**Advances in Education** 教育进展, 2026, 16(6), 784-790
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2026.1661192

Hans汉斯

# 教评融合的双阶建模教学框架建构与实践

## ——旨在缓解中学数学建模教学的“过程断层”

**赵　颖，王楚涵**

北华大学数学与统计学院，吉林　吉林

收稿日期：2026年5月12日；录用日期：2026年6月17日；发布日期：2026年6月23日

### 摘　要

基于弗赖登塔尔数学化理论，本研究构建“教评融合的双阶建模教学框架”，通过双阶教学与双轨评价的同步实施实现教评融合。以人教A版《三角函数》为载体，设计摩天轮、二十四节气日影变化两个案例，验证框架实施路径。相较于传统建模教学将建模窄化为应用题训练的不足，本框架在新知阶段设置建模锚点以激活概念需求，章节阶段构建建模单元以强化决策能力；双轨评价创新开发概念需求发生与建模决策能力两套量化评估体系，将内隐思维过程转化为可观测、可诊断的行为指标。该框架并非对现有教学的零散修补，而是针对“过程断层”这一核心缺陷的一种系统性的教学路径，可为中学数学建模教学改革与实践提供参考。

### 关键词

中学数学建模，过程断层，双阶教学，双轨评价，教评融合

# Construction and Practice of a Two-Stage Modeling Instructional Framework Integrating Teaching and Evaluation

## —Addressing the “Process Gap” in Secondary School Mathematical Modeling Instruction

**Ying Zhao, Chuhan Wang**

School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin Jilin

Received: May 12, 2026; accepted: June 17, 2026; published: June 23, 2026

文章引用: 赵颖, 王楚涵. 教评融合的双阶建模教学框架建构与实践[J]. 教育进展, 2026, 16(6): 784-790.
DOI: 10.12677/ae.2026.1661192

## Abstract

**Based on Freudenthal's mathematization theory, this study constructs a two-stage mathematical modeling teaching framework with integrated teaching and evaluation. The integration of teaching and evaluation is realized through the synchronous implementation of two-stage teaching and dual-track evaluation. Taking the Trigonometry volume of People's Education Press Version A as the carrier, two teaching cases regarding the Ferris wheel and the solar shadow variation of the Twenty-four Solar Terms are designed to verify the implementation path of the framework. Conventional modeling teaching tends to simplify mathematical modeling into applied problem training, while the proposed framework sets modeling anchor points in the new knowledge learning stage to stimulate conceptual demand, and builds modeling units at the chapter level to enhance students' modeling decision-making competence. The dual-track evaluation innovatively develops two quantitative evaluation systems for the generation of conceptual demand and mathematical modeling decision-making ability, converting implicit thinking processes into observable and diagnosable behavioral indicators. Rather than a fragmented revision of existing teaching practices, this framework provides a systematic teaching approach targeting the core problem of "process discontinuity" in middle school mathematical modeling teaching, which can provide a reference for the reform and practical implementation of middle school mathematics modeling instruction.**



## Keywords

**Secondary School Mathematical Modeling, Process Gap, Two-Stage Instruction, Dual-Track Evaluation, Teaching-Assessment Integration**




## 1. 引言

《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》将“数学建模”列为六大核心素养之一，要求学生逐步形成“用数学眼光观察、用数学思维思考、用数学语言表达”现实世界的能力[1]。但就当前中高考数学试题的考查倾向来看，评价重心仍落在给定条件下建立模型、求解与应用等“中下游”环节，而对从现实情境中自主发现并提炼问题的“上游”能力关注不足[2]。这种评价导向与建模“从现实到数学再回归现实”的完整认知过程之间形成了结构性脱节，本文将其称为“过程断层”。这一断层并非孤立的评价偏差，而是现行教学体系在目标、内容与评价上系统性偏差的集中体现，日常教学因此容易窄化为“为考而教”，学生长期停留在求解既定模型的技能层面，问题意识与创新思维难以生长。如何系统弥合这一断层，成为核心素养落地过程中无法回避的问题。

