Advances in Education 教育进展, 2026, 16(6), 1260-1265
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2026.1661254

Hans汉斯

APOS理论下基于GeoGebra的教学设计

——以指数函数为例

乔雄志

黄冈师范学院数学与统计学院，湖北 黄冈

收稿日期：2026年5月16日；录用日期：2026年6月20日；发布日期：2026年6月26日

摘 要

APOS理论是近年来美国数学家杜宾斯基(Dubinskt)等人提出的一种数学教学理论。他将数学概念的建立分为四个阶段：活动(Action)、过程(Process)、对象(Object)、图式(Scheme)，并用于指导教学实践。早期APOS理论只是被用在大学数学的教学中，现在该理论正逐步渗透于我们的中学数学教学中。GeoGebra是一款功能强大的动态数学软件，由奥地利数学家Markus Hohenwarter及其国际开发团队共同开发，旨在为全球校园提供免费使用的动态数学工具。它结合了几何、代数、微积分、概率统计、数据表、图形和计算等多种功能，为用户提供了一个综合性的数学学习、教学和科研平台。它是一款功能全面、易于使用的动态数学软件，适合学生、教师和任何对数学感兴趣的人使用。本文先介绍APOS理论和GeoGebra，然后运用APOS理论结合GeoGebra以指数函数为例进行教学设计。

关键词

APOS理论，Grogebra，指数函数，教学设计

Instructional Design Based on GeoGebra under the APOS Theory

—Taking Exponential Functions as an Example

Xiongzhi Qiao

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: May 16, 2026; accepted: June 20, 2026; published: June 26, 2026

Abstract

TAPOS theory is a mathematics teaching theory proposed in recent years by American mathematician

文章引用: 乔雄志. APOS 理论下基于 GeoGebra 的教学设计[J]. 教育进展, 2026, 16(6): 1260-1265.
DOI: 10.12677/ae.2026.1661254

Ed Dubinsky and others. It divides the formation of mathematical concepts into four stages: Action, Process, Object, and Scheme, and is applied to guide teaching practice. In the early days, the APOS theory was only used in college mathematics teaching, but now it has gradually penetrated into middle school mathematics teaching in China. GeoGebra is a powerful dynamic mathematics software co-developed by Austrian mathematician Markus Hohenwarter and his international development team, aiming to provide a free dynamic mathematics tool for campuses worldwide. It integrates multiple functions including geometry, algebra, calculus, probability and statistics, data tables, graphics and computation, offering users a comprehensive platform for mathematics learning, teaching and scientific research. As a full-featured and user-friendly dynamic mathematics software, it is suitable for students, teachers and anyone interested in mathematics. This paper first introduces the APOS theory and GeoGebra, then carries out an instructional design for exponential functions by applying the APOS theory combined with GeoGebra.

Keywords

APOS Theory, GeoGebra, Exponential Function, Instructional Design

1. 引言

任何一个数学教育中的理论或者模型都应该致力于“学生是如何学习数学的”以及“什么样的教学方式可以帮助这种学习”，而不仅仅只是陈述一些事实[1]。基于此，杜宾斯基等人建立了 APOS 理论，一个可以促进我们有效进行教学的数学教学理论。从 20 世纪 90 年代起，APOS 就传入我国的数学教育界，它作为为数不多的依据数学学科特点而建立的教学理论，对我们进行数学教育帮助巨大。近年来，相关学者的研究结果表明，将 APOS 理论应用到概念教学中可以弥补我国之前那种概念教学方式的缺点。尹梦伟、袁璐[2]以 APOS 理论为指导，针对指数函数教学难点，按活动、过程、对象、图式四阶段展开教学设计，借助情境探究、概念抽象、图像分析与知识结构化，帮助学生主动建构指数函数概念，深化理解并完善认知结构，实践表明该模式可有效提升课堂参与度与概念掌握水平。王荣亮、王艳彩[3]针对职校指数函数教学抽象难懂、学生兴趣不足的问题，运用 GeoGebra 从案例构建、函数绘制、性质探讨、拓展研究四方面开展可视化教学设计，经实证对比，该模式能显著提升学习成绩与课堂参与度，有效降低学习难度，值得推广。

