**Advances in Education** 教育进展, 2026, 16(6), 571-576
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2026.1661165

# 《离散数学》课程融入数学文化的教学实践

**陈梅璇，杨　超***

广东外语外贸大学数学与统计学院，广东　广州

收稿日期：2026年5月5日；录用日期：2026年6月7日；发布日期：2026年6月16日

## 摘　要

将数学文化融入高校数学专业课是落实课程思政的重要途径。本文挖掘了华人逻辑学家王浩在计算理论中的若干重要成果，将其转化为面向数学师范生《离散数学》课程的教学案例。通过该案例的教学实践，学生在掌握专业知识的同时，加深了对中国学者在当代数学发展中历史贡献的认识，实现了知识传授与数学文化熏陶的统一。

## 关键词

《离散数学》，计算理论，数学文化，课程思政，王浩

# Teaching Practice of Integrating Mathematical Culture into the “Discrete Mathematics” Course

**Meixuan Chen, Chao Yang***

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong

Received: May 5, 2026; accepted: June 7, 2026; published: June 16, 2026

## Abstract

**Integrating mathematical culture into mathematics courses in higher education is an important approach to implementing curriculum-based ideological and political education. This paper explores several key achievements of the Chinese logician Hao Wang in the theory of computation and transforms them into a teaching case for the “Discrete Mathematics” course designed for mathematics education majors. Through the teaching practice of this case, students not only acquire professional knowledge but also deepen their understanding of the historical contributions made by Chinese**

*通讯作者。

文章引用: 陈梅璇, 杨超. 《离散数学》课程融入数学文化的教学实践[J]. 教育进展, 2026, 16(6): 571-576.
DOI: 10.12677/ae.2026.1661165

**scholars to the development of contemporary mathematics, thereby achieving the unity of knowledge transmission and the cultivation of mathematical culture.**

## Keywords

**“Discrete Mathematics”, Theory of Computation, Mathematical Culture, Curriculum-Based Ideological and Political Education, Hao Wang**



## 1. 引言

《离散数学》是高校数学与应用数学专业的一门专业主干课程[1]。在课堂中有效地实施课程思政，是《离散数学》教学实践中的一项重要任务。教育部《高等学校课程思政建设指导纲要》指出高校的专业课程要“要根据不同学科专业的特色和优势”，“深度挖掘提炼专业知识体系中所蕴含的思想价值和精神内涵”，“增加课程的知识性、人文性”[2]。融入数学文化是数学类专业课课程思政建设的重要方法。此外，高中数学课程标准明确要求“数学文化融入课程内容”[3]。因此，面对数学师范生的数学专业课的教学，更有必要加强与数学文化的结合，增强学生对数学课堂与数学文化融合的意识，为学生将来走向基础教育岗位后成为数学文化的传播者和课堂融合的实践者奠定基础。

在融入数学文化时，要善于挖掘新素材，要善于融入中国数学家的贡献。在 2024 年纪录片《杨振宁：百年科学之路》[1]首映式的圆桌对谈环节，北京通用人工智能研究院院长朱松纯教授尖锐地指出：我们对推崇和宣传我国杰出科学家的力度欠缺。朱松纯教授举例说英国人把图灵印到他们的钞票上去，极其注重扩大本国科学大师的影响力。为弥补朱松纯教授所揭示的这一短板，应在高校课堂中加强融入数学文化，使之成为宣传中国杰出科学家的一个重要阵地。

本文作者所在的广东外语外贸大学的数学与应用数学(师范)专业开设 32 课时的《离散数学》课程，内容覆盖计算理论中有穷自动机、下推自动机和图灵机三大计算模型，以及计算时间复杂性中的 P 问题和 NP 问题类。在教学过程中，我们结合课程内容，在多个不同的内容模块中，分别把著名华人数理逻辑学家王浩的多项相关工作融入到课堂中，让学生认识到中国数学家在当代数学的发展中所做出的开创性的贡献。王浩 1921 年生于山东济南，1943 年毕业于西南联合大学数学系，1948 年毕业于哈佛大学哲学系，毕业后先后在哈佛大学、牛津大学和洛克菲勒大学任教，1995 年在美国纽约去世[4]。本文具体介绍将王浩的相关工作贯穿于《离散数学》课程的教学设计案例。