现有研究已广泛关注中学数学建模教学的困境。张淑梅等(2017)实证表明，学生数学建模素养在六项核心素养中平均得分最低[3]；倪黎等(2022)进一步指出，当前考查对建模“上游”环节覆盖不足[2]；高蕊(2024)、苏子婷(2025)从教学实践出发，指出建模教学常被简化为应用题训练，教材中具建模价值的问题稀缺[4] [5]。综合来看，中学数学建模教学普遍存在“重下游、轻上游”的过程断层，制约了教学质量提升。与此同时，学界与一线教学也开展了建模全过程教学探索。陈文云(2025)在指数函数教学中渗透建模意识[6]；李安(2023)以输水槽横截面优化设计为例，完整呈现技术类建模流程[7]；马萍等(2021)以种群

数量变化研究为载体，展示了科学探究中的建模过程[8]。这些案例为全过程教学提供了参考，但多为个例，未形成可推广的系统性教学设计框架。

综合现有研究可知，学界已就数学建模教学存在的“过程断层”问题形成共识，但相关研究仍存在三方面不足：一是尚未形成系统化的教学设计框架，二是缺少针对建模上游能力的评价工具，三是教学与评价环节融合程度较低。鉴于此，本研究围绕上游教学的系统化设计、上游能力的可视化评价两大核心问题，构建教评融合的双阶建模教学框架，为中学数学建模教学从下游技能训练转向全过程素养培育，提供可操作的结构化实施路径。

## 2. 双阶教学：建模锚点与建模单元的构建

本研究以弗赖登塔尔的“数学化”理论为基石[9]，构建了双阶建模教学设计框架。双阶教学将上游能力培养嵌入日常教学的两个关键节点：新知学习阶段的“建模锚点”对应“水平数学化”，引导学生从现实情境中识别数学结构、形成数学概念；章节学习阶段的“建模单元”对应“垂直数学化”，引导学生在数学模型内部进行推理、拓展与体系化建构。与传统教学将建模置于章节结束后、作为“应用练习”处理的定位不同，本框架将建模前置为新知学习中的概念驱动环节，并延伸为章节学习后的综合应用载体。

### 2.1. 在新知学习中构建“建模锚点”

“建模锚点”即在新概念、新定义的初始教学环节，嵌入一个源于真实世界、具有探究意义的问题情境，驱动学生为描述或解决现实问题，主动生成对特定数学工具的内在需求。本研究以人教 A 版《三角函数》第五章“正弦函数”概念教学为载体，通过摩天轮运动与正弦函数的发生这一案例，呈现“建模锚点”的具体设计与实施路径。本案例以摩天轮匀速旋转为情境，设计 15~20 分钟的探究环节，嵌入正弦函数概念新授课的导入阶段。

#### 2.1.1. 锚点情境创设

播放摩天轮匀速旋转视频，聚焦某一座舱。给定参数：半径 40 m，旋转一周 20 min，座舱最低点离地 5 m。驱动性问题：“假设你是游客，需要向地面的朋友精准描述你在未来任意时刻离地的高度，你能为他制作一个预测工具吗？”这一问题与传统习题“已知摩天轮半径求高度”的本质区别在于：后者给定模型，前者要求学生创造模型。

#### 2.1.2. 上游探究与概念发生

环节一：定性感知与核心变量的识别。学生通过观察，从复杂现象中剥离出关键要素：时间($t$)和高度($h$)，并感知到高度变化的周期性。

环节二：尝试建模与认知冲突的形成。学生尝试用一次函数、二次函数描述 $h$ 与 $t$ 的关系，但很快发现这些模型无法刻画“周而复始”的变化。这一失败制造了关键的认知冲突，让学生意识到需要一种能描述周期性变化的新工具。

环节三：情境简化与关键数学联系的建立。教师引导学生进行合理的抽象与简化，将三维空间的摩天轮运动，抽象为点在圆形轮廓上的匀速圆周运动。关键在于建立合适的数学模型：

1) 建立坐标系：以摩天轮圆心 $O$ 为原点，水平向右为 $x$ 轴正方向，竖直向上为 $y$ 轴正方向，圆心离地高度为 45 m；

2) 确定初始状态：$t=0$ 时，座舱在最低点 $P_0$，坐标为 $(0,-40)$，对应旋转角 $\alpha_0=-\dfrac{\pi}{2}$；

3) 推导角速度与旋转角：摩天轮逆时针匀速旋转，角速度为

$$\omega = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}(\text{rad/min}) \tag{1}$$

$t$ 时刻的旋转角为

$$\alpha = \alpha_0 + \omega t = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}t \tag{2}$$