2. APOS 理论的核心内涵

APOS 理论诞生于 20 世纪 80 年代末至 90 年代初，是杜宾斯基团队在数学教育实践中提出的重要理论，也是对皮亚杰反思性抽象理论的拓展。该理论认为，数学概念无法直接通过讲授习得，必须依靠学生自身的心智结构逐步建构。学生理解数学概念一般要经历四个阶段[3]：

首先是活动阶段，通过具体、外显的操作与变换，让学生直观感受数学对象的特征，是概念形成的起点。例如，在理解函数概念时需要活动或操作，对于 $y = x^2$，需要用具体的数字构造对应：2→4；3→9；4→16；……通过操作活动理解函数的意义。

接着是过程阶段，将外部操作内化为头脑中的心理运算，脱离具体操作，形成可思考、可逆转的思维过程。当“活动”经过多次重复而被个体熟悉后，就可以内化为一种称之为“程序(processes)”的心理

操作。有了这种“程序”，个体就可以想象这个“活动”，而不需要通过外部的刺激；他可以在头脑中实施这个程序，而不需要具体操作；进而他还可以对这个程序进行逆转以及与其他程序进行组合。例如，把上述例子中的操作活动综合为一个函数过程。一般地有 $x \to x^2$ 其他的各种函数也可以概括为一般的对应过程 $x \to f(x)$。

其次是对象阶段把过程当作一个整体进行研究，赋予形式化定义与符号，成为可运算、可分析的独立对象。接着上面的例子，然后可以把函数过程当作一个独立的对象来处理，比如函数的加减乘除、复合运算等。在表达式 $f(x)+g(x)$ 中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是作为一个整体对象出现的。

最后是图式阶段将活动、过程、对象与相关知识整合，形成稳定的认知结构，能够灵活解决各类相关问题。一个数学概念的“图式”是指由相应的“活动”、“程序”、“对象”以及与某些一般原理相联系的其他“图式”所形成的一种个体头脑中的认知框架，它可以用以解决与这个概念相关的问题。

杜宾斯基指出，在 APOS 理论的四个构成要素里，活动、过程与对象可被视为数学知识的三种存在形态，而图式则是由这三类知识整合而成的认知结构。从理论层面看，这四个要素呈现出层级递进关系，前一阶段的建构通常是后一阶段形成的前提。但在实际学习中，学生对数学概念的理解并非严格按照这一线性顺序推进。以函数概念为例，学生最初通过“活动”阶段，仅将函数理解为可代入数值计算的代数式；随着认知深化，会把函数类比为“输入－输出”的加工装置，进而形成初步的“过程”认知。当面对结构更复杂的函数表达式时，学习者常会重新回到“活动”层面进行操作，在此基础上进一步优化对函数的“过程”理解。经过多次这样的循环建构，学生才能最终形成清晰、完整的函数“对象”认知。但是当学生遇到更为复杂的函数表达式时，往往又回到了“活动”阶段，并在“活动”的基础上，又进一步完善了函数“程序”。如此经过多个循环之后，学生才最终形成明确而完整的函数“对象”[5]。

APOS 理论弥补了传统概念教学过于强调记忆、理解表层化的不足，更符合中学生数学思维的发展规律。

从数学学习心理学角度分析，APOS 理论的四个学习层次是合理的，反映了学生学习数学概念过程中真实的思维活动。其中的“活动阶段”是学生理解概念的一个必要条件，通过“活动”让学生亲身体验、感受直观背景和概念间的关系。“程序阶段”是学生对“活动”进行思考，经历思维的内化、压缩过程，学生在头脑中对活动进行描述和反思，抽象出概念所特有的性质；“对象阶段”是通过前面的抽象认识到了概念本质，对其赋予形式化的定义及符号，使其达到精致化，成为一个具体的对象，在以后的学习中以此为对象进行新的活动；“图式阶段”的形成是要经过长期的学习活动进一步完善，起初的图式包含反映概念的特例、抽象过程、定义及符号，经过学习，建立起与其他概念、规则、图形等的联系，在头脑中形成综合的心智结构。

