Advances in Education 教育进展, 2026, 16(6), 558-564
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2026.1661163

Hans汉斯

基于OBE理念的微积分教学设计

——以极限的$\varepsilon-\delta$语言为例

刘绍华，古勇毅*

广东财经大学统计与数据科学学院，广东 广州

收稿日期：2026年5月5日；录用日期：2026年6月7日；发布日期：2026年6月16日

摘 要

成果导向教育强调以学生学习成果为中心组织教学活动。针对微积分教学中学生对极限的$\varepsilon-\delta$语言理解困难等问题，本文以极限严格定义教学为例，尝试从OBE理念出发重构课堂设计：先提炼出不同极限过程的共同框架，再引导学生将该框架迁移至一元函数、左右极限、无穷远处极限以及多元函数极限等不同情境。教学设计的重点由定义记忆转向概念理解、逻辑表达与知识迁移，有助于提升学生对极限本质的把握和应用严格数学语言分析问题的能力。

关键词

OBE理念，微积分教学，极限，$\varepsilon-\delta$语言，知识迁移

Calculus Teaching Design Based on the OBE Concept

—A Case Study of the $\varepsilon-\delta$ Language of Limits

Shaohua Liu, Yongyi Gu*

School of Statistics and Data Science, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou Guangdong

Received: May 5, 2026; accepted: June 7, 2026; published: June 16, 2026

Abstract

Outcome-Based Education emphasizes organizing teaching activities around students' learning

*通讯作者。

文章引用: 刘绍华, 古勇毅. 基于 OBE 理念的微积分教学设计[J]. 教育进展, 2026, 16(6): 558-564.
DOI: 10.12677/ae.2026.1661163

outcomes. Addressing the difficulties of students in understanding the $\varepsilon-\delta$ language for limits in calculus teaching, this article takes the teaching of the strict definition of limits as an example and attempts to reconstruct classroom design from the perspective of OBE philosophy. Specifically, it first extracts the common framework underlying different limit processes, and then guides students to transfer this framework to various contexts, including limits of functions of one variable, one-sided limits, limits at infinity, and limits of multivariable functions. The focus of the teaching design shifts from memorizing definitions to conceptual understanding, logical expression, and knowledge transfer, which helps improve students' understanding of the essence of limits and their ability to analyze problems using rigorous mathematical language.

Keywords

OBE Concept, Calculus Teaching, Limits, $\varepsilon-\delta$ Language, Knowledge Transfer

1. 引言

成果导向教育(Outcome-Based Education，简称 OBE)主张从学生的学习结果出发来组织教学[1]-[3]。换句话说，课程设计不能只盯着教师要讲什么，而要多考虑学生学完后到底能获得什么。这里说的“获得什么”，不只是记住几个定义、公式，或是在熟悉题型里反复套方法，而是要能真正理解概念背后的含义，碰到新问题时能用已学知识去分析和解决。因此，在 OBE 理念下，教学目标、教学内容、课堂组织应该围绕学生能力的形成以及知识的可迁移性进行安排。

把这一理念用在微积分课程中，很有现实意义。微积分教学当然离不开计算训练，求极限、求导数、求积分都是学生必须掌握的基本技能。但如果课堂仅仅以公式记忆和题型训练为中心，学生往往只是暂时学会了某些解题步骤，并没有真正把握概念背后的思想。事实上，微积分的价值不仅在于培养学生的运算能力，更在于引导他们深刻地理解“极限”“微分”“积分”等基本概念，不能仅仅停留在直观的描述上。从这个意义上说，有效的微积分学习，应当表现为一种可迁移的理解力：学生在新问题情境中能看出相关概念的作用，并据此做出合理分析[4]-[8]。