4) 坐标表示：根据单位圆定义，点 $P$ 的坐标为 $(40\cos\alpha, 40\sin\alpha)$。

环节四：新概念引入与初始模型的构建。在学生处于“知道角度与坐标有关，但缺乏精确表达工具”的状态时，教师引出“正弦函数”定义。学生豁然开朗，并自主完成模型构建：

$$h(t) = 45 + 40\sin\left(\frac{\pi}{10}t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{3}$$

通过代入特殊时刻验证，模型的有效性及函数的周期性、振幅等核心性质得以直观揭示。

#### 2.1.3. 案例解析

本案例将正弦函数学习起点从抽象的角的比值，调整为真实的运动描述困境：学生尝试用一次、二次函数刻画摩天轮座舱高度变化时，旧工具无法体现其“周而复始”的周期性。这种工具适配矛盾使学生产生新工具需求，此时引入正弦函数是认知需求驱动的自然结果，而非教师强行灌输，进而实现现实情境与数学概念的意义建构。

### 2.2. 在章节学习后构建“建模单元”

与新知学习阶段的“建模锚点”不同，章节学习后的“建模单元”侧重于训练学生在掌握基础概念后，综合运用本章知识解决复杂情境问题，培养建模决策与论证能力。本研究以北纬 40°地区正午日影长度的周年变化为研究对象，设计二十四节气与正午日影长度变化的周期性模型这一案例，引导学生在 1 课时的探究任务中建立并应用三角函数模型，综合运用本章所学知识。

#### 2.2.1. 锚定文化情境与启动原始问题

展示古代圭表测影图片，讲解《周髀算经》中“立杆测影”的历史[1]，介绍二十四节气与日影长短的关联：夏至日影最短，冬至日影最长，日影长度随节气呈周期性变化。提出开放性问题：“古人通过观测日影长短来确定节气，这其中蕴含着什么数学规律？如果我们想定量描述北京地区正午日影长度在一年中的变化，可以如何建立数学模型？”学生小组讨论后，自主将问题定义为：建立函数模型 $L(t)$，刻画正午影长 $L$ 随日期 $t$ 的周期性变化。

#### 2.2.2. 建模过程：参数推导、模型确立与综合求解

教师提供简化数据：北京(北纬 40°)，表杆高 1 m，夏至日正午影长 $L_{\min} = 0.27\text{ m}$，冬至日正午影长 $L_{\max} = 2.00\text{ m}$，周期 $T = 365$ 天。学生自主完成模型构建与求解，核心环节如下：

环节一：模型形式的选择与通用参数确定。学生基于问题的周期性、有极值的特征，自主选择正弦型或余弦型函数为模型形式，结合已知数据推导振幅 $A$、垂直位移 $B$、角频率 $\omega$：

$$A = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{2} = \frac{2.00 - 0.27}{2} = 0.865(\text{m}) \tag{4}$$

$$B = \frac{L_{\max} + L_{\min}}{2} = \frac{2.00 + 0.27}{2} = 1.135(\text{m}) \tag{5}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{365}(\text{rad/d}) \tag{6}$$

[1] https://www.shidianguji.com/zh/book/HY6491/chapter/1kumhmh3vz56z

环节二：相位确定与建模决策。相位确定是本案例的核心决策节点，引导学生围绕“$t=0$ 对应夏至日，$L(0)=L_{\min}$”的要求，自主设计推导路径。学生主要形成两种方案：一是采用翻转的余弦函数模型 $L(t)=-A\cos(\omega t)+B$，二是采用正弦函数模型 $L(t)=A\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+B$。教师引导学生通过诱导公式证明两种模型的数学等价性，使其体验建模的灵活性与决策思维。Rad

环节三：模型检验与初步应用。选定模型：

$$L(t)=-0.865\cos\left(\frac{2\pi}{365}t\right)+1.135 \tag{7}$$

然后进行检验，并解决开放性问题，如“估算立秋时的影长”和“若某日影长为 1.50 m，该日期可能在什么时候？”，综合运用了反三角函数、三角方程等知识。

#### 2.2.3. 案例解析

本案例设计意图包含三点：一是着力培养学生问题定义能力，引导其自主将文化情境转化为数学问题，而非被动接受现成问题；二是凸显建模决策的探索性，通过相位确定等环节，让学生体会多种方案的等价性与优劣权衡，打破建模即套公式的刻板印象；三是实现知识有机整合，综合运用振幅、周期、相位及反三角函数等知识，融合科学探究与人文精神。