3. 什么是 GeoGeBra

GeoGebra (以下简称 GGb)由奥地利数学家 Markus Hohenwarter 及其国际开发团队共同开发，其目的在于让全世界的校园都可以免费使用动态数学软件。它结合了几何、代数、微积分、概率统计、数据表、图形和计算等多种功能，为用户提供了一个综合性的数学学习、教学和科研平台。在几何方面在 GGb 中创建和操作几何图形，包括点、线段、直线、多边形、圆、圆锥曲线等。通过拖动构件，用户可以动态地改变图形的形状，观察几何性质的变化；在代数计算方面，GGb 允许用户输入和操作代数表达式，并自动生成相应的几何图形。它支持复杂的代数运算，包括方程求解、函数绘图和代数化简等；在微积分方面，GGb 提供微积分功能，包括导数、积分和极限的计算与可视化。用户可以动态地观察函数的变化，理解微积分的基本概念和应用；在统计与分析方面，GGb 支持统计分析和概率计算，可以生成统计图表如条形图、直方图、散点图等，并进行回归分析、概率分布和数据分析等等。除此之外，它广泛应用于数

学课堂教学，可以帮助教师动态展示数学概念，提高学生的理解和参与度。学生可以利用 GGb 进行自学和完成作业，提高数学实践能力。总之，GGb 是一款功能强大、使用简单、交互性强的动态数学软件，适用于教育、科研和学习等多个领域。

4. 基于 APOS 理论与 GGB 的指数函数的教学设计

(一)“活动”阶段(Action)——情景操作，初步探知

教学目标：通过生活实例与软件操作，让学生直观感受指数型变化关系。

1. 情境导入

情境 1：《庄子·天下》中写道：“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”

情境 2：一位富翁对他的儿子说：“我会直接给你 10 万元，但你须要承担一定的任务：从今天开始，第一天给我 2 元，第二天给我 4 元，第三天给我 8 元，第四天给我 16 元，依此类推。”

问题 1：(1) 在第 x 次取后，写出木棍的剩余量 y 与 x 的关系

(2) 在第 x 天后，儿子要给富翁多少钱？

(3) 这个变化过程中，如何用 x 来表示 y 呢？

教师引导学生在软件中输入函数表达式，绘制图像，观察增长趋势与变化特点。

【设计意图】从真实问题出发，让学生在动手操作中建立指数变化的直观印象。学生在情境中发现问题，y 与时 x 的数量关系，并利用 GGb 做出相关图像，对其进行归纳。在讨论交流、归纳、抽象共性的情况下，学生将经历从简单到复杂、从特殊到一般的过程，体会指数函数是现实生活中的一种有效的数学模型。

2. “过程”阶段(Process)——归纳共性，抽象概念

教学目标：提炼函数共同特征，内化为心理过程，形成指数函数的初步概念。

问题引导：问题 2：在上面两个情境中得到了两个关系式，它们是不是函数表达式？如果是，能否总结出它们的表达式？

学生：它们满足函数的概念，是函数表达式。表达式是 $y=a^x$。

问题 3：指数函数 $y=a^x$ 中的底数 a 取任何数都可以吗？

教师引导学生对底数 a 的讨论分为三个部分进行：

(1) 若 $a<0$ 会有什么问题？

(2) 若 $a=0$ 会有什么问题？

(3) 若 $a=1$ 又怎么样？

教师引导学生利用 GGb 分别画出 $a=-2$，$a=-1$，$a=0$，$a=1$，$a=\frac{1}{2}$，$a=2$ 时的图像。

学生活动：小组讨论

(1) 若 $a<0$，对于 $x=\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\cdots$，$a^x$ 无意义。

(2) 若 $a=0$，$x>0$ 时，$a^x=0$；$x\le 0$ 时，a^x 无意义。

(3) 若 $a=1$，$a^x=1^x=1$ 是常量，没有研究的必要。

【设计意图】教师引导学生取特殊值讨论每种情况，体会为什么要规定 $a>0$，且 $a\ne 1$，理解底数的取值属于特殊的规定，深刻理解指数函数的定义，并为接下来学习指数函数的性质打下基础。

问题 4：指数函数 $y=a^x$ 中，$x\in R$ 都有意义吗？

指数函数的定义：一般地，形如 $y=a^x$ ($a>0$，且 $a\ne 1$)的函数叫做指数函数，定义域为 R。

【设计意图】在归纳共性、辨析参数的基础上，形成严谨定义，将思维过程内化为概念本质，完成

从具体到形式化的过渡。

3. “对象”阶段(Object)——辨析特征，巩固概念

教学目标：将指数函数作为独立认知对象，辨析概念、探究性质，实现精致化理解。

例 1 结合指数的概念，判断下列函数是否是指数函数

(1) $y=x^{-2}$ (2) $y=-2^{\frac{1}{x}}$ (3) $y=2^{1+x}$

(4) $y=x^{2}$ (5) $y=2^{-x}$

【设计意图】通过正误辨析，强化指数函数形式特征，区分指数函数与幂函数、复合函数的差异。

学生活动：探究指数函数的性质

(1) 分组利用 GeoGebra 绘制 $y=2^{x}$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$，$y=3^{x}$，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 这 4 个具体的函数图像，观察得出相关性质。