本文结构安排如下：第 2 节阐述在图灵机的等价模型内容模块中融入王浩机的简介，第 3 节阐述在不可判定问题和 NP 问题内容模块中融入王浩提出的王砖问题，第 4 节阐述在 NP 完全问题内容模块中融入王浩对其学生 Stephen Cook 的影响，第 5 节是总结与展望。

## 2. 王浩机——图灵机的等价模型

图灵机是计算理论中最核心的概念，其提出源于对算法这一直观概念的精准数学描述。从 20 世纪 30 年代起，先后有不同的学者提出不同的概念去刻画算法。图灵提出了图灵机，丘奇提出 $\lambda$ 演算系统，两者被证明是等价的，都恰当地给出了算法的定义，形成了被学界普遍认可的图灵丘奇论题。

[1]https://www.bilibili.com/video/BV15e411Y798/

在计算理论的早期发展中，算法的等价定义远不止图灵机和 $\lambda$ 演算两种，有其他学者提出更多的等价定义。这些等价的定义为我们从多个侧面去理解计算的本质有着重要的作用。一般教材受到篇幅的限制，往往只采用最直观的图灵机作为计算的理论定义。我们在课堂上，可适当延拓，介绍一两种等价模型，让学生认识：科学发展并非一蹴而就，而是一个渐进融合的过程。

华人数理逻辑学家王浩在 1954 年提出一个王浩机的模型，并证明与图灵机等价[5]。王浩机的一个显著特点是与编程语言几乎一致，可帮助学生直观理解为何各种编程语言的能力与图灵机等价。Minsky 对王浩机有高度的评价，在其关于计算模型的专著中也有对王浩机详细阐述的章节[6]。在《离散数学》课程中讲授图灵机的等价模型时，可用一个例子介绍王浩机。

王浩机是由有限条按顺序标号的指令构成，机器按照指令在写有输入字符串的带子上运算。带子和顺序指令序列共同构成了王浩机。作为计算模型的数学概念，王浩机极其简洁，带子上的每个格子要么是空白，要么写有符号*，且只有 4 类不同的指令。第一类，机器在带子上向右移动一格，用符号→表示；第二类，机器在带子上向左移动一格，用←表示；第三类，机器在当前格子上写符号*，用*表示；第四类是条件跳转，记为 $Cn$，若当前格子上写有符号*，跳转到第 $n$ 条指令，否则继续执行第下一条指令。王浩机的工作方式是按顺序执行一个指令序列(在跳转指令时可能发生跳转)。

王浩机的一个具体例子如表 1 所示，一共由五条指令构成的序列。容易看出，该程序读到当前格子上有*符号，就向右移动一格，直到格子上为空白，程序执行完毕，王浩机停止计算。

**Table 1.** A program of Wang machine
**表 1.** 王浩机的一个程序

| 序号 | 指令 |
|---|---|
| 1 | * |
| 2 | → |
| 3 | $C2$ |
| 4 | → |
| 5 | ← |

## 3. 王浩铺砖问题

### 3.1. 整个平面的王浩铺砖问题的不可判定性

讲授了图灵机的模型之后，自然就引出了图灵可识别问题、图灵可判定问题和图灵不可判定问题(简称不可判定问题)等概念。在举不可判定问题的例子时，可介绍王浩的铺砖问题[7]。王浩的铺砖问题是一个开创性的工作，由此引发了学者对平面密铺的非周期性的认识，为后来准晶体的发现于 2011 年被授予诺贝尔化学奖提供了数学理论基础。由王浩开创的密铺的非周期性与不可判定性研究，至今仍是国际数学界关注的前沿问题。如 2024 年，Greenfeld 和陶哲轩发表在 Annals of Mathematics 上的论文证明了在维数充分高的空间中，存在单一的平移非周期的砖块。Greenfeld 和陶哲轩在论文正文的第一句话就郑重地以引用王浩的全名的方式介绍问题的起源[8]：“In 1960, Hao Wang studied the problem of tiling the plane by translated copies of finitely many squares”(在 1960 年，王浩研究了用有限种正方形的平移拷贝密铺平面的问题)。