## 3. 教评融合：概念需求与决策能力的评价设计

本研究秉持“教什么，就评什么”的原则，为双阶教学匹配“双轨评价”体系，开发两套通用评价框架。传统建模评价的主要局限在于：只评“结果对不对”，不评“过程好不好”；只评“模型会不会建”，不评“问题会不会提”。本框架试图扭转这一局面。

### 3.1. 框架一：概念需求发生评价框架

本框架适用于新知学习阶段的“建模锚点”，用于诊断学生是否经历“旧工具失效—认知冲突—新工具需求”的关键心理历程(见表 1)。其使用分为三步：第一步，建模锚点实施前，教师熟记三个观测维度的行为指标；第二步，“尝试建模”环节，教师暂停教学 2~3 分钟，快速定位学生个体或小组行为；第三步，根据班级整体表现调整教学：多数学生处于水平 2 及以下，说明“旧工具依赖”较强，需增设“对比讨论”环节；多数处于水平 3，表明认知冲突已触发但未突破，可通过追问“缺了什么”引导；部分达到水平 4，则让其分享论证，实现以学促学。该框架可迁移至“新概念引入”相关教学节点。

**Table 1.** Evaluation framework for the emergence of concept need
**表 1.** 概念需求发生评价框架

| 观测维度 | 水平 1 (沉默) | 水平 2 (接受) | 水平 3 (困惑) | 水平 4 (需求) |
|---|---|---|---|---|
| 对旧工具的觉察 | 未参与讨论 | 尝试使用旧工具，未察觉矛盾 | 发现旧工具失效，但说不清原因 | 明确指出旧工具“缺什么” |
| 认知冲突的卷入度 | 游离状态 | 被动接受他人观点 | 表情困惑、有追问意愿 | 主动辩论“为什么不能用” |
| 对新工具的期待 | 未参与讨论 | 等待教师给出公式 | 意识到需要新工具，不知从何寻找 | 主动提问“有没有描述……的函数” |

以“摩天轮与正弦函数”锚点为例，在“尝试建模与认知冲突形成”环节，教师观察学生小组讨论及

个体反应。多数学生若表现为“用一次函数无法求解便等待教师给出答案”，则表明其仍处于“接受”层面，教师需介入引导，通过追问“为什么一次函数不行？它缺了什么？”，引导学生从“算不出”转向思考“缺什么”。部分学生若主动提出“需一种能描述循环变化的函数”，则已达到“需求”层面，教师可请其分享思考过程，带动全班。评价结果直接决定后续教学策略：要么继续铺垫认知冲突，要么顺势引入正弦函数概念。

### 3.2. 框架二：建模决策能力评价框架

本框架适用于章节学习阶段的“建模单元”，评估学生在建模过程中的决策逻辑与论证能力(见表 2)。具体流程为：第一步，建模任务完成后，各小组将建模方案整理为建模决策海报；第二步，小组间交换海报，依据框架五个维度进行互评，各维度需给出判断理由；第三步，每个小组根据收到的反馈方案，提交最终版。该框架的迁移不限于三角函数，但凡涉及复杂情境建模的教学节点，均可调用本框架进行决策能力评价。

**Table 2.** Evaluation framework for modeling decision-making ability
**表 2.** 建模决策能力评价框架

| 评价维度 | 水平 1 (依赖) | 水平 2 (模仿) | 水平 3 (独立) | 水平 4 (批判) |
|---|---|---|---|---|
| 数学工具选择 | 等待教师指定 | 参照例题，未结合问题特征 | 依据最值、对称性等自主选择 | 比较不同工具的等价性与优劣 |
| 参照系/起点设定 | 无法确定 | 随意选取，无理由 | 依据便利性自主设定 | 尝试不同设定，比较对建模繁简的影响 |
| 参数/阈值估计 | 无法独立求参 | 套用公式，不理解意义 | 利用已知条件自主推算 | 设计多种估计方法，比较稳定性 |
| 模型检验与修正 | 未检验 | 仅代入 1~2 个已知点验证 | 选取多个检验点计算误差 | 发现结构偏差，提出修正设想 |
| 决策论证 | 无法解释 | 能复现计算步骤 | 清晰阐述为什么选 A 不选 B | 主动回应质疑，基于论证优化模型 |

