract

As the introductory content of analytic geometry in senior high school mathematics, the standard equation of a circle is conventionally taught by directly presenting its algebraic form, which makes

*通讯作者。

文章引用: 边亚鑫, 桑海风, 曲贵江, 韦宇哲. UbD 理论下融合 GeoGebra 的“圆的标准方程”教学设计[J]. 教育进展, 2026, 16(6): 206-212. DOI: 10.12677/ae.2026.1661117

it difficult for students to understand the geometric meanings of its parameters (a, b, r) . Taking the standard equation of a circle as an example, this paper, based on the three stages of UbD backward design, focuses on the formulation of teaching objectives, the design of assessment tasks, and the process of teaching activities integrated with GeoGebra. It aims to present a complete lesson design that embodies the “understanding-first” approach to classroom instruction.

Keywords

UbD Theory, Backward Instructional Design, GeoGebra, Standard Equation of a Circle

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

“圆的标准方程”是人教版高中数学选择性必修一“圆与方程”章节的第一课时。学生在之前已经学习了直线的方程，初步体会了用代数方法研究几何问题的思想。圆作为平面几何中最重要的曲线之一，其标准方程的推导和理解是后续学习圆的一般方程、直线与圆的位置关系的基础。在实际教学中，常见的问题是：教师直接给出圆的标准方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ，然后通过大量例题训练学生代入求值。学生虽然能记住公式，但对“为什么方程中减去圆心的横、纵坐标”“参数变化时圆如何变化”等核心问题缺乏直观理解。这种“重结论、轻过程”的教学导致学生只知其然，而不知其所以然，难以实现知识的迁移和应用。UbD (Understanding by Design)理论主张“以终为始”，先确定预期学习结果，再设计评价证据，最后规划教学活动。这一逆向设计思路有助于解决教学目标模糊、评价滞后的问题。同时，GeoGebra 作为动态几何软件，能够将抽象的代数表达式与直观的几何图形实时对应，为学生的探究学习提供技术支持。本文聚焦于“圆的标准方程”这一课时，运用 UbD 理论进行逆向教学设计，并在关键环节融入 GeoGebra，对圆的标准方程进行教学设计。

2. 理论概述与现状分析

2.1. UbD 理论的核心思想

UbD 理论由威金斯和麦克泰格于 1998 年提出，核心为理解六侧面、逆向设计三阶段、大概念、基本问题。其中逆向设计三阶段是：阶段一，确定预期的学习结果；阶段二，确定可接受的评价证据；阶段三，规划学习活动和教学指导。该理论强调“理解为先”，认为真正的理解是能够灵活运用知识解决新情境中的问题[1]。

2.2. UbD 理论中的“理解六侧面”

为了具体界定“理解”的内涵，UbD 理论提出了“理解六侧面”，分别为：解释(能用自己的语言说明概念、原理和规律)、阐明(能通过演绎、叙述或比喻来揭示意义)、应用(能在新的、真实的情境中有效运用知识)、洞察(能批判性地看待问题，从多角度分析)、神入(能感受他人情感，从他人视角理解问题)、自知(能反思自己的思维过程，认识自身的认知局限)。这六个侧面构成了一个连续谱，为评价任务的设计提供了多维框架。在数学学科中，“解释”对应概念的定义与举例，“应用”对应解题与建模，“洞察”对应方法的优化与比较，“自知”对应学习反思与错误分析对于学生来说，表达想法很难。所以，上课

的时候教师让学生多看教材，多研究，用专业语言表达。鼓励学生在课堂上多发表自己的想法与观点，并给予适时适当的评价[1]，增加学生的自信心，积极为学生营造多问的课堂教学氛围。

2.3. UbD 理论在数学教育中的应用与成效研究

国外研究将 UBD 理论广泛应用于数学概念、推理与问题解决教学，证实其能提升学生知识结构化水平与迁移能力。国内学者将 UbD 用于数学单元教学设计，在函数、几何、概率统计等领域取得成效，研究表明：UbD 能解决教学目标模糊、评价滞后、活动碎片化问题，尤其适合抽象概念教学。