从数学教育心理学的角度看，学生学习极限严格定义时遇到的困难并不是偶然的。APOS 理论认为，学生对一个数学概念的理解通常会经历从操作、过程、对象到图式的逐步建构[9]。对极限而言，学生最初往往只会把“令 x 接近 a”看成一种具体操作，随后才可能逐渐理解其中蕴含的变量变化过程，并进一步把极限定义看成一个可以独立分析和迁移使用的数学对象。另一方面，Tall 和 Vinner 提出的“概念图像”与“概念定义”理论指出，学生头脑中的直观图像和教材中的形式定义之间可能存在差异[10]。这对极限教学尤其具有启发意义：学生熟悉“越来越接近”的直观说法，并不意味着他们已经理解了“任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$”这一形式定义的逻辑结构；即使能够背出定义，也未必能够把这种逻辑结构迁移到新的极限情境中。

然而，要实现这样的可迁移理解并不容易。我们在多个学期的微积分教学中观察到，极限的 $\varepsilon-\delta$ 语言往往是学生从直观理解迈向严格数学思维的第一道坎。中学阶段那种“越来越接近”的说法虽然亲切，却经不起追问。有学生会想：究竟要多近才算“接近”？如果一个量先远离目标值再靠近，算不算有极限？这种模糊性在计算简单极限时还能勉强应付，一旦讨论函数的一致连续性、级数收敛性或者含参变

量积分等更复杂的概念时，立刻暴露出根基不稳的问题。因此，从 OBE 的视角看，我们需要的不只是学生能复述“对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$……”这串符号，而是他们真正读懂这串符号里藏着的衡量“接近”的规则，并能在不同极限情境中自行组织出类似的表述。这就要求教学设计从一开始就瞄准“理解 $\varepsilon-\delta$ 语言的内涵和本质并能够迁移运用”这一核心目标。

2. 极限的 $\varepsilon-\delta$ 语言的 OBE 理念教学设计

针对微积分教学中学生对极限的 $\varepsilon-\delta$ 语言理解困难等问题，我们从 OBE 理念出发重构课堂设计。学生在中学阶段通常已经接触过极限的一些直观说法，比如“当 x 越来越接近 a 时，$f(x)$ 越来越接近 A”。这种说法比较贴近日常理解，学生一般也容易接受。但在引入 $\varepsilon-\delta$ 语言之后，不少学生便开始感到吃力。他们也许能够把函数极限的定义背下来，却不清楚 ε 和 δ 在定义中分别起什么作用，他们也知道定义里有“任意”“存在”“当……时”等关键词，但很难把这些逻辑词语同“趋近”的直观图景联系起来。结果，后面学左极限、右极限、无穷远处的极限以及多元函数极限的时候，学生常常把每种表述都当成一个全新定义来死记硬背。从 OBE 理念来看，极限定义的教学目标不能仅仅停留在“学生会背定义”这一层面，而应进一步落实到学生能够形成什么样的理解能力上。更具体地说，学生应当能够看懂 $\varepsilon-\delta$ 语言的基本结构，理解它为什么能够刻画“趋近”，并能把这种结构迁移到不同类型的极限问题中[11] [12]。从 APOS 理论的角度看，学生理解极限的 $\varepsilon-\delta$ 语言，并不是听完定义就能立即完成的。起初，学生往往只能看到一些局部的操作，例如怎样理解 $|f(x)-A|<\varepsilon$，怎样限制 x 的取值范围，或者为什么要引入 δ 和 M。随着例子的积累，教师需要进一步引导学生看到这些操作背后共同的思路：先明确函数值允许的误差，再根据这种误差要求去控制自变量的变化范围，最后保证函数值与目标值之间的距离满足要求。这样一来，极限定义就不再是一串需要背诵的符号，而是一种可以生成、解释和迁移的表达方式。这也正符合 OBE 理念所强调的学习成果，即学生不仅要知道某一个定义是什么，更要能够理解定义是怎样形成的，并能把这种理解迁移到新的极限情境中。基于这一考虑，课堂上一开始不必急着给出各种极限定义的标准形式，而应先帮助学生提炼出不同极限定义背后的共同框架。

这个共同框架可以概括为一句话：给定任意小的误差要求，只要自变量沿着所讨论的变化过程走到“足够靠后”的阶段，函数值与目标值之间的误差就能够满足这个要求。用符号表示，就是对任意 $\varepsilon>0$，只要自变量进入某个“足够靠后”的范围，就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon。$$