以“二十四节气与正午日影建模”为例，各小组完成建模方案后，参照上述五个维度开展小组间互评。“数学工具选择”维度，学生需判断对方选用正弦型或余弦型函数的依据是否充分，区分其是随意选择，还是基于“夏至最小值、冬至最大值”的特征确定；“参数估计”维度，需关注对方振幅、相位的推导逻辑是否严谨，判断其是直接套用公式，还是从已知数据中自主推算；“决策论证”维度，重点关注对方能否清晰阐述起点选择及相位表达的理由。互评结束后，教师选取典型方案进行全班点评，强化建模决策关键节点。

## 4. 框架的适用性拓展讨论

本研究构建的教评融合双阶建模教学框架，核心逻辑为基于弗赖登塔尔数学化理论，将“建模锚点”与“建模单元”嵌入不同教学节点，搭配双轨评价实现教评融合。为体现框架普适性，简要说明其在中学数学另外两个典型模块的应用设计思路。

### 4.1. 指数函数模块

新知阶段建模锚点：以人口增长为情境，通过“预测未来人口数量”的驱动性问题，引导学生发现

一次、二次函数的局限性，触发对指数函数的需求，完成概念引入与初始建模。章节阶段建模单元：设计人口增长、放射性衰变、复利计算多情境对比任务，简要训练学生模型选择、参数辨析的决策能力。

### 4.2. 线性规划模块

本框架适用于新知学习阶段的新知阶段建模锚点：以工厂资源分配为情境，通过“最优产量安排”问题，引导学生将实际约束条件、优化目标转化为数学语言，引出线性规划核心概念。章节阶段建模单元：增设复杂约束条件，简要训练学生约束条件梳理、最优解论证的决策能力。

综上，该框架可灵活迁移至不同数学模块，核心逻辑具有普适性，仅需结合模块特点调整情境与建模重点即可。

## 5. 总结

本研究针对中学数学建模教学“过程断层”问题，构建教评融合的双阶建模教学框架。其当前有效性主要体现为理论逻辑自洽与案例落位的解释力。首先，双阶教学以弗赖登塔尔数学化理论为基础，将建模锚点与建模单元分别嵌入新知及章节学习关键节点，实现上游能力培养的结构性融入。其次，双轨评价配套两套通用框架，将内隐认知过程转化为可观测的外显行为。最后，以《三角函数》为载体的两个典型案例，完整呈现框架的可操作路径，印证其具可操作性，并非空中楼阁。该框架的核心是将建模问题定义权从教师或教材交还给学生，使学生从模型操作工转变为问题定义者。

本研究存在一定局限性，需在后续研究中进一步完善：一是案例覆盖范围较窄，仅以《三角函数》为载体设计案例，未涉及代数、几何等其他数学模块的实证验证；二是缺乏大样本、长期的教学实证数据，框架对学生建模素养提升的实际效果尚未得到充分验证。

建议一线教师分步推进，优先嵌入建模锚点；教材编写者增设真实情境与决策留白，共同推动建模教学从下游技能训练转向全过程素养培育。

## 参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[2] 倪黎, 茹凯, 颜宝平. “数学建模”核心素养试题分析与命题探索[J]. 数学教育学报, 2022, 31(2): 69-76.

[3] 张淑梅, 何雅涵, 保继光. 高中数学核心素养的统计分析[J]. 课程·教材·教法, 2017, 37(10): 50-55.

[4] 高蕊, 曹姝晗. 基于新课标的高中数学建模实践教学改革策略[J]. 新课程研究, 2024(15): 108-110.

[5] 苏子婷, 董玉成. 如何把教科书中的数学问题转变为建模问题[J]. 中学数学, 2025(5): 10-13.

[6] 陈文云. 基于建模意识培养的高中数学“指数函数”教学策略研究[J]. 考试周刊, 2025(1): 92-94.

[7] 李安. 问题情境视角下高中数学建模教学实践——以“输水槽横截面优化设计问题”为例[J]. 中学数学教学参考, 2023(30): 1-4.

[8] 马萍, 王尧, 胡继安. 学科融合: 数学建模活动资源开发的一个视角——以“种群数量变化研究”为例[J]. 数学通报, 2021, 60(3): 43-48.

[9] 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学[M]. 陈昌平, 唐瑞芬, 等, 编译. 上海: 上海教育出版社, 1995.