2.4. 动态几何软件(GeoGebra)在几何教学中的作用及认知机制研究

GeoGebra 作为动态数学工具可降低认知负荷，促进数形结合[2]。研究表明，动态操作能帮助学生直观感知参数变化对图形的影响，建立代数表达式与几何图形的联结，提升概念理解的准确性与稳定性。在解析几何教学中，动态可视化能有效破解“重算轻形”的困境。

2.5. GeoGebra 的技术优势

GeoGebra 是一款动态数学软件，其核心优势在于动态可视化功能和参数控制能力。在“圆的标准方程”教学中，教师可以利用 GeoGebra 创建滑块分别控制圆心坐标 a 、 b 和半径 r ，学生通过拖动滑块实时观察圆的位置和大小的变化，建立“数”与“形”之间的直观对应。

2.6. “圆的标准方程”教学难点与学生认知障碍研究

现有研究指出，学生学习圆的方程存在三类障碍：

- ① 不理解几何定义如何转化为代数方程；
- ② 无法解释 $(x-a)$ 、 $(y-b)$ 与圆心 (a,b) 的对应关系；
- ③ 难以在不同问题情境中灵活应用方程。将理解型教学设计与动态技术融合，是突破上述障碍的有效路径。

3. “圆的标准方程”教学设计

3.1. 阶段一：设计预期的学习结果

3.1.1. UbD 理论下圆的标准方程的大概念

圆的标准方程是圆的几何特征(到定点的距离等于定长)的代数表达，方程中的参数 (a,b) 和 r 分别对应圆心坐标和半径，体现了解析几何“用代数方法研究几何问题”的核心思想。

3.1.2. UbD 理论下圆的标准方程的基本问题

- ① 如何在平面直角坐标系中精确描述一个圆的位置和大小？
- ② 圆的标准方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 中的 a 、 b 、 r 分别代表什么？为什么？
- ③ 给定圆的标准方程，如何确定圆心和半径？反之，给定圆心和半径，如何写出方程？

3.1.3. 知识与技能目标

根据《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》[3]及教材内容，确定本课时的学习目标：

学生能说出圆的标准方程的形式，理解其中各参数的几何意义；

学生能根据圆心坐标和半径写出圆的标准方程；

学生能根据圆的标准方程指出圆心坐标和半径；

学生能根据简单条件(圆经过某点、圆心在坐标轴上等)求圆的标准方程。

3.2. 阶段二：设计评价阶段

基于上述预期学习结果，在教学过程中设计以下评价任务。

3.2.1. 前置性评价(课前或课堂前 5 分钟)

向学生提问以下知识(理解侧面——解释):

- ① 什么是圆? (到定点的距离等于定长的点的集合) _____
- ② 两点间距离公式是什么? ($d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$) _____
- ③ 在坐标系中, 如何表示一个点的位置? (用坐标 (x, y)) _____

学生能正确回答上述问题, 方可进入新课学习。

3.2.2. 表现性任务(课堂中的评价)

任务名称: GeoGebra 探究——圆心和半径如何决定圆的位置和大小, 完成 GeoGebra 探究任务评价量规表, 如表 1 所示。

操作要求: 打开 GeoGebra, 创建滑块分别代表 a 、 b 、 r 。在指令栏输入, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 观察圆的变化。分别记录以下三组参数对应的圆心、半径和方程:

当 $a=0, b=0, r=2$ 时, 圆心_____, 半径_____, 方程_____。

当 $a=2, b=3, r=1$ 时, 圆心_____, 半径_____, 方程_____。

当 $a=-1, b=2, r=1.5$ 时, 圆心_____, 半径_____, 方程_____。

思考并回答: 圆的标准方程中, a 、 b 、 r 与圆的位置和大小有怎样的对应关系? 请用自己的话总结。

Table 1. Evaluation rubric for GeoGebra exploration tasks

表 1. GeoGebra 探究任务评价量规

| 评价维度 | 优秀(4分) | 良好(3分) | 合格(2分) | 待改进(1分) |
|-------|-------------------------------------|----------------|--------------|-------------|
| 操作规范性 | 能独立完成滑块创建和方程输入 | 操作熟练基本完成, 偶需提示 | 操作不熟练, 需较多帮助 | 无法独立完成概念完整性 |
| 记录准确性 | 三组数据全部正确, 书写规范 | 2~3 处小错 | 较多错误 | 记录混乱 |
| 规律总结 | 准确说明 a 、 b 决定圆心、 r 决定半径, 语言清晰 | 基本准确 | 部分有误 | 无法总结 |