这个表述本身并不复杂，而且也比较直观，学生一般都能理解。关键在于让学生看明白：不同类型极限之间，真正变化的是“自变量进入某个足够靠后的阶段”这句话在不同极限的情形下应该怎样用数学语言表述出来。下面把该框架用于一些常见的极限定义。

函数在一点处的极限

对于极限

$$\lim_{x\to a} f(x)=A,$$

$x\to a$ 表示 x 和 a 的距离趋向于 0，也就是 $|x-a|\to 0$。因此，这里的“足够靠后”就可以理解为：$|x-a|$ 的值已经小于某个正数 δ。于是上面的统一框架就转化为：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个正数 δ，使得当

$$0<|x-a|<\delta$$

时，总有

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon。$$

左极限和右极限

对于极限

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=A，$$

$x\to a^-$ 表示 x 从左侧趋向于 a，也就是 $a-x\to 0$，且 $a-x>0$。因此，这里的“足够靠后”就可以理解为：$a-x$ 的值已经小于某个正数 δ，且 $a-x>0$。于是，上面的统一框架就转化为：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个正数 δ，使得当

$$0<a-x<\delta$$

时，总有

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon。$$

同理，可以给出 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$ 的定义。

无穷远处的极限

对于极限

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A，$$

这里的 $x\to\infty$ 表示 $|x|$ 不断增大。因此，“足够靠后”应理解为 $|x|$ 已经大于某个足够大的正数 M。于是定义可以写成：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $M>0$，使得当

$$|x|>M$$

时，总有

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon。$$

对于极限

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A，$$

“足够靠后”应理解为 x 已经大于某个足够大的正数 M。于是定义可以写成：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $M>0$，使得当

$$x>M$$

时，总有

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon。$$

同理可以给出 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 的定义。

二元函数的极限

对于极限

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A，$$

这里 $(x,y)\to(a,b)$ 的变化过程是指平面上的点 (x,y) 趋向于点 (a,b)。因此，“足够靠后”不再是看数轴上的距离，而是看平面上的两个点之间的距离是否足够小。于是，该极限的定义为：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当

$$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$$

时，总有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon。$$

三元函数的极限

通常的微积分教材对于三元及以上函数的极限定义并未明确写出来。利用上述的框架，可以自然地把相关定义写出来。以三元为例，对于极限

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)=A，$$

这里$(x,y,z)\to(a,b,c)$的变化过程是指空间中的点(x,y,z)趋向于点(a,b,c)。因此，“足够靠后”是看空间的两个点之间的距离是否足够小。于是，该极限的定义为：对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当

$$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}<\delta$$

时，总有

$$|f(x,y,z)-A|<\varepsilon。$$

3. 教学实施策略与方法

课堂展开时，可以把定义的形成过程拆成三个环节。

第一个环节是确定“误差要求”。教师可以先让学生回答一个看似简单的问题：如果说$f(x)$越来越接近A，那么“接近”到底怎样衡量？有的学生会说“差不多”“很近”“越来越小”，这时教师可以继续追问：“很近”能不能用一个数来衡量呢？如果我要求函数值与A的距离小于0.1、小于0.01，甚至小于任意给定的正数，应该怎样保证？通过这样的追问，让学生逐步逼近我们需要的结论：$|f(x)-A|<\varepsilon$。这里的ε不是一个固定的小数，而是外界给出的任意精度要求。这个ε是任意给定的，只要$\varepsilon>0$，无论它多小，函数值最终都要进入这个误差范围。为了避免学生只停留在符号的机械记忆上，教师可以要求学生用自己的话解释$|f(x)-A|<\varepsilon$的含义，例如“函数值落在A的半径为ε的邻域内”，或者“函数值和A的距离小于ε”，再或者“函数值和A的误差小于ε”等等。