一个单位正方形若每条边赋予一种颜色，则称为一个王砖(Wang Tile)。用王砖密铺平面时，只能平

移使用，不能旋转，且相邻的两个王砖要求其公共边的颜色相同。王浩为研究数理逻辑中的问题，于 1960 年提出了铺砖问题：是否存在一个算法，对任给的一组王砖，判断使用该组王砖能否密铺整个平面？如图 1 为一组 3 个不同样式的王砖，密铺时每种样式都有无穷供应，容易验证这一组王砖可以密铺整个平面。若只取图 1 的前 2 个王砖构成一组，则可验证不能密铺整个平面。在王浩的指导下，王浩铺砖问题被他的博士研究生 Berger 在其博士论文中证明是不可判定的[9]。如今，王浩铺砖问题成为数学各领域中最具代表性的不可判定问题之一[10]。

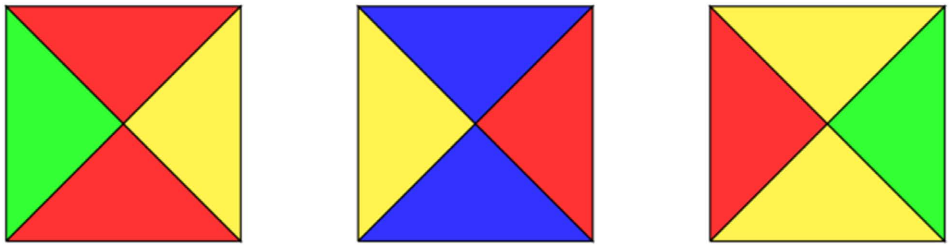

**Figure 1.** A set of Wang tiles
**图 1.** 一组王砖

### 3.2. 有限区域的王浩铺砖问题与 NP 问题

在《离散数学》课程最后一个大单元“时间复杂性”的教学中，涉及 P 问题和 NP 问题两个计算复杂性的类别。此时，也可以用有限区域条件下的王砖密铺问题作为例子，解释 NP 问题的概念。在课堂上向学生展示一个在线交互版的 3×3 大小的王砖密铺问题网页程序[11]，如图 2 所示。此时一共有 9 个王砖，每个使用 1 次，要铺满 3 × 3 的矩形区域，同样要满足相邻王砖的公共边的颜色相同的限制条件。