3.2.3. 课后评价(课堂练习 + 课后作业)

本环节对应的对应理解侧面是应用和洞察。

课堂练习(书面):

- ① 已知圆心 $C(2, -3)$, 半径 $r=4$, 求圆的标准方程。
- ② 已知圆的标准方程为 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$, 求圆心和半径。
- ③ 已知圆经过点 $A(3, 4)$, 圆心为 $C(1, 2)$, 求圆的标准方程。

课后作业:

- ① 书面作业: 教材练习题第 1、2、3 题。
- ② 拓展作业: 用 GeoGebra 绘制圆心在 $(-2, 1)$ 、半径为 2.5 的圆, 写出方程并截图提交。

3.3. 阶段三：教学过程设计

本课时共 45 分钟, 具体教学活动流程如下[4]。

环节一：情境导入，激活经验(理解侧面——解释、阐明)

师：同学们，在生活中圆形是很常见的，像车轮、摩天轮等，那在平面直角坐标系中，如何用数学语言精确描述一个圆？

生：到定点的距离等于定长的点的集合。

师：对的，这个定点就是圆心，这个定长就是半径，少一个都构不成圆。

师：现在我们设圆心为 $C(a,b)$ ，半径为 r ，圆上任意一点 $P(x,y)$ ，根据定义，我们知道 $|PC=r|$ ，怎么来表示圆呢？

生：用两点间的距离公式！

师：非常好，由两点间的距离公式，我们能得到 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ，这就是圆的标准方程的雏形，接下来我们将深入研究。

环节二：GeoGebra 探究，发现规律(理解侧面——解释、应用、洞察)

过程：学生 5 人一组画出圆心为 $C(2,3)$ ，半径是 5 的圆，教师打开 GeoGebra 软件，演示如何创建滑块 a 、 b 、 r 并输入方程，通过操作，让学生完成表现性任务。教师指导，帮助操作困难的小组。

师：在观察这一系列的图像变化，同学们发现了什么？

生 1：圆心 (a,b) 决定圆的位置，半径 r 决定圆的大小。

生 2：方程中减去圆心坐标的平方和等于半径的平方。

教师板书并规范表述：圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ，其中 (a,b) 为圆心， r 为半径。

设计意图：通过 GeoGebra 的动态操作，让学生在“做中学”，直观感受参数变化对图形的影响，自主归纳出方程形式，避免机械记忆。

环节三：例题讲解，巩固应用(理解侧面——应用、洞察)

教师通过三个例题示范方程的应用。

例 1 (直接代入)：已知圆心为 $A(2,-3)$ ，半径为 5 的圆的标准方程，并判断点 $M_1(5,-7), M_2(-2,-1)$ 是否在这个圆上。

解： $(x-2)^2+(y+3)^2=25$ ， M_1 在圆上， M_2 不在圆上。

例 2 (从方程找圆心半径)：已知圆的方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=16$ ，求圆心和半径。

解：圆心 $(1,-2)$ ，半径 $r=4$ 。

例 3 (待定系数)：已知圆经过点 $P(5,3)$ ，圆心为 $C(1,0)$ ，求圆的标准方程。

解： $r=|CP|=5$ ，方程为 $(x-1)^2+y^2=25$ 。

设计意图：例 1 和例 2 分别训练学生从“数”到“形”和从“形”到“数”的转换能力，对应 UbD 理解六侧面中的“应用”维度，例 3 引入待定系数思想，为后续学习圆的一般方程做铺垫。

学生独立完成课堂练习第①、②题，教师展示典型答案并点评。

环节四：课堂小结，反思提升(理解侧面——阐明、自知)