第二个环节是寻找“范围控制”。这一环节是最困难、最重要的环节，又可以分为两个步骤。第一步，教师可以逐步引导学生总结出如下框架：自变量进入某个“足够靠后”的阶段后，可以保证函数值误差满足要求。具体做法可以如下进行。当误差要求确定以后，教师可以向学生提问：对自变量x需要提出什么条件，才能保证函数值误差满足要求？有的学生会说：当自变量x和a“很近”时可以满足误差要求。这时教师可以继续追问：“很近”能不能再准确一点呢？比如x不是趋向于一个点，而是趋向于∞。这样，教师逐步引导学生总结出如下框架：自变量进入某个“足够靠后”的阶段后，可以保证函数值误差满足要求。第二步，教师可以引导学生在不同的极限过程中，如何描述“足够靠后”的阶段。比如在$x\to a$的极限中，“足够靠后”表现为$0<|x-a|<\delta$；在$x\to+\infty$的极限中，“足够靠后”表现为$x>M$；在$x\to a^-$的极限中，“足够靠后”表现为$0<a-x<\delta$。教师在这里不宜只告诉学生答案，而应让学生先判断“这一类极限过程中，自变量是怎样运动的”。学生判断之后，再把自然语言逐步压缩成数学符号。这样处理后，δ或M就不再是难以理解的东西，而是为了刻画自变量进入某个“足够靠后”的阶段而引入的数学语言。

第三个环节是形成“结果保证”。在前两个环节基础上，学生再把量词和条件连接起来，得到完整表述。教师可以把定义概括为一句较朴素的话：无论别人提出多小的函数值误差要求，只要自变量按照指定方式走得足够靠后，函数值就能满足这个误差要求。随后再让学生把这句话改写成严格数学语言。这个过程中，学生参与了定义的生成，就能深刻地理解定义的内涵和本质，比起机械记忆，这样的学习方式更具有“迁移性”。

在完成上述三个环节的总体说明后，还需要针对学生容易出错的地方设计更具体的课堂活动。首先，可以围绕“任意 ε ”设计辨析性提问。教师可以给出两个说法：其一是“只要找到一个很小的 ε，使得 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$ 成立”；其二是“无论别人给出怎样的 $\varepsilon>0$，都能通过限制 x 的范围使 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$ 成立”。让学生分组讨论哪一种说法更符合极限定义，并说明理由。这个活动的目的在于让学生意识到，ε 不是由我们挑选的，而是任意给定的精度要求。

其次，可以专门围绕量词顺序设置一个小组讨论或课堂辩论：为什么极限定义要写成“对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ ”，而不能写成“存在 $\delta>0$，对任意 $\varepsilon>0$ ”？教师可以先让学生尝试解释两种说法的差异，再举例说明：δ 的选择通常依赖于给定的 ε，精度要求越高，所需要的自变量控制范围往往越小。因此，ε 必须先给出，δ 才能随之确定。通过这一讨论，学生能够理解量词顺序并不是形式上的规定，而是极限定义逻辑结构的核心。

最后，可以设置一个迁移性任务。教师不给出完整定义，只给出某一种极限形式，例如

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)=A,$$

要求学生独立写出相应定义，并说明自己如何确定“足够靠后”的条件。评价时不只看学生是否写对最终公式，还要看他们能否说清楚 ε、δ 分别承担什么作用。这样可以使课堂评价与 OBE 所强调的学习成果保持一致。

从课堂反馈看，采用这种方式后，学生的学习方式会发生本质的变化。过去学生常常问的是“这个定义该用什么方法记住”，“为什么有的地方用 δ，有的地方用 M ”，而现在他们会问“这一类极限过程中的足够靠后应该怎样写”。这个问题一旦解决，严格定义基本上就能够顺着写出来。这样的训练能够让学生把极限的定义从最基本的单点极限迁移到其他不同的极限上，这也正体现了 OBE 理念所强调的知识迁移。

4. 结语

极限的 $\varepsilon-\delta$ 语言是学生在微积分学习初期就会接触到的一种严格表述。很多学生觉得它难，主要不是因为计算复杂，而是因为其中包含了抽象符号、量词顺序以及变量之间的约束关系。换一个角度看，这些困难本身也说明它具有较好的教学价值。通过这部分内容，学生不仅可以学习怎样准确表达数学概念，也可以逐步体会不同极限定义之间的联系。基于 OBE 理念，本文对极限严格定义的教学作了一些调整。教学时，不把函数极限、左右极限、无穷远处极限等定义逐条讲解，也不要求学生机械背诵固定格式，而是先从若干具体例子入手，帮助学生找出这些定义背后的共同表达框架。在此基础上，再根据自变量趋近方式的不同，引导学生写出相应的限制条件。这样处理，有助于学生把注意力从“记住定义”转向“理解定义如何生成”。结合 APOS 理论和“概念图像–概念定义”理论来看，极限严格定义教学的关键，并不只是让学生从不会背到会背，而是让学生从直观操作逐步过渡到过程理解、对象把握和图式建构。