(2) 对比 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情况，总结图像特征、单调性、定点等性质。

【设计意图】以图像探究为载体，引导学生用分类讨论思想归纳性质，将指数函数作为整体对象开展研究，实现概念精致化。

4. “图示”阶段——练习巩固，形成结构。

教学目标：运用概念解决问题，整合知识形成认知图式，提升应用能力

① 基础应用

例 2 已知指数函数 $f(x)=a^{x}$ （$a>0$，且 $a\neq1$)的图象经过点 $(3,\Pi)$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-3)$ 的值。

例 3 比较下列各题中的两个值的大小。

(1) $1.7^{2.5}$ 和 1.7^{3} (2) $0.8^{-0.1}$ 和 $0.8^{-0.2}$

(3) $1.7^{2.5}$ 和 $0.9^{2.5}$

② 课堂小结

引导学生根据 APOS 四阶段学习路径，梳理指数函数定义、图像、性质、应用，构建完整知识框架，形成稳定认知图式。

【设计意图】通过练习巩固与知识梳理，将指数函数知识纳入已有认知体系，实现灵活应用，完成 APOS 理论的图式阶段。

5. 小结

本文在 APOS 理论框架下，结合 GGB (Geometer’s Sketchpad)这一强大的数学软件工具，对指数函数的教学设计进行了深入探索与实践。通过构建一系列循序渐进的学习活动，旨在帮助学生从操作(Action)阶段逐步过渡到过程(Process)、对象(Object)乃至图示(Schema)阶段，从而形成对指数函数概念的深刻理解和灵活应用。

研究结果显示，基于 APOS 理论的 GGB 教学设计能够显著提升学生对指数函数概念的理解深度与广度。学生在动手操作 GGB 软件绘制函数图像、探索函数性质的过程中，不仅直观地感知了指数函数的增长特性，还通过不断反思与总结，逐步内化了指数函数的概念框架，形成了稳定的认知图示。这一过程不仅促进了学生数学思维的发展，还增强了他们利用数学工具解决实际问题的能力。

此外，本研究还发现，GGB 软件的引入极大地丰富了教学手段，使得抽象的数学概念得以具象化呈现，降低了学习难度，激发了学生的学习兴趣与积极性。学生在与软件的互动中，能够主动探索、发现规律，这种主动建构知识的过程对于培养他们的自主学习能力和创新思维能力具有重要意义。

综上所述，APOS 理论指导下基于 GGB 的教学设计在指数函数教学中展现出显著的优势与效果。它不仅为学生提供了一个从具体到抽象、从直观到理性的认知路径，还通过信息技术的融合，实现了教学内容与方式的双重创新。未来，随着教育技术的不断进步和 APOS 理论的持续深化，我们有理由相信，基于 GGB 等数学软件的教学设计将在更多数学领域发挥重要作用，为培养具有创新精神和实践能力的数学人才贡献力量。因此，教育者应积极探索和实践此类教学模式，不断优化教学设计，以适应新时代数学教育的需求与挑战。

参考文献

[1] 鲍建生, 周超. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海: 上海教育出版社, 2009.

[2] 尹梦伟, 袁璐. 基于 APOS 理论的指数函数概念教学设计[J]. 教育教学论坛, 2020(19): 279-280.

[3] 王荣亮, 王艳彩. 基于 GGB 的指数函数可视化设计与实践研究[J]. 电脑知识与技术, 2024, 20(26): 102-104.

[4] 张奠宙, 李士锜, 李俊. 数学教育学导论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[5] 濮安山, 史宁中. 从 APOS 理论看高中生对函数概念的理解[J]. 数学教育学报, 2007(2): 48-50.

[6] 王继光, 龚辉. APOS 理论与锐角三角函数概念的形成[J]. 中学数学教学参考(上旬), 2011(11): 13-14.