师：通过本节课，你学到了什么？你认为圆的标准方程中最重要的三个数是什么？它们分别决定了什么？

学生自由发言。

教师总结：圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ，其中圆心 (a,b) 决定圆的位置，半径 r 决定圆的大小。从圆的定义出发，通过距离公式得到方程，这体现了解析几何的核心思想——用代数方程描述几何图形。

教师向学生提出以下的反思性问题，引导学生自知。

- ① 今天最难理解的地方是什么？
- ② 我在哪个环节出错？如何改进？
- ③ 圆的标准方程最关键的三个量是什么？

最后，由教师布置课后作业(含 GeoGebra 拓展作业)。

环节五：评价反馈(穿插于各环节，理解侧面——解释、应用、自知)

教师在探究环节收集学生的评价，在练习环节巡视学生的解题过程，在小结环节倾听学生的总结发言，综合评估目标达成情况，对未达标的学生进行课后个别辅导。

4. GeoGebra 融入教学的说明

本教学设计中 GeoGebra 的使用贯穿探究环节，其作用体现在三个方面。

4.1. 参数可视化

三个滑块分别控制 a 、 b 、 r ，拖动滑块时，圆的圆心坐标和半径大小实时变化。这种直观的对应关系帮助学生建立起“数”与“形”之间的联系，理解抽象参数的具体含义。

4.2. 规律发现

学生通过尝试不同的参数组合，观察圆的位置和大小变化，自然归纳出“圆心决定位置，半径决定大小”的规律。这一过程比教师直接告知结论更能促进深层理解。

4.3. 即时验证

在例题和练习环节，可以将学生自己求出的方程输入 GeoGebra，观察绘制的圆是否满足条件，实现自我检验。例如，例 3 中求出方程后，在 GeoGebra 中绘制该圆，可以看到点 $P(4,3)$ 恰好在圆上，从而验证答案正确。

5. 教学反思

本设计以 UbD 理论为指导，将评价任务前置[5]，将理解的六侧面加入教学活动，相较于传统教学设计实现了多方面改进：一是目标更明确，通过在阶段一明确大概念和基本问题，使所有活动都指向“理解圆的标准方程中参数的几何意义”这一核心，避免了活动的随意性；二是评价更及时，将表现性任务嵌入探究环节，同时把课堂练习与总结发言作为评价证据，便于教师实时把握学情；三是学生更主动，借助 GeoGebra 探究活动取代教师直接讲解，让学生从被动接受者转变为知识的主动建构者。在实施过程中需注意，应提前对学生进行 GeoGebra 操作培训并提供简短操作指南，严格把控探究环节时间，对操作存在困难的学生可采用同伴互助或小组合作的方式予以支持。本设计目前尚未经过大规模教学实验验证，后续可在真实课堂中开展实施，进一步检验并优化教学效果。

6. 结语

本文以“圆的标准方程”为例，呈现了 UbD 理论下融合 GeoGebra 的课时教学设计。设计遵循逆向设计三阶段：先确定预期学习结果，再设计评价证据(前置性问题、GeoGebra 表现性任务、课堂练习)，最后规划学习活动(情境导入 - GeoGebra 探究 - 例题讲解 - 小结反思)。GeoGebra 的融入使参数 a 、 b 、 r 的几何意义直观可视，学生在操作中自主归纳规律，实现了“理解为先”的教学理念。

基金项目

吉林省高教科研课题(JGJX25D0391)，校级研究生教育教学改革研究课题(JG[2024]001)。

参考文献

- [1] 刘徽. 追求理解: 为迁移而教——读《追求理解的教学设计(第二版)》[J]. 现代教学, 2017(17): 76-78.
- [2] 吴婉君. “双新”背景下 GeoGebra 融入高中数学教学模式初探[J]. 数理化学学习(教研版), 2024(1): 3-5.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [4] 常云龙. 高中数学“圆的标准方程”逆向教学设计[J]. 理科爱好者, 2025(2): 10-12.
- [5] 于蓝娜, 关劲秋. UbD 理论视域下的高中数学单元教学研究[J]. 数理天地(高中版), 2026(5): 107-109.