通过这样的教学设计，学生的学习过程发生了根本性变化。过去，他们更多是在记忆“对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ ”这样的固定句式；现在，他们需要先判断自变量的变化方式，再思考“足够靠后”阶段如何

用数学语言描述出来。这个过程更接近数学定义形成的真实逻辑，也更能体现 OBE 所强调的“学习成果”。学生如果能够从一元函数极限迁移到左右极限、无穷远处极限和多元函数极限，说明他们获得的就不只是一个孤立定义，而是一种可迁移的理解方式。

从教师教学的角度看，OBE 理念落实到课堂，并不只是把教学目标写成“知识目标、能力目标和素养目标”，更关键的是改变教师组织知识的方式。以极限定义教学为例，教师需要把传统的“讲授定义”转变为“引导学生生成定义”。学生在这个过程中经历了从直观语言到数学符号、从单一情形到多种情形、从被动接受到主动表达的转变。这样的转变未必能在一次课中完全完成，但只要在后续内容中持续强化，学生对微积分基本概念的理解就会更加连贯。

因此，极限的 $\varepsilon-\delta$ 语言不宜只被看成微积分课程中的一个难点。它虽然抽象，但恰好提供了把 OBE 理念落实到课堂的素材。教学时，如果教师能够抓住“给定误差要求、寻找控制范围、保证结果成立”这一基本线索，引导学生理解每个步骤的内涵，而不是只要求他们写出标准格式，学生对极限定义的理解就会更深入一些。与此同时，他们也更容易把这种表达方式迁移到其他相关概念中。对于微积分教学改革而言，这种从具体概念入手的改进虽然范围不大，却更容易落到实处，也更容易被学生真实地感受到。

基金项目

广东省教育科学规划课题(项目编号：2024GXJK066)；广东省高等教育学会高等教育研究课题(项目编号：25GBY024)。

参考文献

[1] 李志义. 解析工程教育专业认证的成果导向理念[J]. 中国高等教育, 2014(17): 7-10.

[2] 姜波. OBE: 以结果为基础的教育[J]. 外国教育研究, 2003, 30(3): 35-37.

[3] 顾佩华, 胡文龙, 林鹏, 等. 基于“学习产出”(OBE)的工程教育模式——汕头大学的实践与探索[J]. 高等工程教育研究, 2014(1): 27-37.

[4] 黄晴, 陈有杰. 基于 OBE 理念的高等数学混合式教学改革研究[J]. 创新教育研究, 2023, 11(12): 3894-3899.

[5] 王华军. 基于 OBE 理念的数学分析课程教学改革[J]. 教育进展, 2024, 14(3): 329-334.

[6] 张杰, 林爽. 基于 OBE 理念的《数学分析》课程改革与实践[J]. 教育进展, 2020, 10(4): 533-535.

[7] 同济大学数学系. 高等数学: 上册[M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[8] 华东师范大学数学系. 数学分析: 上册[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[9] Dubinsky, E. and McDonald, M.A. (2001) APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In: Holton, D., Artigue, M., Kirchgräber, U., Hillel, J., Niss, M. and Schoenfeld, A., Eds., *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*, Kluwer Academic Publishers, 275-282.

[10] Tall, D. and Vinner, S. (1981) Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 151-169. https://doi.org/10.1007/bf00305619

[11] 黄志波. 《数学分析》中极限和连续的教学思考[J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2019, 51(S1): 4-7.

[12] 唐树江, 邓敏. 高中与大学数学教育衔接视角下的极限概念教学研究[J]. 创新教育研究, 2025, 13(12): 395-404.