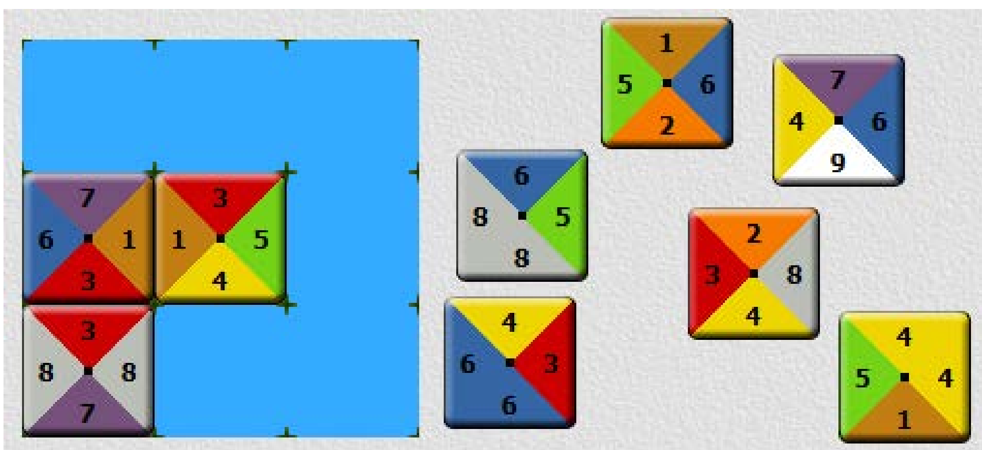

**Figure 2.** A screenshot of 3 × 3 Tetravex
**图 2.** 3 × 3 区域王砖密铺的截图

当考虑一般的 $n \times n$ 区域的王砖密铺问题，其计算复杂性属于 NP 类。由于王砖密铺问题非常直观，利用这个例子可达到较好地启发学生思考和理解的效果。首先，若用枚举的方法试图寻求一个合乎要求的密铺方案，最多可能要尝试$(n^2)!$种不同的排列方式，需要的时间相对于问题的大小是超指数级的。因此，难以给出问题的一个多项式时间的算法，也无法判断问题是否属于 P 类。其次，若给出了一种排列方式，则非常容易验证该排列方式是否满足密铺的要求，即对每个王砖，检验其四条边的颜色是否与相邻的王砖匹配。这一验证算法需要的时间为 $4n^2$，因此在多项式时间内可以验证该排列是否形成密铺方案，

从而问题属于 NP 类。

### 3.3. 王浩在国内讲授铺砖问题

值得一提的是，王浩十分热心祖国科学事业的发展。1977 年他回国访问期间，作了六场大型数理逻辑通俗演讲，其中专门有一讲介绍了“可计算性与铺砖问题”[12]。这六次演讲的内容经补充修订后结集成书《数理逻辑通俗讲话》，由国内科学出版社于 1981 年出版[13]。

## 4. 王浩的学生 Stephen Cook

我们的《离散数学》课程，讲授至 NP 完全问题的存在性，基本把计算理论中最基础的知识点都覆盖了。NP 完全问题的存在性由 Stephen Cook 在 1971 年的论文中首次提出并证明[14]，是计算理论和计算复杂性理论发展史上的一个里程碑式的成果，在教科书中被称为库克定理(Cook Theorem)。Cook 也因此项工作于 1982 年获得有计算机科学的诺贝尔奖之称的“图灵奖”[15]。

作为中国高校开设的《离散数学》课程，在讲授到库克定理时，可以讲述库克定理背后的更多的故事。特别值得指出的是，王浩是 Cook 在哈佛大学的博士生导师。Cook 在密歇根大学本科毕业后，1962 年申请到了哈佛大学数学系的研究生入学资格。他起初的想法是寻求在代数方向上做研究。而王浩当时是在哈佛大学工程与应用物理系任教授。Cook 在选修王浩开设的数理逻辑等相关课程后，就决定师从王浩开展博士阶段的学习与研究。

Cook 在 2016 年的一次接受采访中，已年近八旬，在回忆起当年证明日后以其姓氏命名的库克定理时，仍然强调他的导师王浩在不可判定问题上的归约思想对他关于 NP 完全性工作的启发：把不可判定问题类上的归约思想引入到 NP 问题类中，NP 完全问题的概念就呼之欲出了。在《离散数学》课堂中，教师可播放 Cook 接受采访的约 3 分钟片段(见图 3)，Cook 明确地说[16]：I knew that and my advisor was very interested in that, so I credit him for giving me the idea why can’t we do this at a lower level for propositional formulas? (我知道这一点【注：指在谓词逻辑公式层次上的归约】，我的导师【注：指王浩】对此也非常感兴趣，所以我感谢他给了我这样一个想法：为什么我们不能在相对更低层次的命题逻辑公式上做这件事呢？)


**Figure 3.** A screenshot of interview of Cook in 2016
**图 3.** Cook 于 2016 年接受采访视频截图

综上所述，王浩不仅开创性地提出王浩机、王浩铺砖问题等重要的概念和问题，还作为博士生导师

培养了 Cook，Berger 等杰出学者，在计算理论的发展早期作出了奠基性、系统性的重要贡献。

## 5. 总结与展望

本文总结了将王浩的多项研究贡献融入到《离散数学》课程中的教学设计与实践。通过在不同章节多次结合王浩的相应的研究成果，加深学生的印象。我们《离散数学》课程选用的教材是麻省理工学院的西普塞教授著的经典教材《计算理论导引》[17] [18]。该教材具有理论体系完备，定理论证直观，例题习题丰富等优点。然而，作者因其自身的角度不同，有意或无意地在教材中忽略了华人学者的贡献。正如朱松纯教授所言，华人学者的贡献被低估，需要我们主动宣传。作为高校教师，使用境外教材时也需要“择其善者而从之，其不善者而改之”，通过课程思政和融入数学文化的形式，补充相应内容，丰富和完善计算理论的历史叙事，使学生对知识的认识更加全面。高校教师必须不断提升自身水平，拓宽学术视野，突破教材的局限，才能在向学生传授知识的同时，融入数学文化，实现知识传授与人文熏陶的统一。在其它课程中，同样可借鉴本文运用的“核心概念追溯法”(追溯 NP 完全性概念的提出者 Cook)、“学术谱系关联法”(发掘 Cook 的师承关系)、“概念演化路径法”(王浩在图灵机的基础上提出王浩机)等方法，深入挖掘相关素材，注重长期积累，不满足于零星的现成资料，着力增强课程内容与数学文化融合的系统性。

## 基金项目

校级质量工程项目“数学与应用数学专项人才培养计划”(2024XJZLGC026)。

## 参考文献

[1] 教育部高等学校教学指导委员会. 普通高等学校本科专业类教学质量国家标准[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.

[2] 中华人民共和国教育部. 教育部关于印发《高等学校课程思政建设指导纲要》的通知: 教高〔2020〕3 号[EB/OL]. 2020-06-01. http://www.moe.gov.cn/srcsite/A08/s7056/202006/t20200603_462437.html, 2026-04-13.

[3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[4] 张奠宙, 王善平. 王浩[M]//《科学家传记大辞典》编辑组. 中国现代科学家传记. 第 6 集. 北京: 科学出版社, 1994: 97-110.

[5] Wang, H. (1957) A Variant to Turing's Theory of Computing Machines. *Journal of the ACM*, **4**, 63-92. https://doi.org/10.1145/320856.320867

[6] Minsky, M.L. (1967) Computation: Finite and Infinite Machines. Prentice-Hall.

[7] Wang, H. (1961) Proving Theorems by Pattern Recognition—II. *Bell System Technical Journal*, **40**, 1-41. https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1961.tb03975.x

[8] Greenfeld, R. and Tao, T. (2024) A Counterexample to the Periodic Tiling Conjecture. *Annals of Mathematics*, **200**, 301-363. https://doi.org/10.4007/annals.2024.200.1.5

[9] Berger, R. (1964) The Undecidability of the Domino Problem. Ph.D. Thesis, Harvard University.

[10] Poonen, B. (2014) Undecidable Problems: A Sampler. In: Kennedy, J., Ed., *Interpreting Gödel*, Cambridge University Press, 211-241. https://doi.org/10.1017/cbo9780511756306.015

[11] Gamegix. Tetravex 3 × 3. https://gamegix.com/tetravex/game?size=3

[12] 张尚水. 美籍数理逻辑学家王浩教授在京作学术报告[J]. 哲学研究, 1978(Z1): 96-99.

[13] 王浩. 数理逻辑通俗讲话[M]. 北京: 科学出版社, 1981.

[14] Cook, S.A. (1971) The Complexity of Theorem-Proving Procedures. *Proceedings of the* 3rd *Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Shaker Heights, 3-5 May 1971, 151-158. https://doi.org/10.1145/800157.805047

[15] ACM (2015) Stephen Arthur Cook—A.M. Turing Award Laureate. https://amturing.acm.org/award_winners/cook_n991950.cfm

[16] ACM (2026) An Interview with Stephen Cook. https://amturing.acm.org/interviews/cook_n991950.cfm

[17] 迈克尔·西普塞. 计算理论导引[M]. 原书第 3 版. 段磊, 唐常杰, 译. 北京: 机械工业出版社, 2015.

[18] Sipser, M. (2018) Introduction to the Theory of Computation. 3rd Edition, China Machine Press.